УДК 517.977

Б.И. Мокин, И.А. Чернова

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Введение

В работах [1, 2] определены условия и предложен метод построения математических моделей минимального порядка, не превышающего трех, для сложных динамических систем, которые допускают линеаризацию характеристик и описываются в общем случае дифференциальными уравнениями

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_0 x, \quad n > 3, \tag{1}$$

правые части которых не содержат производных.

В данной статье показано, как изменятся условия минимизации порядка модели и метод ее идентификации, предложенные в [1, 2], при решении задачи построения математических моделей минимального порядка, эквивалентных по критической частоте ω_{cr}, для замкнутых линейных динамических систем, описанных в общем случае дифференциальными уравнениями

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \; n > m, \tag{2}$$

правые части которых содержат производные. Показано также, как видоизменится алгоритм метода идентификации, приведенного в [1, 2], при идентификации математической модели минимального порядка вида

$$a_5 \frac{d^5 y}{dt^5} + a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \tag{3}$$

полученной для сложных замкнутых систем управления линейными динамическими объектами с широко используемыми пропорционально-дифференциально-интегральными (ПИД) регуляторами.

В качестве критерия минимизации порядка модели предлагается использовать критическую частоту ω_{cr}, поскольку именно расположение этой частоты на частотной оси определяет, будет ли система автоматического управления сложным динамическим объектом с ПИД-регулятором устойчивой после замыкания ее разомкнутого контура единичной обратной связью, поэтому при моделировании системы численное значение этой частоты не должно изменяться.

Условие минимума порядка дифференциального уравнения, используемого в качестве модели линейной динамической системы с обратной связью в задаче оценки устойчивости

Решать поставленную задачу начнем с вывода условия минимума порядка дифференциального уравнения, используемого в качестве модели линейной динамической системы с обратной связью в задаче оценки устойчивости. Вначале

© Б.И. МОКИН, И.А. ЧЕРНОВА, 2017

рассмотрим уравнение (2), которому на комплексной плоскости, как известно из теории автоматического управления, изложенной, например, в [3], после применения к нему преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях можно поставить в соответствие передаточную функцию $W_n(p)$ вида

$$W_n(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + 1}. \tag{4}$$

Данная функция, в свою очередь, в частотной области порождает амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) $W_n(j\omega)$, действительную частотную характеристику (ДЧХ) $R_n(\omega)$, мнимую частотную характеристику (МЧХ) $Q_n(\omega)$, амплитудную частотную характеристику (АЧХ) $A_n(\omega)$, фазовую частотную характеристику (ФЧХ) $\varphi_n(\omega)$, логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ) $L_n(\omega)$ и логарифмическую фазовую частотную характеристику (ЛФЧХ) $\varphi_n^*(\omega\ )$, которая отличается от ФЧХ $\varphi_n(\omega)$ лишь тем, что частотная ось в ней масштабирована в декадах.

По ЛАЧХ и ЛФЧХ, как известно [3], определяют две характерные для замкнутых динамических систем частоты: частоту среза ω_{cut} и критическую частоту ω_{cr}, являющиеся корнями уравнений

$$L_n(\omega_{cut}) = 0, \tag{5}$$

$$\varphi_n^*(\omega_{cr}) = -\pi. \tag{6}$$

На рис. 1 представлены ориентировочные графики для ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутого контура замкнутой динамической системы, процессы в котором описываются дифференциальным уравнением (2), для случаев, когда

$$\omega_{cut} < \omega_{cr}, \tag{7}$$

$$\omega_{cut} > \omega_{cr}. \tag{8}$$

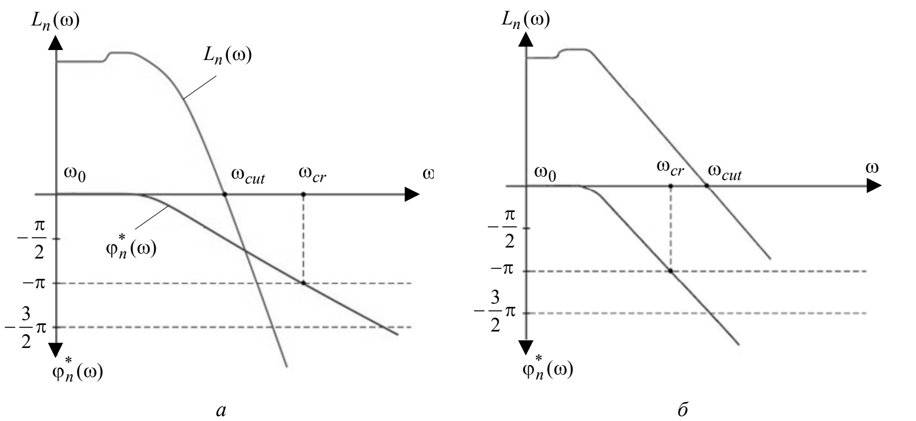

Рис. 1

Как известно [3], устойчивая разомкнутая динамическая система при ее замыкании единичной обратной связью остается устойчивой, если выполняется неравенство (7). Если же имеет место неравенство (8), то устойчивая разомкнутая динамическая система при ее замыкании единичной обратной связью теряет устойчивость и становится неустойчивой. Поэтому при синтезе математической модели минимального порядка критическая частота ω_{cr} динамической системы, разомкнутый контур которой замыкается единичной обратной связью, определяемая с помощью этой модели, должна оставаться такой же, как в моделируемой реальной системе.

Затем поступим следующим образом: разложим многочлены, стоящие в числителе и знаменателе выражения (4), по теореме Виета и представим это выражение в виде

$$W_n(p) = \frac{b_m}{a_n} \frac{(p - p_1^*)(p - p_2^*) \cdots (p - p_m^*)}{(p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n)}. \tag{9}$$

Здесь $p_1, p_2, ..., p_n$ — корни многочлена в знаменателе выражения (4), которые для устойчивой динамической системы [3] — отрицательные действительные числа или пары комплексных сопряженных чисел с отрицательной действительной частью, а $p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*$ — корни многочлена в числителе выражения (4), которые для систем с ПИД-регуляторами (благодаря включению которых в системы управления их математические модели приобретают производные в правой части), также являются либо отрицательными действительными числами, либо парами комплексных сопряженных чисел с отрицательными действительными частями.

Для упрощения анализа допустим, что все указанные выше корни — отрицательные действительные числа, т.е. положим, что

$$p_\lambda = -\alpha_\lambda, \ \lambda = 1, 2, ..., n; \ p_v^* = -\alpha_v^*, \ v = 1, 2, ..., m. \tag{10}$$

Тогда выражение (9) можно записать

$$W_n(p) = W_0(p) \prod_{\lambda=1}^{n} W_\lambda(p) \prod_{\nu=1}^{m} W_v(p), \tag{11}$$

где $W_0(p)$ — передаточная функция усилительного звена

$$W_0(p) = \frac{b_m}{a_n}, \tag{12}$$

$W_\lambda(p), \lambda = 1, 2, ..., n,$ — передаточные функции апериодических звеньев первого порядка — для корней $p_\lambda, \lambda = 1, 2, ..., n,$ соответственно:

$$W_\lambda(p) = \frac{1}{p + \alpha_\lambda}, \tag{13}$$

$W_v(p), v = 1, 2, ..., m,$ — передаточные функции форсирующих звеньев первого порядка — для корней $p_v^*, v = 1, 2, ..., m,$ соответственно:

$$W_v(p) = p + \alpha_v^*. \tag{14}$$

Если в выражении (11) перейти к АФЧХ, то будем иметь

$$W_n(j\omega) = W_0(j\omega) \prod_{\lambda=1}^{n} W_\lambda(j\omega) \prod_{v=1}^{m} W_v(j\omega). \tag{15}$$

В свою очередь из выражения (15) следует, что АЧХ и ФЧХ этой системы будут иметь следующий вид:

$$A_\mathrm{n}(\omega) = A_0(\omega) \prod_{\lambda=1}^{n} A_\lambda(\omega) \prod_{v=1}^{m} A_v(\omega), \tag{16}$$

$$\varphi_n(\omega) = \varphi_0(\omega) + \sum_{\lambda=1}^{n} \varphi_\lambda(\omega) + \sum_{\nu=1}^{m} \varphi_\nu(\omega). \tag{17}$$

При этом

$$\varphi_0(\omega) = \operatorname{arctg} 0 = 0, \tag{18}$$

$$\varphi_\lambda(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha_\lambda}, \;\; \lambda = 1, 2, ..., n, \tag{19}$$

$$\varphi_\nu(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha_\nu^*}, \;\; \nu = 1, 2, ..., m. \tag{20}$$

Из выражения (19) следует, что фазовая характеристика каждого апериодического звена при изменении частоты от нуля до бесконечности в пределах полосы значений $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, а из выражения (20) следует, что фазовая характеристика каждого форсирующего звена при изменении частоты от нуля до бесконечности в пределах полосы значений $\left[0, +\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому для каждой пары последовательно соединенных одного апериодического и одного форсирующего звеньев справедливо выражение

$$\lim_{\omega \to \infty} [\varphi_\lambda(\omega) + \varphi_\nu(\omega)] = 0. \tag{21}$$

Это значит, что для того чтобы ФЧХ системы, заданная выражением (17), стремилась к $-\frac{\pi}{2}$, необходимо в структуре этой системы иметь количество форсирующих звеньев, задающих порядок старшей производной в правой части дифференциального уравнения (2), на единицу меньше количества апериодических звеньев, задающих порядок этого дифференциального уравнения. А для того чтобы ФЧХ системы, заданная выражением (17), стремилась к $-\pi$, необходимо в структуре этой системы иметь количество форсирующих звеньев, задающих порядок старшей производной в правой части дифференциального уравнения (2), на две единицы меньше количества апериодических звеньев, задающих порядок этого дифференциального уравнения. И наконец, для того чтобы ФЧХ системы, заданная выражением (17), пересекла уровень $-\pi$, что согласно уравнению (6) является необходимым условием существований критической частоты для модели (15), необходимо в структуре этой системы иметь количество форсирующих звеньев, задающих порядок старшей производной в правой части дифференциального уравнения (2), на три единицы меньше количества апериодических звеньев, задающих порядок этого дифференциального уравнения.

Из сказанного выше вытекает, что при заданном порядке m старшей производной в правой части дифференциального уравнения, используемого в качестве математической модели линейной динамической системы с обратной связью, его минимальный порядок $n_{\min}$ в задаче оценки устойчивости этой системы должен задаваться соотношением

$$n_{\min} = m + 3. \tag{22}$$

Описание математической моделью второго порядка разомкнутого контура динамической системы в задаче оценки ее устойчивости после замыкания единичной обратной связью некорректно, поскольку для модели второго порядка понятие критической частоты ω_{cr} не существует вообще, в силу того, что ни при каких

ISSN 0572-2691

условиях для нее не может быть составленным соответствующее уравнение (6). Поэтому модели второго порядка, предложенные в работах [4–9] для описания динамических систем как преобразователей информации, в задачах оценки устойчивости этих динамических систем после их замыкания единичной обратной связью в качестве моделей минимального порядка использоваться не могут.

Замечание 1. Доказательство условия о минимальном порядке дифференциальных уравнений с производными в правой части, используемых в качестве математических моделей линейных динамических систем в задаче оценки их устойчивости при замыкании отрицательной обратной связью, приведено для случая, когда корни многочленов в числителе и знаменателе передаточных функций таких систем являются отрицательными действительными числами. Это доказательство справедливо и для случая, когда вместо каждых двух корней характеристического уравнения, являющихся отрицательными действительными числами, будем рассматривать пару корней, являющихся комплексными сопряженными числами с отрицательными действительными частями, поскольку каждая такая пара комплексных сопряженных корней, как известно из теории автоматического управления [3], задает такую же полосу значений фазовой частотной характеристики в диапазонах $(-\pi, 0]$ и $[0, +\pi)$, как и два корня, являющиеся отрицательными действительными числами.

Замечание 2. Ориентировочные графики ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутого контура линейной динамической системы с ПИД-регулятором, задаваемые математической моделью минимального порядка (3), полученной из уравнения (2) на основании условия (22), будут иметь вид, представленный на рис. 2, который графически подтверждает возможность составления уравнения (6) для определения критической частоты ω_{cr}.

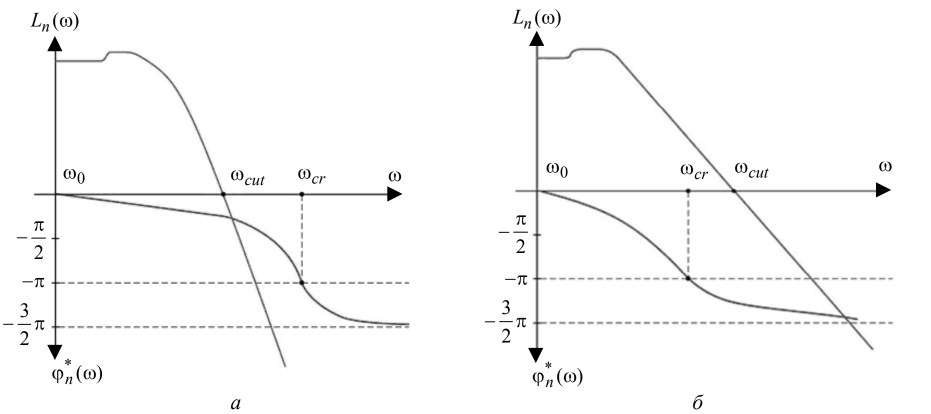

Рис. 2

Идентификация математической модели минимального порядка (3) для линейной динамической системы с ПИД-регулятором

Приступим к идентификации математической модели (3). Эту задачу будем решать с использованием значений ЛАЧХ $L_n(\omega_i), i = 1, 2, ..., N,$ и ЛФЧХ $\varphi_n^*(\omega_i)$, $i = 1, 2, ..., N,$ рассчитанных по экспериментально снятым АЧХ $A_n(\omega_i), i = 1, 2, ..., N,$ и ФЧХ $\varphi_n(\omega_i), i = 1, 2, ..., N,$ разомкнутой динамической системы, математическая модель минимального порядка для которой определяется, из теоретически определенных аналитических выражений для ЛАЧХ $L_5(\omega_i), i = 1, 2, ..., N,$ и ЛФЧХ $\varphi_5^*(\omega_i), i = 1, 2, ..., N,$ с помощью метода, который объединяет в себе условие равенства экспериментальных и теоретически заданных значений ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутого контура динамической системы на частотах ω_0, ω_{cr} в виде

$$L_n(\omega_0) = L_5(\omega_0), \tag{23}$$

$$\varphi_n^*(\omega_{cr}) = \varphi_5^*(\omega_{cr}), \tag{24}$$

с использованием метода наименьших квадратов для других точек ЛАЧХ, т.е. с использованием критерия

$$\Sigma_5 = \sum_{i=1}^{N} (L_n(\omega_i) - L_5(\omega_i))^2, \tag{25}$$

при этом в выражении (25) точки на частотной оси являются точками нарастающей последовательности $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_N, \omega_{cr}\}$.

Таким образом, при решении задачи идентификации математической модели (3) методом, изложенным в работах [1, 2], будем считать заданными множества численных значений в точках $\omega_i, i = 0, 1, 2, ..., N, cr,$ ЛАЧХ $L_n(\omega_i)$ и ЛФЧХ $\varphi_n^*(\omega_i)$ разомкнутого контура линейной динамической системы, о котором известно лишь то, что его математическая модель минимального порядка может быть представлена в виде (3). Напомним, что методика определения этих множеств по данным эксперимента также изложена в работах [1, 2].

В результате решения задачи идентификации станут известными численные значения коэффициентов $a_i, i = \overline{1, 5},$ и b_0, b_1, b_2 математической модели минимального порядка (3).

Решение поставленной задачи начнем с определения аналитических выражений для ЛФЧХ $\varphi_5(\omega)$ и ЛАЧХ $L_5(\omega),$ используя в качестве исходного материала выражение (4) при $n = 5,$ $m = 2.$ После выполнения необходимых преобразований получим

$$\varphi_5(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b_1\omega(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4) - (b_0 - b_2\omega^2)(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5)}{(b_0 - b_2\omega^2)(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4) + b_1\omega(a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5)}, \tag{26}$$

$$L_5(\omega) = 10(\lg((b_0 - b_2\omega^2)^2 + b_1^2\omega^2) - \lg((1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4)^2 + (a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5)^2)). \tag{27}$$

Поскольку принято задавать $\omega_0 <<< 1,$ то из выражения (27) следует, что

$$L_5(\omega_0) \approx 10\lg b_0^2 = 20\lg b_0. \tag{28}$$

Подставляя выражение (28) в уравнение (23) и преобразовывая результат подстановки нужным образом, получаем

$$b_0 = 10^{\frac{L_n(\omega_0)}{20}}. \tag{29}$$

Подставляя ω_{cr} вместо ω в выражение (26), результат этой подстановки — в уравнение (24) и принимая во внимание уравнение (6), получаем уравнение

$$\operatorname{arctg} \frac{b_1\omega_{cr}(1 - a_2\omega_{cr}^2 + a_4\omega_{cr}^4) - (b_0 - b_2\omega_{cr}^2)(a_1\omega_{cr} - a_3\omega_{cr}^3 + a_5\omega_{cr}^5)}{(b_0 - b_2\omega_{cr}^2)(1 - a_2\omega_{cr}^2 + a_4\omega_{cr}^4) + b_1\omega_{cr}(a_1\omega_{cr} - a_3\omega_{cr}^3 + a_5\omega_{cr}^5)} = -\pi, \tag{30}$$

из которого вытекает, что

$$b_1 = \frac{(b_0 - b_2\omega_{cr}^2)(a_1\omega_{cr} - a_3\omega_{cr}^3 + a_5\omega_{cr}^5)}{\omega_{cr}(1 - a_2\omega_{cr}^2 + a_4\omega_{cr}^4)}. \tag{31}$$

Из выражения (29) следует, что для определения численного значения коэффициента b_0 достаточно лишь исходных данных, а из выражения (31) следует, что определить численное значение коэффициента b_1 можем, зная еще и численные значения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_2$. Их и будем определять методом наименьших квадратов, воспользовавшись критерием (25). Для этого после подстановки выражения (27) в выражение (25) возьмем первую частную производную от трансформированного таким образом выражения (25) по каждому из коэффициентов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_2$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Sigma_5}{\partial a_k} = f_k^*(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_0, b_1, b_2),\ k = \overline{1, 5},\\ \frac{\partial \Sigma_5}{\partial b_2} = f_{k+1}^*(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_0, b_1, b_2).\end{gathered} \tag{32}$$

Каждую из полученных функций восьми переменных приравняем нулю и получим шесть уравнений:

$$f_k^*(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_0, b_1, b_2) = 0, k = \overline{1, 5},$$

$$f_{k+1}^*(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_0, b_1, b_2) = 0,$$

решая которые вместе с уравнениями (29) и (31) как систему восьми уравнений с восемью неизвестными, и определим численные значения всех коэффициентов математической модели минимального порядка (3) разомкнутого контура замкнутой линейной динамической системы, которая в общем виде описывается дифференциальным уравнением (2).

Для того чтобы не перегружать статью громоздкими выражениями для частных производных (32), не приводим их в детальном изложении, что целесообразно как в связи с тем, что в работах [1, 2] уже показано, как брать подобного рода производные, так и в связи с тем, что в пакете прикладных программ Matlab имеется для их вычисления стандартная функция.

Заключение

Доказано, что в задаче оценки устойчивости линейной динамической системы при ее замыкании единичной обратной связью для использования математической модели разомкнутого контура в виде дифференциального уравнения с производными в правой части порядка m минимальный порядок этого уравнения необходимо принимать равным $m+3$.

Установлено, что минимальный порядок дифференциального уравнения с первой и второй производными в правой части, используемого в качестве математической модели разомкнутого контура линейной динамической системы с ПИД-регулятором, в задаче оценки ее устойчивости при замыкании единичной обратной связью, должен равняться пяти.

Показано, как трансформируется алгоритм метода идентификации, предложенного авторами в работах [1, 2] для определения параметров математических моделей линейных динамических систем минимального порядка, не содержащих производных в правой части, на задачи оценки устойчивости динамических систем с обратной связью, математические модели которых содержат производные в правой части, обусловленные включением в систему ПИД-регуляторов или корректирующих звеньев.

Б.І. Мокін, І.О. Чернова

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МІНІМАЛЬНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМИЧНОЇ СИСТЕМИ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ

Визначено умови, згідно з якими мінімальний порядок диференціального рівняння з вищою похідною порядку m у правій частині, що використовується як модель лінійної динамічної системи з ПІД-регуляторами і коригуючими ланками, повинен дорівнювати $m+3$. Наведено приклад ідентифікації такої моделі методом, розробленим авторами раніше для моделей, що не містять похідних у правій частині, після його адаптації до нових умов.

B.I. Mokin, I.A. Chernova

DESIGNING MATHEMATICAL MODEL OF MINIMUM ORDER FOR LINEAR DYNAMICAL SYSTEM WITH FEEDBACK

There had been determined the conditions under which the minimum order of a differential equation with the highest m-order derivative on the right side, serving as a model of linear dynamical system with PID controllers and adjusting units, should be equal to $m+3$. There had been given an example of identification of such model by the previously developed authors' method for identifying models containing no derivatives on the right side, after its adapting to new conditions.

1. *Определение* условий и разработка методов описания процессов в сложных динамических объектах эквивалентными моделями не выше третьего порядка / А.Б. Мокин, В.Б. Мокин, Б.И. Мокин, И.А. Чернова // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 2. — С. 37–49.
2. *Determining* the conditions and designing the methods for description of processes in complex dynamic objects by equivalent models not higher than the third-order / A.B. Mokin, V.B. Mokin, B.I. Mokin, I.A. Chernova // Journal of Automation and Information Sciences. — 2016. — **48**, N 3. — P. 83–97.
3. *Макаров И.М., Менский Б.М.* Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). — М. : Машиностроение, 1982. — 505 с.
4. *Ишлинский А.Ю.* Механика гироскопических систем. — М. : Изд-во АН СССР, 1963. — 213 с.
5. *Ишлинский А.Ю.* Инерциальное управление баллистическими ракетами. Некоторые теоретические вопросы. — М. : Наука, 1968. — 143 с.
6. *Волковский А.Ю.* Дискретное управление процессами поддержания климатических условий в животноводческом комплексе // Научный журнал КубГАУ. — 2011. — № 68 (04). — С. 1–16.
7. *Шилин А.Н., Крутякова О.А.* Цифровое моделирование электротехнических и электронных устройств. — М. : Академия естествознания, 2014. — 131 с.
8. *Nakpim W.* Third-order ordinary differential equations equivalent to linear second-order ordinary differential equations via tangent transformations // Journal of Symbolic Computation. — 2016. — **77**. — P. 63–77. — DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2016.01.006.
9. *Seshadev Padhi, Smita Pati.* Theory of third-order differential equations. — New Delhi : Springer, 2014. — 515 p.

Получено 21.06.2016
После доработки 13.10.2016