УДК 517.97

В.Н. Насибзаде

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ

Введение

Обратные задачи естествознания входят в один из новых разделов современной прикладной математики. Обратные задачи для дифференциальных уравнений заключаются в поиске правых частей или коэффициентов рассматриваемых уравнений или краевых условий при наличии дополнительной информации. Такие задачи возникают в областях физики, геофизики, медицины, астрономии, сейсмологии, гидродинамики и т.д. [1–3], поэтому их исследование — актуальная задача прикладной математики. В работе [2] рассмотрена задача об определении граничной функции с граничным условием Неймана для гиперболического уравнения второго порядка достаточно общего вида. При этом предполагается, что при каждой граничной функции из L_2 краевая задача имеет единственное обобщенное решение из W_2^1. В настоящей публикации в задаче определения граничной функции для уравнения колебаний прямоугольной мембраны это условие снимается и, базируясь на известных фактах из работы Лионса и явном выражении для решения рассматриваемой краевой задачи, доказывается, что это решение принадлежит W_2^1. Далее поиск неизвестной граничной функции сводится к задаче минимизации некоторого функционала, построенного с помощью дополнительной информации, получается градиент функционала и выводится необходимое и достаточное условие оптимальности. Кроме того, в заключение приводится алгоритм нахождения оптимального управления с методом проекции градиента, когда множество допустимых управлений состоит из шара в L_2.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения $(u(x_1, x_2, t), \vartheta(x_2, t)) \in W_2^1(Q) \times L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$ из следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2, t), (x_1, x_2, t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi_0(x_1, x_2), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x_1, x_2), \ (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\ell_1} = \vartheta(x_2, t), (x_2, t) \in (0, \ell_2) \times (0, T), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\ell_2} = 0, \ (x_1, t) \in (0, \ell_1) \times (0, T), \tag{4}$$

$$u\Big|_{x_1=0} = a(x_2, t), \ (x_2, t) \in (0, \ell_2) \times (0, T). \tag{5}$$

 ISSN 0572-2691

Здесь $(x_1, x_2, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$ — параллелепипед, $\Omega = \{0 < x_1 < \ell_1, 0 < x_2 < \ell_2\}$ — прямоугольник, $\ell_1 > 0, \ell_2 > 0, T > 0$ — заданные числа, $f \in L_2(Q), \varphi_0 \in W_2^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L_2(\Omega), a \in L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$ — заданные функции. Приведем эту задачу к задаче оптимального управления: требуется найти минимум функционала

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^T \left[u(0, x_2, t; \vartheta) - a(x_2, t)\right]^2 dx_2 dt \tag{6}$$

при ограничениях $(1)-(4)$, где $u(x_1, x_2, t; \vartheta)$ — решение задачи $(1)-(4)$, которое соответствует функции $\vartheta(x_2, t)$. Эту задачу назовем задачей $(1)-(4), (6)$.

Функцию $v(x_2, t)$ назовем управлением. Если найдем управление, которое доставляет функционалу (6) нулевое значение, то дополнительное условие (5) выполняется.

2. Решение задачи (1)–(4)

Рассмотрим обобщенное решение задачи (1)–(4). Под решением краевой задачи (1)–(4) при каждом управлении $\vartheta(x_2, t)$ будем понимать функцию $u = u(x_1, x_2, t; \vartheta)$ из $W_2^1(Q)$, равную $\varphi_0(x_1, x_2)$, при $t = 0$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{gathered}\int_Q \left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 dt - \int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2} \varphi_1(x_1, x_2)\eta(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 - \\ - \int_0^{\ell_2}\int_0^T \vartheta(x_2, t)\eta(\ell_1, x_2, t) dx_2 dt = \int_Q f(x_1, x_2, t)\eta(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 dt\end{gathered} \tag{7}$$

при всех $\eta = \eta(x_1, x_2, t)$ из $W_2^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

С помощью метода Фурье формально решение задачи (1)–(4) представляется в виде

$$\begin{gathered}u(x_1, x_2, t; \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_0^{n,m} \cos\sqrt{\lambda_{n,m}}t + \varphi_1^{n,m} \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}t) W_{n,m}(x_1, x_2) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^t \left(\int_\Omega f(\xi_1, \xi_2, \tau) W_{n,m}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right) \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}(t-\tau) d\tau \times \\ \times W_{n,m}(x_1, x_2) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^t \left(\int_0^{\ell_2} \vartheta(\xi_2, \tau) W_{n,m}(\ell_1, \xi_2) d\xi_2 \right) \sin\sqrt{\lambda_{n,m}}(t-\tau) d\tau \times W_{n,m}(x_1, x_2).\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\lambda_{n,m}$ и $W_{n,m}(x_1, x_2)$ — собственные значения и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции спектральной задачи $-\Delta W = \lambda W, \frac{\partial W}{\partial \nu}\big|_\Gamma = 0$, Γ — граница прямоугольника Ω, ν — нормаль к границе Γ, а $\lambda_{n,m}, W_{n,m}(x_1, x_2), \varphi_0^{n,m}$ и $\varphi_1^{n,m}$ равны:

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\ell_2}\right)^2,\ W_{n,m}(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{\ell_1 \ell_2}} \cos\frac{\pi n}{\ell_1} x_1 \cos\frac{\pi m}{\ell_2} x_2,$$

$$\varphi_0^{n,m} = \int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2} \varphi_0(x_1, x_2) W_{n,m}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,\ \varphi_1^{n,m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2} \varphi_1(x_1, x_2) W_{n,m}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Из результатов работы [4, с. 331] следует, что если $\vartheta \in L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$, то $u \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, т.е. $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \in L_2(Q)$, кроме того, непосредственно из выражения (8) следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q)$. Таким образом, $u \in W_2^1(Q)$. Кроме того, из (8) получается следующая оценка для решения $u = u(x_1, x_2, t; \vartheta)$ задачи (1)–(4):

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \le c[\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|\vartheta\|], \tag{9}$$

здесь и в дальнейшем c обозначает различные, постоянные не зависящие от оцениваемых величин и от управлений.

3. Решение задачи оптимального управления (1)–(4), (6)

Теорема 1. Пусть выполняются вышеналоженные условия на данные задачи (1)–(4), (6). Тогда в задаче оптимального управления (1)–(4), (6)

$$\inf J_0(\vartheta) = 0,\ \vartheta \in L_2((0, \ell) \times (0, T)). \tag{10}$$

Доказательство. Задача (10) эквивалентна задаче о плотности в $L_2((0, \ell_2) \times$ $\times (0, T))$ образа при отображении

$$\vartheta(x_2, t) \to u(0, x_2, t; \vartheta). \tag{11}$$

Для решения этой задачи применим теорему Хана–Банаха. Пусть $\chi(x_2, t)$ заданная функция из $L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$, ортогональна образу $L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$ при отображении (11), т.е.

$$\int_0^{\ell_2}\int_0^T u(0, x_2, t; \vartheta)\ \ \chi(x_2, t) dx_2 dt = 0 \quad \forall \vartheta \in L_2((0, \ell_2) \times (0, T)). \tag{12}$$

Нужно выяснить, при каких условиях $\chi(x_2, t) = 0,\ (x_2, t) \in (0, \ell_2) \times (0, T)$.

Введем функцию $W(x_1, x_2, t)$ из $W_2^1(Q)$ как обобщенное решение задачи:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2},\ (x_1, x_2, t) \in Q, \tag{13}$$

$$W\Big|_{t=T} = 0,\ \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0,\ (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{14}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = \chi(x_2, t), \frac{\partial W}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\ell_1} = 0, \ (x_2, t) \in (0, \ell_2) \times (0, T), \tag{15}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = 0, \frac{\partial W}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\ell_2} = 0, (x_1, t) \in (0, \ell_1) \times (0, T). \tag{16}$$

Пусть прямоугольник $\Pi = \{(x_1, x_2) \in \Omega, t = T\}$, т.е. верхняя крыша параллелепипеда Q — множество единственности [5, с. 199]. Это означает, что из (13), (14) следует, что $W(x_1, x_2, t) = 0$ почти всюду в Q. Это имеет место, например, если Π — квадрат, т.е. $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ и высота H пирамиды с основанием Π и боковыми гранями, составляющими с основанием угол в 45^0, больше T, т.е. $H = \frac{\ell}{2} > T$ или $\ell > 2T$ [6, с.103]. Это следует из того, что волны распространяются вдоль характеристик и отражаются от границ параллелепипеда Q. Тогда из (15) следует, что $\chi(x_2, t) = 0$ почти всюду в $(0, \ell_2) \times (0, T)$.

Таким образом, из (12) получаем, что если управление охватывает пространство $L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$, то наблюдение $u(0, x_2, t; \vartheta)$ — подпространство, плотное в пространстве $L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$ [3, с. 214], иными словами, рассматриваемая система управляема, поэтому выполняется (10).

Теорема доказана.

Отметим, что если образ $L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$ при отображении (11) замкнут в $L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$, то существует такой элемент $\overline{\vartheta} \in L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$, что $J_0(\overline{\vartheta}) = \inf J_0(\vartheta), \vartheta \in L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$.

Теперь вместо задачи (1)–(4), (6) рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_\beta(\vartheta) = J_0(\vartheta) + \frac{\beta}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^T \vartheta^2 dx_2 dt \tag{17}$$

в выпуклом замкнутом множестве V_d из $L_2((0, \ell_2) \times (0, T))$ совместно с решением задачи (1)–(4), где $\beta > 0$ — заданное число. Эту задачу назовем задачей (1)–(4), (17). Тогда из результатов работы [4, с.13] следует, что в задаче (1)–(4), (17) существует единственное оптимальное управление.

4. Дифференцируемость функционала (17) и необходимое и достаточное условие оптимальности

Введем сопряженную задачу к задаче (1)–(4), (17):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, (x_1, x_2, t) \in Q, \tag{18}$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0, (x, x_2) \in \Omega, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = -\left[u(0, x_2, t; \vartheta) - a(x_2, t)\right], \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\ell_1} = 0, (x_2, t) \in (0, \ell_2) \times (0, T), \tag{20}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\ell_2}=0,\ (x_1,t)\in(0,\ell_1)\times(0,T). \quad (21)$$

Под решением краевой задачи (18)–(21) при заданном $\vartheta\in L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$ понимается функция $\psi=\psi(x_1,x_2,t;\vartheta)$ из $W_2^1(Q)$, равная нулю при $t=T$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_Q\left[-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_2}\right]dx_1dx_2dt-\int_\Omega\frac{\partial\psi(x_1,x_2,0)}{\partial t}g(x_1,x_2,0)dx_1dx_2-$$
$$-\int_0^{\ell_2}\int_0^T[u(0,x_2,t;\vartheta)-a(x_2,t)]g(0,x_2,t)dx_2dt=0 \quad (22)$$

при всех $g=g(x_1,x_2,t)\in W_2^1(Q)$.

Отметим, что как для решения задачи (1)–(4), так и для решения задачи (18)–(21) имеет место оценка

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)}\le$$
$$\le c[\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}+\|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}+\|f\|_{L_2(Q)}+\|a\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}+\|\vartheta\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}]. \quad (23)$$

Пусть $\delta\vartheta(x_2,t)\in L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$ — приращение управления $\vartheta(x_2,t)\in V_d$ такое, что $\vartheta+\delta\vartheta\in V_d$. Обозначим $\delta u(x_1,x_2,t)\equiv u(x_1,x_2,t;\vartheta+\delta\vartheta)-u(x_1,x_2,t;\vartheta)$. Следовательно, эта функция является решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи:

$$\frac{\partial^2\delta u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\delta u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\delta u}{\partial x_2^2},\ (x_1,x_2,t)\in Q, \quad (24)$$

$$\delta u|_{t=0}=0,\ \frac{\partial\delta u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\ \frac{\partial\delta u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0}=0,\ \frac{\partial\delta u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\ell_1}=$$
$$=\delta\vartheta(x_2,t),\ (x_2,t)\in(0,\ell_2)\times(0,T), \quad (25)$$

$$\frac{\partial\delta u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=0,\ \frac{\partial\delta u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\ell_2}=0,\ (x_1,t)\in(0,\ell_1)\times(0,T), \quad (26)$$

и аналогично (9) справедлива оценка

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)}\le c\|\delta\vartheta\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}. \quad (27)$$

Обобщенное решение задачи (24)–(27) равно нулю при $t=0$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q\left[-\frac{\partial\delta u}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\delta u}{\partial x_1}\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\frac{\partial\delta u}{\partial x_2}\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\right]dx_1dx_2dt-\int_0^{\ell_2}\int_0^T\delta\vartheta(x_2,t)\eta(\ell_1,x_2,t)dx_2dt=0 \quad (28)$$

при всех $\eta=\eta(x_1,x_2,t)\in W_2^1(Q)$, равных нулю при $t=T$.

Приращение функционала (17) представляется в виде

$$\Delta J_\beta(\vartheta) = J_\beta(\vartheta+\delta\vartheta) - J_\beta(\vartheta) = \int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \left[u(0,x_2,t;\vartheta) - a(x_2,t)\right]\delta u(0,x_2,t)dx_2dt +$$
$$+\beta\int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \vartheta(x_2,t)\delta\vartheta(x_2,t)dx_2dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \left|\delta u(0,x_2,t)\right|^2 dx_2dt + \frac{\beta}{2}\int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \left|\delta\vartheta(x_2,t)\right|^2 dx_2dt. \quad (29)$$

Отсюда и из оценки (27) следует, что функционал $J_\alpha(\vartheta)$ непрерывен по норме пространства $L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$.

Теорема 2. Пусть выполнены предполагаемые условия на данные задачи (1)–(4), (17). Тогда функционал (17) непрерывно дифференцируем по Фреше на $L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$, и его дифференциал и градиент в точке $\vartheta\in V_d$ при приращении $\delta\vartheta\in L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$ определяются выражениями

$$\left\langle J'_\beta(\vartheta), \delta\vartheta\right\rangle_{L_2((0,\ell_2))\times[0,T])} = \int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \left[\psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta) + \beta\vartheta(x_2,t)\right]\delta\vartheta(x_2,t)dx_2dt, \quad (30)$$

$$J'_\beta(\vartheta) = \psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta) + \beta\vartheta(x_2,t). \quad (31)$$

Доказательство. Если в (22) положим $g=\delta u(x_1,x_2,t)$, в (28) — $\eta = \psi(x_1,x_2,t;\vartheta)$ и вычтем полученные соотношения, то будем иметь

$$\int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \left[u(0,x_2,t;\vartheta) - a(x_2,t)\right]\delta u(0,x_2,t)dx_2dt = \int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta)\delta\vartheta(x_2,t)dx_2dt.$$

С учетом этого равенства в (29) получим

$$\Delta J_\beta(\vartheta) = \int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \left[\psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta) + \beta\vartheta(x_2,t)\right]\delta\vartheta(x_2,t)dx_2dt + R, \quad (32)$$

где $R = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \left|\delta u(0,x_2,t)\right|^2 dx_2dt + \frac{\beta}{2}\int\limits_0^{\ell_2}\int\limits_0^T \left|\delta\vartheta(x_2,t)\right|^2 dx_2dt$ — остаточный член. Оценим R. Из оценки (27) и теоремы вложения [7, с. 70] следует, что

$$\left\|\delta u(0,x_2,t)\right\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))} \le c\left\|\delta u\right\|_{W_2^1(Q)} \le c\left\|\delta\vartheta\right\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}.$$

Поэтому из выражения остаточного члена R получаем $R\le c\left\|\delta\vartheta\right\|^2_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}$. Тогда из этого неравенства и из (32) следует, что функционал (17) дифференцируем по Фреше на $L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$ и справедливы формулы (30), (31).

Покажем, что отображение $\vartheta\to J'_\beta(\vartheta)$, определяемое равенством (30), непрерывно действует из V_d в $L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$.

Пусть $\delta\psi = \delta\psi(x_1,x_2,t) = \psi(x_1,x_2,t;\vartheta+\delta\vartheta) - \psi(x_1,x_2,t;\vartheta)$. Из (18)–(21) получаем, что $\delta\psi$ — обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ краевой задачи:

$$\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x_2^2},\ (x_1,x_2,t)\in Q, \quad (33)$$

$$\delta\psi\big|_{t=T}=0,\ \frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\big|_{t=T}=0,\ (x_1,x_2)\in\Omega, \tag{34}$$

$$\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_1}\big|_{x_1=0}=-\delta u(0,x_2,t),\ \frac{\partial\delta\psi}{\partial x_1}\big|_{x_1=\ell_1}=0,\ (x_2,t)\in(0,\ell_2)\times(0,T), \tag{35}$$

$$\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_2}\big|_{x_2=0}=0,\ \frac{\partial\delta\psi}{\partial x_2}\big|_{x_2=\ell_2}=0,\ (x_1,t)\in(0,\ell_1)\times(0,T). \tag{36}$$

Аналогично (23) для решения задачи (33)–(36) справедлива оценка

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(Q)}\le c\|\delta\vartheta\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}. \tag{37}$$

Кроме того, используя формулу (30), нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\|J'_\beta(\vartheta+\delta\vartheta)-J'_\beta(\vartheta)\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}\le c[\|\delta\psi\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}+\|\delta\vartheta\|_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}].$$

В силу (37) правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\|\delta\vartheta\|\to 0$. Отсюда $\vartheta\to J'_\beta(\vartheta)$ — есть непрерывное отображение из V_d в $L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда для оптимальности управления $\vartheta_*(x_2,t)\in V_d$ в задаче (1)–(4), (17) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^{\ell_2}\int_0^T\left[\psi_*(\ell_1,x_2,t)+\beta\vartheta_*(x_2,t)\right](\vartheta(x_2,t)-\vartheta_*(x_2,t))dx_2dt\ge 0 \tag{38}$$

для любого $\vartheta=\vartheta(x_2,t)\in V_d$, где $\psi_*(x_1,x_2,t)=\psi(x_1,x_2,t;\vartheta_*)$ — решение сопряженной задачи (18)–(21) при $\vartheta=\vartheta_*(x_2,t)$.

Доказательство. Множество V_d выпукло в $L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$. Кроме того, функционал (17) непрерывно дифференцируем по Фреше на V_d, и его дифференциал в точке $\vartheta\in V_d$ определяется равенством (30). Тогда в силу теоремы 5 из [8, с. 28] для элемента $\vartheta_*\in V_d$ необходимо и достаточно выполнения неравенства $\left\langle J'_\beta(\vartheta_*),\vartheta-\vartheta_*\right\rangle_{L_2((0,\ell_2)\times(0,T))}\ge 0$ при всех $\vartheta\in V_d$. Отсюда и из (31) следует справедливость неравенства (38).

Теорема доказана.

5. Алгоритм нахождения оптимального управления

Для решения задачи (1)–(4), (17), (39) могут использоваться различные методы оптимизации. Кратко остановимся на методе проекции градиента, предполагая, что множество V_d состоит из управлений $\vartheta\in L_2((0,\ell_2)\times(0,T))$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\ell_2}\int_0^T\vartheta^2(x_2,t)dxdt\le r^2, \tag{39}$$

где r — заданное положительное число.

 ISSN 0572-2691

Метод проекции градиента для задачи (1)–(4), (17), (39) с учетом формулы (31) сведется к построению последовательности $\{\vartheta_k(x_2,t)\}$ по правилу

$$\vartheta_{k+1}(x_2,t)=\begin{cases}\vartheta_k(x_2,t)-\alpha_k(\psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta_k)+\beta\vartheta_k(x_2,t)) & \text{при}\\ \int_0^{\ell_2}\int_0^T\left[\vartheta_k(x_2,t)-\alpha_k(\psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta_k)+\beta\vartheta_k(x_2,t))\right]^2dx_2dt\le r^2, & \\ \dfrac{r\left[\vartheta_k(x_2,t)-\alpha_k(\psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta_k)+\beta\vartheta_k(x_2,t))\right]}{\int_0^{\ell_2}\int_0^T\left[\vartheta_k(x_2,t)-\alpha_k(\psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta_k)+\beta\vartheta_k(x_2,t))\right]^2dx_2dt} & \text{при}\\ \int_0^{\ell_2}\int_0^T\left[\vartheta_k(x_2,t)-\alpha_k(\psi(\ell_1,x_2,t;\vartheta_k)+\beta\vartheta_k(x_2,t))\right]^2dx_2dt> r^2, & \end{cases}$$

где параметр $\alpha_k>0$ выбирается одним из способов, описанных в [8, с. 73].

В.Н. Насібзаде

ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ГРАНИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ МЕМБРАНИ

Розглянуто задачу визначення граничної функції для рівняння коливань прямокутної мембрани. Пошук невідомої граничної функції зводиться до задачі мінімізації функціонала, побудованого за допомогою додаткової інформації, отримано градієнт функціонала, необхідні і достатні умови оптимальності. Наведено алгоритм пошуку оптимального керування методом проекції градієнта.

V.N. Nasibzade

ON DETERMINATION OF EDGE FUNCTION FOR EQUATION OF RECTANGULAR MEMBRANE VIBRATIONS

The problem of determining the edge function, for equation of rectangular membrane librations is considered. The search for unknown edge function is reduced to the problem of functional minimization, constructed by means of additional information the gradient of a functional is obtained, the necessary and sufficient optimality condition is derived. The search algorithm of optimal control, by the method of gradient projections is presented.

1. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. — 457 с.
2. *Зейналлы С.М.* Обратная граничная задача для гиперболического уравнения второго порядка и ее исследование методами оптимизации // Вестник Бакинского университета. Серия физико-математических наук. — 2014. — № 1. — С. 98–105.
3. *Gasimov Y.S.* On a snapedesign problem for one spectral functional // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2013 — **21**, N 5. — P. 629–637.
4. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М. : Мир, 1972. — 416 с.
5. *Латтес Р., Лионс Ж.Л.* Метод квазиобращения и его приложения. — М.: Мир, 1970. — 336 с.
6. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными — М. : Гос. изд.-во физ.-мат. лит., 1953. — 360 с.
7. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. — М. : Наука, 1973. — 407 с.
8. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

Получено 14.02.2017