

УДК 550:531; 681.51

Н.В. Ефименко

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗВОРОТА
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ
РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА**

Введение

В настоящее время спрос на материалы космической съемки в мире неуклонно растет. Это обусловлено бурным развитием вычислительной техники, а также совершенствованием геоинформационных систем, для которых основным источником данных являются материалы космической съемки. В конкурентной гонке разработчиков космических систем к настоящему времени достигнуто разрешение снимков до 1 м и выше.

Для получения высококачественных изображений земной поверхности система управления спутника дистанционного зондирования Земли должна обеспечивать во время съемки высокие точностные и динамические характеристики. Требуемая точность наведения составляет 2–5 угловых минут (′), а погрешность стабилизации осей по угловой скорости, в зависимости от пространственного разрешения, должна быть не хуже 0,001 град/с. Кроме того, при использовании таких аппаратов предъявляются высокие требования к динамическим характеристикам пространственных разворотов во время съемки. Разворот должен происходить из любого текущего положения в заданное. При этом угловые скорости разворота могут достигать 2–3 град/с. Для обеспечения таких высоких динамических характеристик базовый такт системы управления должен быть не более 0,05 с. Это накладывает ограничения и на алгоритмы ориентации, которые, с одной стороны, должны быть очень простыми, чтобы время, затрачиваемое на расчет управляющего воздействия, было минимальным, а с другой стороны, должны обеспечить высокие динамические характеристики, что, как правило, невозможно в классе простых алгоритмов. Решение задачи синтеза алгоритмов переориентации космического аппарата (КА) необходимо искать как решение оптимизационной задачи. Следует отметить, что до настоящего времени нет хорошо проработанного методического обеспечения построения таких алгоритмов.

Данная работа посвящена вопросу решения задачи управления пространственным разворотом КА за минимальное время.

Существует достаточно много работ [1–14], посвященных вопросам построения оптимальных алгоритмов переориентации КА.

© Н.В. ЕФИМЕНКО, 2017

В [1] рассматривается задача оптимального управления пространственной переориентацией КА из произвольного начального углового положения в заданное конечное. Для оптимизации используется функционал пути. На основе метода кватернионов получено аналитическое решение поставленной задачи и даны формализованные уравнения и расчетные выражения для синтеза оптимальной программы разворотов. В [2] исследована задача оптимального управления пространственной переориентацией КА, когда минимизируется время разворота. На основе метода кватернионов получено аналитическое решение поставленной задачи в замкнутом виде и даны расчетные выражения для синтеза оптимальной программы управления. Кинематическая задача переориентации космического аппарата решается до конца. Дается конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота и инерционных характеристик КА. Для динамически симметричного КА представлено решение задачи оптимального управления пространственной переориентацией в аналитическом виде. Приводятся результаты математического моделирования движения КА при оптимальном управлении, подтверждающие практическую реализуемость разработанного алгоритма управления. Использование интеграла энергии в оптимальном управлении пространственной ориентацией космического аппарата рассматривается в [3].

Работа [4] посвящена задаче оптимального управления пространственной переориентацией КА с минимальным значением функционала пути. При использовании метода кватернионов получено аналитическое решение поставленной задачи. Для симметричного показателя оптимальности представлено полное решение задачи переориентации КА в замкнутой форме. Приводятся результаты математического моделирования углового движения КА, демонстрирующие практическую эффективность разработанного алгоритма управления.

В [8–10, 13] авторы строят множество программных траекторий с помощью дважды дифференцируемых функций, что позволяет избежать достаточно традиционных ограничений на класс движений в виде плоского поворота Эйлера или поворотов вокруг главных осей КА. Предлагаемый авторами алгоритм управления переориентацией базируется на концепции обратных задач динамики [11, 12], что позволяет авторам синтезировать алгоритмы управления, обеспечивающие достижение требуемых динамических характеристик систем. В [6] исследуется общий случай задачи пространственной переориентации КА из произвольного начального состояния в заданное конечное. При решении задачи использован подход из [5], суть которого заключается в преобразовании нелинейных уравнений углового движения в разделенную систему из четырех двойных интегрирующих звеньев. Входами этих звеньев являются сигналы, представляющие собой некоторые функции от переменных углового движения. Задача синтеза при этом приводится к линейному виду и решается как задача оптимального управления и выбора оптимальной траектории разворота. Структура линейной системы очень проста, и эти задачи имеют точное решение, которое затем подвергается обратному преобразованию. В [14] для описания углового движения КА используется динамическое уравнение для кватерниона, представляющее собой уравнение движения точки по сфере в пространстве R^4 . Для этой модели углового движения КА получены алгоритмы нелинейного управления кватернионом стабилизации вращательных движений твердого тела, терминальной переориентации твердого тела с применением законов управления с обратной связью. Структура записанных уравнений удобна для исследования задачи управления вращательным движением твердого тела. Приведены эффективные алгоритмы терминального управления вращательным движением твердого тела с использованием программных траекторий движения в виде эрмитовых сплайнов.

В большинстве из перечисленных работ в качестве математической модели углового движения КА выступает модель, в которой динамика описывается уравнением Эйлера, а кинематика — уравнением для кватерниона.

При использовании такой модели для решения задачи оптимального пространственного разворота достаточно легко получить уравнения двухточечной краевой задачи, но найти аналитическое решение этой задачи, которое определяет оптимальное управление, за исключением частных случаев, не представляется возможным. Решение (оптимальное управление) можно найти только с использованием численных методов, что не применимо при реализации алгоритмов оптимального управления на борту КА.

Эти трудности можно обойти, если в качестве модели углового движения КА использовать динамическое уравнение вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона [14, 15, 17]. В [15] на основе динамической модели вращательного движения КА в параметрах Родрига–Гамильтона предложена методика синтеза алгоритмов управления, обеспечивающих переориентацию КА из текущего углового положения в требуемое угловое за фиксированное время. Данная работа является дальнейшим развитием подхода, предложенного в [15]. В ней рассмотрены вопросы синтеза оптимальных по времени алгоритмов пространственной переориентации КА с использованием динамического уравнения вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона.

Математическая модель относительного углового движения КА в параметрах Родрига–Гамильтона

Представим спутник как абсолютно твердое тело. Пусть динамика углового движения КА относительно инерциального базиса I описывается уравнением

$$J\dot{\omega}_B^{BI} + \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} = M_u. \quad (1)$$

Рассмотрим движение базиса B относительно опорного базиса R . Согласно теореме о сложении скоростей для угловой скорости ω_B^{BI} можно записать уравнение

$$\omega_B^{BI} = \omega_B^{BR} + \omega_B^{RI}, \quad (2)$$

где ω_B^{BI} — абсолютная угловая скорость движения базиса B относительно базиса I , ω_B^{BR} — относительная угловая скорость движения базиса B относительно базиса R . Из уравнения (2) имеем

$$\omega_B^{BR} = \omega_B^{BI} - \omega_B^{RI}, \quad (3)$$

при этом для кватерниона Λ_{RB} справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_{RB} &= \frac{1}{2}(\Lambda_{RB} \circ \omega_B^{BI} - \omega_R^{RI} \circ \Lambda_{RB}) = \frac{1}{2}\Lambda_{RB} \circ (\omega_B^{BI} - \tilde{\Lambda}_{RB} \circ \omega_R^{RI} \circ \Lambda_{RB}) = \\ &= \frac{1}{2}\Lambda_{RB} \circ (\omega_B^{BI} - \omega_B^{RI}) = \frac{1}{2}\Lambda_{RB} \circ \omega_B^{BR}. \end{aligned}$$

В векторно-матричной форме это уравнение имеет вид

$$\dot{\Lambda}_{RB} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_B^{BR^T} \\ \omega_B^{BR} & -\Phi(\omega_B^{BR}) \end{bmatrix} \Lambda_{RB}. \quad (4)$$

Продифференцировав выражение (3), с учетом системы уравнений (1) получим уравнение

$$J\dot{\omega}_B^{BR} + \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}) = M_u, \quad (5)$$

описывающее динамику углового движения базиса B относительно базиса R .

Так как кватернион Λ_{RB} нормируемый, для него справедливо соотношение

$$\|\Lambda_{RB}\|^2 = 1. \quad (6)$$

Продифференцировав дважды по времени равенство (6), получим

$$\Lambda_{RB}^T \ddot{\Lambda}_{RB} + \|\dot{\Lambda}_{RB}\|^2 = 0. \quad (7)$$

Разрешив уравнение (7) относительно $\ddot{\Lambda}_{RB}$, найдем динамическое уравнение для вектора Λ_{RB} (динамическое уравнение для кватерниона [14])

$$\ddot{\Lambda}_{RB} = (I_4 - \Lambda_{RB} \cdot \Lambda_{RB}^T) \cdot U - \Lambda_{RB} \cdot \|\dot{\Lambda}_{RB}\|^2. \quad (8)$$

Уравнение (8), так же как и уравнения (4), (5), описывает угловое движение базиса B относительно базиса R . При этом в качестве вектора состояния используется вектор параметров Родрига–Гамильтона (кватернион), определяющий ориентацию КА в опорной системе координат, и его производная. В этом уравнении вектор $U \in R^4$ является вектором управления, т.е. свободной переменной, изменяя которую можно менять характер движения вектора Λ_{RB} . Из уравнения (4) следует, что

$$\omega_B^{BR} = 2A(\Lambda_{RB})\dot{\Lambda}_{RB}, \quad (9)$$

где матрица $A(\Lambda_{RB})$ имеет вид

$$A(\Lambda_{RB}) = [-\lambda_{RB} \quad \lambda_{RB}^0 I_3 - \Phi(\lambda_{RB})]. \quad (10)$$

Для матрицы $A(\Lambda_{RB})$ справедливы соотношения

$$A(\Lambda_{RB}) \cdot A^T(\Lambda_{RB}) = I_3, \quad (11)$$

$$A(\Lambda_{RB}) \cdot \Lambda_{RB} = 0.$$

Продифференцировав выражение (9) с учетом свойств матрицы $A(\Lambda_{RB})$ и уравнения (8), имеем

$$\dot{\omega}_B^{BR} = 2A(\Lambda_{RB})U. \quad (12)$$

Уравнение (12) позволяет установить взаимное соответствие между вектором управления $U \in R^4$ и физически реализуемым управляющим моментом $M_u \in R^3$.

Разрешив уравнение (12) относительно вектора $U \in R^4$, получим

$$U = \frac{1}{2} A^T(\Lambda_{RB}) \dot{\omega}_B^{BR} = \frac{1}{2} A^T(\Lambda_{RB}) J^{-1} \times \\ \times [M_u - \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} - J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})] + \alpha \Lambda_{RB}, \quad (13)$$

где α — произвольный коэффициент. Так как согласно уравнению (8) изменить характер движения вектора Λ_{RB} можно лишь за счет составляющей

$U_{\perp} = (I_4 - \Lambda_{RB} \cdot \Lambda_{RB}^T) \cdot U$, ортогональной вектору Λ_{RB} , то составляющая $U_{\parallel} = \alpha \Lambda_{RB}$, параллельная вектору Λ_{RB} , не влияет на характер движения и ее можно положить равной нулю ($\alpha \equiv 0$). Окончательно имеем

$$U = \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) \dot{\omega}_B^{BR} = \frac{1}{2} A^T (\Lambda_{RB}) J^{-1} [M_u - \omega_B^{BI} \times J \omega_B^{BI} - J (\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI})]. \quad (14)$$

Разрешив уравнение (12) относительно управляющего момента M_u , находим выражение

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB})U + \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}), \quad (15)$$

позволяющее рассчитать по вектору U вектор M_u .

Модель углового движения КА, определяемая уравнениями (4) и (5), представляет собой модель, в которой уравнения динамики записаны в пространстве R^3 , а кинематические уравнения — в пространстве R^4 . Уравнение (8) представляет собой модель углового движения КА, в которой уравнения динамики и кинематики записаны в пространстве R^4 . Матрицу $A(\Lambda_{RB})$, которая входит в выражения (13)–(15), можно рассматривать как оператор отображения четырехмерного пространства в трехмерное пространство: $R^4 \xrightarrow{A} R^3$. Обратное отображение при этом определяется матрицей $A^T(\Lambda_{RB}): R^3 \xrightarrow{A^T} R^4$. При этом отображается и правая часть системы уравнений (1). Так как отображение, определяемое матрицей $A(\Lambda_{RB})$, обратимо, можно синтезировать законы управления, используя модель (8), а затем с помощью обратного отображения вернуться в пространство R^3 и по формуле (15) найти физически реализуемый управляющий момент M_u .

В общем случае уравнение (8) представляет собой уравнение движения точки по единичной сфере в пространстве R^n

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \cdot f - X_0 \cdot \|\dot{X}_0\|^2, \quad X_0 \in R^n. \quad (16)$$

Вектор $f \in R^n$ по аналогии с вектором $U \in R^4$ здесь рассматривается как вектор управления. Для уравнения (16) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть в пространстве R^n задана точка с координатами $X(t)$, движение которой описывается нелинейным дифференциальным уравнением m -го порядка вида

$$X^{(m)} = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, \dots, X^{(m-1)}, \Psi),$$

и вектор $\Psi \in R^n$ является вектором управления. Тогда движение проекции этой точки на единичную сферу в пространстве R^n описывается уравнением

$$\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \cdot f - X_0 \cdot \|\dot{X}_0\|^2,$$

$$f = \frac{\ddot{X}}{\delta} - 2\frac{\dot{\delta}}{\delta}\dot{X}_0 + \alpha X_0,$$

$$\delta^2 = X^T \cdot X,$$

$$\dot{\delta} = X_0^T \cdot \dot{X},$$

где α — произвольная скалярная функция.

Утверждение 2. Пусть на единичной сфере в пространстве R^n задана точка $X_0(t)$, движение которой описывается уравнением $\ddot{X}_0 = (I_n - X_0 \cdot X_0^T) \times f - X_0 \cdot \|\dot{X}_0\|^2$. Обозначим $\Theta = (I_n - X_0 X_0^T) f - X_0 \|\dot{X}_0\|^2$ ускорение движения точки по сфере. Тогда векторы Θ и f связаны соотношением

$$f = \Theta + \alpha \cdot X_0,$$

где α — произвольная скалярная функция.

Геометрическая иллюстрация утверждения 2 показана на рис. 1.

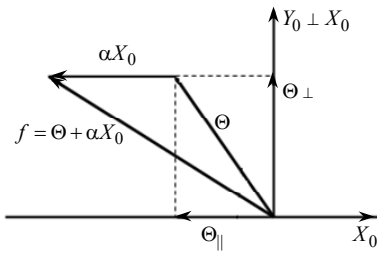


Рис. 1

На рис. 1 приняты следующие обозначения: f — вектор управления (переменная, изменяя которую можно менять характер движения вектора X_0); $\Theta_{\perp} = (I_n - X_0 X_0^T) f$ — ортогональная вектору X_0 составляющая ускорения Θ ; $\Theta_{\parallel} = -X_0 \|\dot{X}_0\|^2$ — коллинеарная вектору X_0 составляющая ускорения Θ ; при этом $\Theta = \Theta_{\perp} + \Theta_{\parallel}$.

Из рис. 1 видно, что независимо от α составляющая ускорения Θ_{\perp} , зависящая от вектора управления f , остается неизменной, т.е. параметр α не влияет на характер движения вектора X_0 . Изменить характер движения вектора X_0 можно лишь путем изменения составляющей ускорения точки Θ_{\perp} , т.е. формированием соответствующего управления f . Доказательства утверждений приведены в [15].

Утверждение 1 позволяет при построении управления f заменить уравнение движения по сфере, где наложено ограничение на координаты, уравнением движения в пространстве R^n без ограничений, которое, как правило, проще уравнения движения точки по сфере. Для модели без ограничений на координаты ищется аналитическое решение задачи оптимального управления. Затем, используя утверждение 1, строится управление f , обеспечивающее заданное движение по сфере.

Утверждение 2 позволяет представить уравнение ошибки управления в виде разделенной системы из n интегрирующих звеньев второго порядка вида

$$\ddot{e}_i = \Delta \Theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

где e_i — i -я координата вектора ошибки управления $E = X_0 - X_0^*$; X_0 — текущее положение вектора X_0 ; X_0^* — требуемое положение вектора X_0 ; $\Delta \Theta = \Theta - \Theta^*$ — ошибка по ускорению; $\ddot{X}_0 = \Theta$ — текущее ускорение; $\ddot{X}_0^* = \Theta^*$ — требуемое ускорение (программное).

Так как уравнение для переменной e_i имеет простой вид, всегда можно найти требуемое управление $\Delta \Theta$. Затем, используя соотношение из утверждения 2

$$f = \Theta + \alpha \cdot X_0$$

и приняв $\alpha \equiv 0$, так как α не влияет на характер движения вектора X_0 , найдем управление $f = \Theta = \Theta^* + \Delta \Theta$.

Следует отметить, что модель вращательного движения твердого тела в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно параметров Родрига–Гамильтона получена в [17]. Однако в этой работе используется подход, при котором правые части динамического уравнения Эйлера выражаются непосредственно через параметры Родрига–Гамильтона, а это приводит к тому, что модель становится очень нелинейной и ее затруднительно использовать для синтеза управления. В работе [15] для получения динамического уравнения в параметрах Родрига–Гамильтона использован подход из работы [14], но при этом предложено отображение правой части динамического уравнения Эйлера в вектор управления $U \in R^4$ и доказаны утверждения 1 и 2, значительно упрощающие синтез управления при использовании динамического уравнения вращательного движения в параметрах Родрига–Гамильтона.

Уравнение (8) является нелинейным, что существенно усложняет процедуру синтеза управления U . Нелинейность уравнения (8) обусловлена тем, что Λ_{RB} представляет собой нормированный кватернион. Для того чтобы избавиться от нелинейности, перейдем к ненормированному кватерниону. Представим кватернион Λ_{RB} в виде

$$\Lambda_{RB}(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}, \quad (17)$$

где $X(t) \in R^4$ — векторное представление некоторого ненормированного кватерниона. Согласно утверждению 1 для вектора $X(t)$ справедливо уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \delta U + 2\dot{\delta}\dot{\Lambda}_{RB} + \alpha\Lambda_{RB}, \\ \delta &= \|X\|. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем обозначение

$$\Psi = \delta U + \dot{\delta}\dot{\Lambda}_{RB} + \alpha\Lambda_{RB}. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) можно представить следующим образом:

$$\ddot{X} = \Psi. \quad (20)$$

Согласно выражению (17) для производной по времени от вектора Λ_{RB} справедливо соотношение

$$\dot{\Lambda}_{RB}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{X(t)}{\|X(t)\|} \right) = (I_4 - \Lambda_{RB}\Lambda_{RB}^T) \frac{\dot{X}(t)}{\|X(t)\|}. \quad (21)$$

С учетом (21) выражение для вектора угловой скорости $\omega_B^{BR}(t)$ можно представить следующим образом:

$$\omega_B^{BR} = 2A(\Lambda_{RB})\dot{\Lambda}_{RB} = \frac{2}{\|X\|^2} A(X) \cdot \dot{X}. \quad (22)$$

Из выражений (17), (20), (22) следует, что, задавая нужным образом управление $\Psi(t)$, можно формировать требуемый характер изменения угловой ориентации и скорости вращения КА.

Таким образом, уравнение (20) можно рассматривать как уравнение программного углового движения КА. Геометрическая интерпретация предложенного способа описания программного движения КА показана на рис. 2.

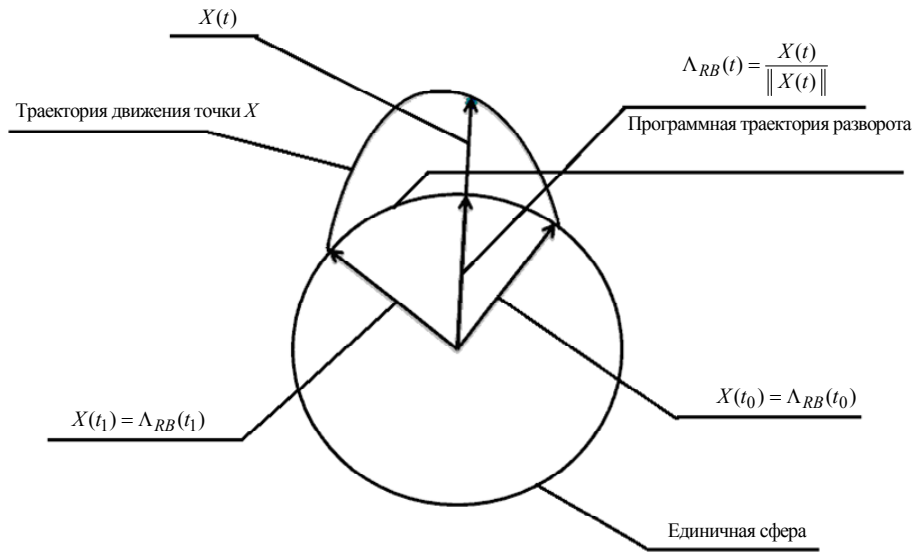


Рис. 2

При описании углового движения КА уравнением (20) следует учитывать следующее.

1. Должны выполняться краевые условия

$$X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0), \quad (23)$$

$$X(t_1) = \Lambda_{RB}(t_1), \quad \dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1). \quad (24)$$

Краевые условия (23), (24) отражают тот факт, что траектория точки $X(t)$ должна исходить из текущего положения КА и заканчиваться в момент времени t_1 в требуемом положении КА. При этом момент времени t_1 может быть как фиксированным, так и свободным.

2. Между векторами состояния систем (20) и (8) не существует взаимного соответствия. Однозначно можно перейти от вектора состояния системы (20) по формулам (17), (21) к вектору состояния системы (8), но обратного однозначного перехода не существует. Орту $\Lambda_{RB}(t)$ вектора $X(t)$ соответствует бесконечное множество векторов $X(t)$, отличающихся друг от друга длиной.

Приведенные выше рассуждения позволяют строить алгоритмы управления, обеспечивающие требуемый разворот КА, по следующей схеме.

Шаг 1. Задание оптимальной программы разворота КА $\Lambda_{RP}(t)$. Оптимальная программа разворота $\Lambda_{RP}(t)$ определяется как орт вектора $X(t)$

$$\Lambda_{RP}(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|},$$

где движение вектора $X(t) \in R^4$ описывается дифференциальным уравнением вида $\dot{X} = \Psi$ и $\Psi \in R^4$ является вектором управления. Вектор $X(t)$ и управление Ψ ищутся, как решение задачи оптимального управления: найти закон

управления $\Psi(t)$, переводящий систему $\ddot{X} = \Psi$ из текущего состояния в момент времени t_0 в требуемое состояние в момент времени t_1 и обеспечивающий минимум некоторому функционалу

$$L(t) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(X, \dot{X}, \Psi) dt.$$

Вид функционала $L(t)$ определяется из динамических требований к режиму разворота. Правая часть дифференциального уравнения для вектора X имеет очень простой вид, поэтому для этого уравнения существуют аналитические решения практически всех задач оптимального управления.

Шаг 2. Нахождение программного управления U^* . В соответствии с утверждением 1 программное управление U^* , обеспечивающее требуемый разворот, рассчитывается по формулам

$$U^* = \frac{\Psi}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{\Lambda}_{RP},$$

$$\dot{\Lambda}_{RB}(t) = (I_4 - \Lambda_{RB} \Lambda_{RB}^T) \frac{\dot{X}(t)}{\delta},$$

$$\delta = \|X\|,$$

$$\dot{\delta} = X_0^T \cdot \dot{X}.$$

Шаг 3. Согласно утверждению 2 формирование обратной связи по состоянию, обеспечивающей устойчивость реального движения относительно программы разворота.

В качестве примера использования динамических уравнений в параметрах Родрига–Гамильтона в задачах управления угловым движением спутника рассмотрим задачу переориентации космического аппарата из текущего углового положения в заданное угловое за минимальное время.

Синтез алгоритма переориентации КА из текущего углового положения в заданное угловое положение за минимальное время

Постановка задачи. Введем в рассмотрение вспомогательный вектор $X(t) \in R^4$ (ненормированный кватернион), движение которого в пространстве R^4 описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{X} = \Psi. \tag{25}$$

Будем полагать, что для вектора X и его производной \dot{X} заданы граничные условия для моментов времени t_0 и t_1 .

$$X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0),$$

$$\dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0),$$

$$X(t_1) = \Lambda_{RB}(t_1),$$

$$\dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1).$$

Определим программную траекторию разворота (кватернион Λ_{RP}) следующим образом:

$$\Lambda_{RP}(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|}. \quad (26)$$

В этом случае согласно утверждению 1 для кватерниона Λ_{RP} справедливо уравнение

$$\ddot{\Lambda}_{RP} = (I_4 - \Lambda_{RB} \cdot \Lambda_{RB}) \cdot \left(\frac{\Psi}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{\Lambda}_{RP} \right) - \Lambda_{RP} \cdot \|\dot{\Lambda}_{RP}\|^2, \quad \delta = \|X\|.$$

При определении траектории разворота уравнением (26) задачу переориентации можно сформулировать следующим образом: найти закон управления $\Psi(t)$, переводящий систему $\ddot{X} = \Psi$ из состояния $X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0)$, $\dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0)$ в момент времени t_0 в состояние $X(t_1) = \Lambda_{RB}(t_1)$, $\dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1)$ в момент времени t_1 и обеспечивающий минимум функционалу $\Delta T_{\min} = \int_{t_0}^{t_1} dt$ при ограничениях

$$\|\Psi(t)\| \leq \psi_0.$$

Решение поставленной задачи. Решение задачи дает утверждение.

Утверждение 3. Пусть заданы система $\ddot{X} = \Psi$, $X \in R^n$ и граничные условия для моментов времени t_0 и t_1 :

$$X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0), \quad \dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0),$$

$$X(t_1) = \Lambda_{RB}(t_1), \quad \dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1).$$

Момент времени t_1 не фиксирован. Будем полагать, что на вектор управления Ψ наложено ограничение

$$\|\Psi\| \leq \psi_0, \quad \psi_0 = \text{const}.$$

Тогда закон управления $\Psi = (\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n)^T$, где

$$\psi_i = -\psi_{0i} \text{sign}(D_i), \quad i = 1, 2 \dots n,$$

$$D_{0i}(t) = \psi_{0i} e_{1i} + |e_{2i}| \left[\frac{1}{2} e_{2i}(t) + x_{2i}(t_1) \right],$$

$$D_i(t) = \psi_{0i} e_{1i} + |e_{2i}| \left[\frac{1}{2} e_{2i}(t) + x_{2i}(t_1) \right],$$

$$e_{1i} = x_i(t) - x_i(t_1),$$

$$e_{2i} = \dot{x}_i(t) - \dot{x}_i(t_1),$$

$$t_{1i} = \begin{cases} t_0 + 2 \left(-\dot{x}_i(t_1) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_0)^2}{\psi_0^2} + \frac{\dot{x}_i(t_1) e_{2i}(t_0)}{\psi_0^2} + \frac{e_{1i}(t_0)}{\psi_0} + \frac{x_i(t_1)^2}{\psi_0^2}} \right) - \frac{e_{2i}(t_0)}{\psi_0}, & D_{0i}(t_0) < 0, \\ t_0 + 2 \left(\dot{x}_i(t_1) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_0)^2}{\psi_0^2} + \frac{\dot{x}_i(t_1) e_{2i}(t_0)}{\psi_0^2} - \frac{e_{1i}(t_0)}{\psi_0} + \frac{\dot{x}_i(t_1)^2}{\psi_0^2}} \right) + \frac{e_{2i}(t_0)}{\psi_0}, & D_{0i}(t_0) > 0, \end{cases}$$

$$T_{\min} = \max(t_{1i}),$$

$$s_1 = \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2\dot{x}_i(t_1)}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] + \sqrt{\left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2\dot{x}_i(t_1)}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right]^2 + \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2}},$$

$$s_2 = \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2\dot{x}_i(t_1)}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] - \sqrt{\left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2\dot{x}_i(t_1)}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right]^2 + \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2}},$$

$$T = t_0 + 2 \left(\dot{x}_i(t_1) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_0)^2}{s_1^2} + \frac{\dot{x}_i(t_1)e_{2i}(t_0)}{s_1^2} - \frac{e_{1i}(t_0)}{s_1} + \frac{\dot{x}_i(t_1)^2}{s_1^2}} \right) - \frac{e_{2i}(t_0)}{s_1},$$

$$\Psi_{0i} = \begin{cases} s_1, & T_{\min} - T = 0, \\ |s_2|, & T_{\min} - T \neq 0, \end{cases}$$

обеспечивает переход точки $X(t)$ из произвольного состояния $X(t_0)$, $\dot{X}(t_0)$ в заданное $X(t_1)$, $\dot{X}(t_1)$ за минимальный промежуток времени

$$\Delta T_{\min} = t_1 - t_0 =$$

$$= \begin{cases} 2 \left(-\dot{x}_i(t_1) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_0)^2}{\Psi_{0i}^2} + \frac{\dot{x}_i(t_1)e_{2i}(t_0)}{\Psi_{0i}^2} + \frac{e_{1i}(t_0)}{\Psi_{0i}} + \frac{\dot{x}_i(t_1)^2}{\Psi_{0i}^2}} \right) - \frac{e_{2i}(t_0)}{\Psi_{0i}}, & D_i(t_0) < 0, \\ 2 \left(\dot{x}_i(t_1) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_1)^2}{\Psi_{0i}^2} + \frac{\dot{x}_i(t_1)e_{2i}(t_0)}{\Psi_{0i}^2} - \frac{e_{1i}(t_0)}{\Psi_{0i}} + \frac{\dot{x}_i(t_1)^2}{\Psi_{0i}^2}} \right) + \frac{e_{2i}(t_0)}{\Psi_{0i}}, & D_i(t_0) > 0. \end{cases}$$

Доказательство утверждения 3 приведено в приложении.

Таким образом, закон управления $U^* \in R^4$, компоненты которого рассчитываются согласно выражениям

$$\ddot{X} = \Psi, \quad X(t_0) = \Lambda_{RB}(t_0),$$

$$\dot{X}(t_0) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_0), \quad X(t_1) = \Lambda_{RB}(t_1),$$

$$\dot{X}(t_1) = \dot{\Lambda}_{RB}(t_1), \quad \Lambda_{RP} = \frac{X(t)}{\delta},$$

$$\dot{\Lambda}_{RP} = (I_4 - \Lambda_{RP}\Lambda_{RP}^T) \frac{\dot{X}(t)}{\delta}, \quad \delta(t) = \|X(t)\|,$$

$$\dot{\delta}(t) = \Lambda_{RP}^T \dot{X}(t), \quad U^* = \frac{\Psi}{\delta} - 2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} \dot{\Lambda}_{RP},$$

а вектор управления Ψ определяется в соответствии с утверждением 3, обеспечивает переориентацию спутника из произвольного текущего состояния в заданное за минимальный промежуток времени.

Управление, построенное таким образом, является программным. При таком управлении реальное угловое положение КА, определяемое кватернионом Λ_{RB} ,

будет отличаться от программного, определяемого кватернионом Λ_{RP} . Это отличие обусловлено наличием возмущающих моментов, действующих на КА. Для компенсации действия возмущающих моментов необходимо добавить стабилизирующее управление в виде обратной связи по состоянию. Для нахождения этого управления рассмотрим уравнение ошибки управления

$$\ddot{E} = \ddot{\Lambda}_{RB} - \ddot{\Lambda}_{RP} = \Theta - \Theta^* = \Delta\Theta, \quad (27)$$

$$\Theta^* = (I_4 - \Lambda_{RP}\Lambda_{RP}^T)U^* - \|\dot{\Lambda}_{RP}\|^2 \Lambda_{RP}.$$

Определим $\Delta\Theta$ следующим образом:

$$\Delta\Theta = -K_1E - K_2\dot{E} = -K_1(\Lambda_{RB} - \Lambda_{RP}) - K_2(\dot{\Lambda}_{RB} - \dot{\Lambda}_{RP}),$$

где

$$K_1 = \text{diag}(k_{i1}), \quad K_2 = \text{diag}(k_{i2}), \quad i=1, 2, \dots, 4.$$

При таком выборе $\Delta\Theta$ система (27) представляет собой разделенную систему из четырех интегрирующих звеньев второго порядка. Для i -го звена ($i=1, 2, 3, 4$) можно записать уравнение

$$\ddot{e}_i = -k_{i1}e_i - k_{i2}\dot{e}_i, \quad (28)$$

а коэффициенты k_{i1} и k_{i2} найти по следующим формулам:

$$k_{i1} = s_{i1} \cdot s_{i2}, \quad k_{i2} = -(s_{i1} + s_{i2}),$$

где s_{i1} и s_{i2} — корни характеристического уравнения системы (28). При этом управление U согласно утверждению 2 будет иметь вид

$$U = -K_1E - K_2\dot{E} + \Theta^*,$$

а момент управления, действующий на КА, в соответствии с выражением (15) можно рассчитать по формуле

$$M_u = 2JA(\Lambda_{RB})U + \omega_B^{BI} \times J\omega_B^{BI} + J(\omega_B^{RI} \times \omega_B^{BR} + \dot{\omega}_B^{RI}).$$

Пример. Для проверки полученных теоретических результатов проведено численное моделирование работы предложенного алгоритма. Моделировался пространственный разворот спутника в орбитальной системе координат (ОСК) на углы $\varphi = 70^\circ$, $\psi = -30^\circ$, $\vartheta = 20^\circ$. Начальные условия при построении ориентации следующие: $\varphi(t_0) = 1^\circ$, $\psi(t_0) = -5^\circ$, $\vartheta(t_0) = 2^\circ$, $\omega_B^{BI} = (0,0 \ -0,005 \ 0,001)$. При моделировании на управляющий момент было наложено ограничение $|m_i| \leq 0,4$ нм, где m_i , $i = 1, 2, 3$, — координаты вектора управления M_u . На рис. 3–5 изображены зависимости от времени углов ориентации, угловых скоростей и управляющих моментов. Как видно из приведенных графиков, параметры углового движения в конце переходного процесса соответствуют требуемому положению КА в орбитальной системе координат. При этом время разворота равно 50,138 с, что совпадает с расчетным значением. Это подтверждает работоспособность разработанных алгоритмов.

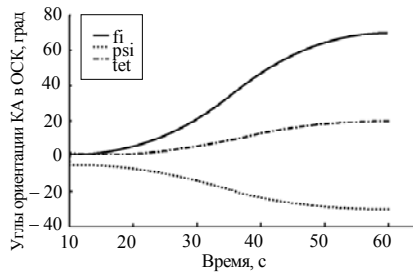


Рис. 3

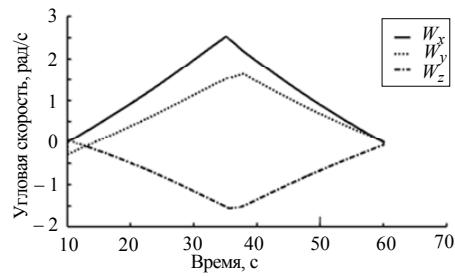


Рис. 4

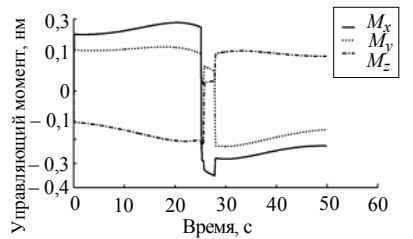


Рис. 5

Заключение

С использованием динамической модели углового движения КА в параметрах Родрига–Гамильтона предложена методика синтеза алгоритмов пространственной перориентации КА за минимальное время. Методика не накладывает никаких ограничений на класс угловых движений КА. Разворот может осуществляться из произвольного текущего состояния в любое требуемое. Методика может быть полезной разработчикам систем ориентации КА.

Приложение

Рассмотрим уравнение

$$\dot{X} = \Psi, \quad X \in R^n. \quad (\text{П1})$$

Уравнение (П1) эквивалентно n независимым уравнениям вида

$$\ddot{x}_i = \psi_i, \quad (\text{П2})$$

где x_i — координаты вектора X . Так как на вектор $\Psi = (\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n)^T$ наложено ограничение $\|\Psi\| \leq \psi_0$, очевидно, что ограничены и координаты этого вектора ψ_i , т.е.

$$|\psi_i| \leq \psi_0. \quad (\text{П3})$$

В пространстве состояний уравнение (П2) можно записать следующим образом:

$$\dot{x}_{1i} = x_{2i}, \quad (\text{П4})$$

$$\dot{x}_{2i} = \psi_i,$$

где $x_{1i} = x_i$, $x_{2i} = \dot{x}_i$. Найдем управление ψ_i , переводящее систему (П4) из текущего состояния в заданное за минимальное время. Для рассматриваемой задачи гамильтониан имеет вид

$$L(x_{1i}, x_{2i}, \psi_i) = 1 + \mu_{1i}x_{2i} + \mu_{2i}\psi_i, \quad (\text{П5})$$

а координаты μ_{1i} и μ_{2i} сопряженного вектора μ_i удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\dot{\mu}_{1i} = 0, \quad (\text{П6})$$

$$\dot{\mu}_{2i} = -\mu_{1i}.$$

Минимум гамильтониана (П5) относительно управления ψ_i обеспечивается при значении

$$\psi_i = -\psi_0 \text{sign } \mu_{2i}(t). \quad (\text{П7})$$

Таким образом, оптимальное управление будет следующим:

$$\psi_i = \begin{cases} \psi_0, & \mu_{2i}(t) < 0, \\ -\psi_0, & \mu_{2i}(t) > 0. \end{cases} \quad (\text{П8})$$

Решение системы (П6) имеет вид

$$\mu_{1i}(t) = \mu_{1i}(t_0), \quad (\text{П9})$$

$$\mu_{2i}(t) = \mu_{2i}(t_0) - \mu_{1i}(t_0)(t - t_0), \quad (\text{П10})$$

где $\mu_{1i}(t_0)$ и $\mu_{2i}(t_0)$ обозначены начальные условия для сопряженного вектора. При этом, как следует из выражения (П10), функция $\mu_{2i}(t)$ изменяет свой знак лишь

один раз в момент времени $t_{si} = t_0 + \frac{\mu_{2i}(t_0)}{\mu_{1i}(t_0)}$, который принято называть моментом

переключения управления. Если бы начальные условия $\mu_{1i}(t_0)$ и $\mu_{2i}(t_0)$ были известны, то задача отыскания оптимального управления была бы решена. Отыскание начальных условий для сопряженного вектора является основной трудностью в общей задаче отыскания управления, обеспечивающего перевод системы из начального состояния в требуемое за минимальное время. Одним из методов решения этой проблемы является метод обращения времени в уравнениях (П4) [16]. При этом интегрирование начинают с вектора конечного состояния и интегрируют в обратном направлении при постоянном управлении до момента переключения t_{si} . Для решения поставленной задачи этим способом запишем систему (П4) в отклонениях от требуемого состояния

$$\dot{e}_{1i} = e_{2i} + x_{2i}(t_{1i}), \quad (\text{П11})$$

$$\dot{e}_{2i} = -\psi_0 \text{sign } \mu_{2i}(t_{1i}),$$

где

$$e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - x_{1i}(t_{1i}), \quad (\text{П12})$$

$$e_{2i}(t) = x_{2i}(t) - x_{2i}(t_{1i}), \quad (\text{П13})$$

причем

$$e_{1i}(t_{1i}) = 0, \quad (\text{П14})$$

$$e_{2i}(t_{1i}) = 0.$$

В зависимости от знака $\mu_{2i}(t_{1i})$, решение системы (П11) на отрезке времени $[t_{1i}, t_{si}]$ будет иметь следующий вид:

при значении $\mu_{2i}(t_{1i}) > 0$

$$\begin{aligned} e_{2i}(t) &= -\psi_0(t - t_{1i}), \\ e_{1i}(t) &= -\frac{\psi_0(t - t_{1i})^2}{2} + x_{2i}(t_{1i})(t - t_{1i}), \end{aligned} \quad (\text{П15})$$

при значении $\mu_{2i}(t_{1i}) < 0$

$$\begin{aligned} e_{2i}(t) &= \psi_0(t - t_{1i}), \\ e_{1i}(t) &= \frac{\psi_0(t - t_{1i})^2}{2} + x_{2i}(t_{1i})(t - t_{1i}). \end{aligned} \quad (\text{П16})$$

На фазовой плоскости $e_{1i}e_{2i}$ уравнения (П15), (П16) определяют линию переключения, на которой происходит смена знака управления ψ_i . Эта линия удовлетворяет уравнению

$$\psi_0 e_{1i} + |e_{2i}| \left[\frac{1}{2} e_{2i}(t) + x_{2i}(t_{1i}) \right] = 0. \quad (\text{П17})$$

При этом оптимальное управление, обеспечивающее переход вектора состояния интегратора второго порядка из произвольного состояния в момент времени t_0 в требуемое в момент времени t_{1i} за минимальный промежуток времени $\Delta T_{\min i} = t_{1i} - t_0$ при ограничении (П3), будет иметь вид

$$\psi_i = -\psi_0 \text{sign}(D_{0i}), \quad (\text{П18})$$

где

$$D_{0i}(t) = \psi_0 e_{1i} + |e_{2i}| \left[\frac{1}{2} e_{2i}(t) + x_{2i}(t_{1i}) \right], \quad (\text{П19})$$

причем

$$\text{sign } \mu_{2i}(t_1) = -\text{sign } D_{0i}(t_0). \quad (\text{П20})$$

Найдем выражение для расчета момента времени t_{1i} , когда система приходит в требуемое состояние. Интегрируя в обратном времени от момента времени t_{1i} до момента t_{si} и от момента t_{si} до момента t_0 , с учетом выражений (П18), (П20) из второго уравнения системы (П11) имеем

$$e_{2i}(t_s) = \begin{cases} -\psi_0(t_{si} - t_1), & D_{0i}(t_0) < 0, \\ \psi_0(t_{si} - t_1), & D_{0i}(t_0) > 0, \end{cases} \quad (\text{П21})$$

$$e_{2i}(t_0) = \begin{cases} e_{2i}(t_{si}) + \psi_0(t_0 - t_{si}), & D_{0i}(t_0) < 0, \\ e_{2i}(t_{si}) - \psi_0(t_0 - t_{si}), & D_{0i}(t_0) > 0. \end{cases} \quad (\text{П22})$$

Разрешив уравнения (П21), (П22) относительно момента времени t_{1i} , получим

$$t_{1i} = \begin{cases} t_0 + 2 \frac{e_{2i}(t_{si})^2}{\psi_0} - \frac{e_{2i}(t_0)}{\psi_0}, & D_{0i}(t_0) < 0, \\ t_0 - 2 \frac{e_{2i}(t_{si})}{\psi_0} + \frac{e_{2i}(t_0)}{\psi_0}, & D_{0i}(t_0) > 0. \end{cases} \quad (\text{П23})$$

Для нахождения значения $e_{2i}(t_{si})$ рассмотрим первое уравнение системы (П11) и запишем его следующим образом:

$$\dot{e}_{1i} = \frac{de_{1i}}{de_{2i}} \dot{e}_{2i} = \frac{de_{1i}}{de_{2i}} \psi_i = e_{2i} + x_{2i}(t_1). \quad (\text{П24})$$

Из соотношения (П24) следует, что

$$\frac{de_{1i}}{de_{2i}} = \frac{1}{\psi_i} [e_{2i} + x_{2i}(t_1)]. \quad (\text{П25})$$

Интегрируя уравнение (П25) на временных интервалах $[t_{1i}, t_{si}]$ и $[t_0, t_{si}]$, получим следующее:

при интегрировании от момента времени t_{1i} до момента времени t_{si}

$$e_{1i}(t_{si}) = \begin{cases} -\frac{1}{\psi_0} \frac{e_{2i}(t_{si})^2}{2} - \frac{1}{\psi_0} x_{2i}(t_{1i}) e_{2i}(t_{si}), & D_{0i}(t_0) < 0, \\ \frac{1}{\psi_0} \frac{e_{2i}(t_{si})^2}{2} + \frac{1}{\psi_0} x_{2i}(t_{1i}) e_{2i}(t_{si}), & D_{0i}(t_0) > 0, \end{cases} \quad (\text{П26})$$

при интегрировании от момента времени t_0 до момента времени t_{si}

$$e_{1i}(t_{si}) = \begin{cases} e_{1i}(t_0) + \frac{1}{\psi_0} \frac{e_{2i}(t_{si})^2 - e_{2i}(t_0)^2}{2} + \frac{1}{\psi_0} x_{2i}(t_{1i}) [e_{2i}(t_{si}) - e_{2i}(t_0)], & D_{0i}(t_0) < 0, \\ e_{1i}(t_0) - \frac{1}{\psi_0} \frac{e_{2i}(t_{si})^2 - e_{2i}(t_0)^2}{2} - \frac{1}{\psi_0} x_{2i}(t_{1i}) [e_{2i}(t_{si}) - e_{2i}(t_0)], & D_{0i}(t_0) > 0. \end{cases} \quad (\text{П27})$$

Из уравнений (П26), (П27) получаем уравнение для определения значения $e_{2i}(t_{si})$

$$\begin{cases} e_{1i}(t_0) + \frac{1}{\psi_0} \frac{e_{2i}(t_{si})^2 - e_{2i}(t_0)^2}{2} + \frac{1}{\psi_0} x_{2i}(t_{1i}) [e_{2i}(t_{si}) - e_{2i}(t_0)] = \\ = -\frac{1}{\psi_0} \frac{e_{2i}(t_{si})^2}{2} - \frac{1}{\psi_0} x_{2i}(t_{1i}) e_{2i}(t_{si}), & D_{0i}(t_0) < 0, \\ e_{1i}(t_0) - \frac{1}{\psi_0} \frac{e_{2i}(t_{si})^2 - e_{2i}(t_0)^2}{2} - \frac{1}{\psi_0} x_{2i}(t_{1i}) [e_{2i}(t_{si}) - e_{2i}(t_0)] = \\ = \frac{1}{\psi_0} \frac{e_{2i}(t_{si})^2}{2} + \frac{1}{\psi_0} x_{2i}(t_{1i}) e_{2i}(t_{si}), & D_{0i}(t_0) > 0. \end{cases} \quad (\text{П28})$$

Разрешив уравнение (П28) относительно переменной $e_{2i}(t_{si})$, получим

$$e_{2i}(t_{si}) = \begin{cases} -x_{2i}(t_{1i}) + \sqrt{\frac{1}{2} e_{2i}(t_0)^2 + x_{2i}(t_{1i}) e_{2i}(t_0) + x_{2i}(t_{1i})^2 - \psi_0 e_{1i}(t_0)}, & D_{0i}(t_0) < 0, \\ -x_{2i}(t_{1i}) - \sqrt{\frac{1}{2} e_{2i}(t_0)^2 + x_{2i}(t_{1i}) e_{2i}(t_0) + x_{2i}(t_{1i})^2 + \psi_0 e_{1i}(t_0)}, & D_{0i}(t_0) > 0. \end{cases} \quad (\text{П29})$$

С учетом выражения (П29) формулу (П23) для расчета момента времени t_{1i} можно записать следующим образом:

$$t_{1i} = \begin{cases} t_0 + 2 \left(-x_{2i}(t_{1i}) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_0)^2}{\psi_0^2} + \frac{x_{2i}(t_{1i}) e_{2i}(t_0)}{\psi_0^2} + \frac{e_{1i}(t_0)}{\psi_0} + \frac{x_{2i}(t_{1i})^2}{\psi_0^2}} \right) - \\ - \frac{e_{2i}(t_0)}{\psi_0}, & D_{0i}(t_0) < 0, \\ t_0 + 2 \left(x_{2i}(t_{1i}) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_0)^2}{\psi_0^2} + \frac{x_{2i}(t_{1i}) e_{2i}(t_0)}{\psi_0^2} - \frac{e_{1i}(t_0)}{\psi_0} + \frac{x_{2i}(t_{1i})^2}{\psi_0^2}} \right) + \\ + \frac{e_{2i}(t_0)}{\psi_0}, & D_{0i}(t_0) > 0. \end{cases} \quad (\text{П30})$$

Формула (П30) справедлива только в том случае, когда на моменты времени t_{1i} не наложено никаких ограничений. В нашем случае для перевода точки $X(t)$ из произвольного состояния $X(t_0)$, $\dot{X}(t_0)$ в заданное $X(t_1)$, $\dot{X}(t_1)$ на времена t_{1i} должно быть наложено ограничение

$$t_{1i} = t_1. \quad (\text{П31})$$

Условие (П31) эквивалентно условию

$$\begin{aligned} e_{1i}(t_1) &= 0, \\ e_{2i}(t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П32})$$

Так как начальные условия для уравнений (П11) в общем случае различны, времена t_{1i} также будут различны. Согласно формуле (П30) времена t_{1i} обратно пропорциональны ограничению ψ_0 . Выбирая параметр ψ_0 индивидуально для каждой системы (П11), можно изменять времена t_{1i} и таким образом выполнять условия (П31). Обозначим ограничение на управление ψ_i как ψ_{0i} . Для нахождения ψ_{0i} поступим следующим образом. Найдем времена t_{1i} при ограничении ψ_0 и выберем из последовательности времен t_{1i} максимальное время. Очевидно, что этот момент времени будет определять минимальное время, когда система (П1) придет в требуемое состояние. Ограничения ψ_{0i} найдем из выполнения условия

$$t_{1i} = T_{\min}, \quad (\text{П33})$$

где

$$T_{\min} = \max(t_{1i}). \quad (\text{П34})$$

В этом случае уравнение для нахождения ограничений ψ_{0i} будет иметь вид

$$T_{\min} = \begin{cases} t_0 + 2 \left[-x_{2i}(t_{1i}) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_0)^2}{\psi_{0i}^2} + \frac{x_{2i}(t_{1i})e_{2i}(t_0)}{\psi_{0i}^2} + \frac{e_{1i}(t_0)}{\psi_{0i}} + \frac{x_{2i}(t_{1i})^2}{\psi_{0i}^2}} \right] - \\ \quad - \frac{e_{2i}(t_0)}{\psi_{0i}}, D_i(t_0) < 0, \\ t_0 + 2 \left[x_{2i}(t_{1i}) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_{1i})^2}{\psi_{0i}^2} + \frac{x_{2i}(t_{1i})e_{2i}(t_0)}{\psi_{0i}^2} - \frac{e_{1i}(t_0)}{\psi_{0i}} + \frac{x_{2i}(t_{1i})^2}{\psi_{0i}^2}} \right] + \\ \quad + \frac{e_{2i}(t_0)}{\psi_{0i}}, D_i(t_0) > 0, \end{cases} \quad (\text{П35})$$

$$D_i(t) = \psi_{0i}e_{1i} + |e_{2i}| \left[\frac{1}{2}e_{2i}(t) + x_{2i}(t_{1i}) \right]. \quad (\text{П36})$$

С помощью несложных преобразований уравнение (П36) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \psi_{0i}^2 + 2 \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] \psi_{0i} - \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2} = 0, D_i(t_0) < 0, \\ \psi_{0i}^2 - 2 \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] \psi_{0i} - \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2} = 0, D_i(t_0) > 0. \end{cases} \quad (\text{П37})$$

Дискриминант квадратного уравнения (П37) больше нуля. В этом случае корни квадратного уравнения всегда действительны. Обозначим корни уравнения (П37) при значении $D_i(t_0) > 0$ как $s_{i,2}^+$, а при значении $D_i(t_0) < 0$ — как $s_{i,2}^-$. Тогда для них, в зависимости от значения $D_{0i}(t_0)$, можно записать выражения

$$s_{i_1}^+ = \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] + \sqrt{\left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right]^2 + \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2}}, \quad D_i(t_0) > 0, \quad (\text{П38})$$

$$s_{i_2}^+ = \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] - \sqrt{\left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right]^2 + \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2}}, \quad D_i(t_0) > 0, \quad (\text{П39})$$

$$s_{i_1}^- = \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] + \sqrt{\left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right]^2 + \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2}}, \quad D_i(t_0) < 0, \quad (\text{П40})$$

$$s_{i_2}^- = \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] - \sqrt{\left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_{1i})}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right]^2 + \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2}}, \quad D_i(t_0) < 0. \quad (\text{П41})$$

При этом

$$\begin{aligned} s_{i_1}^+ &> 0, \quad s_{i_2}^+ < 0, \\ s_{i_1}^- &> 0, \quad s_{i_2}^- < 0, \\ s_{i_1}^+ &= -s_{i_2}^-, \quad s_{i_2}^+ = -s_{i_1}^-. \end{aligned} \quad (\text{П42})$$

Так как ψ_{0i} — величина положительная, то она определяется положительным корнем уравнения (П37). Тогда из соотношений (П42) следует, что

$$\psi_{0i} = \begin{cases} s_{i_1}^+, & D_i(t_0) > 0, \\ s_{i_2}^+, & D_i(t_0) < 0. \end{cases} \quad (\text{П43})$$

Таким образом, требуемое значение ограничения ψ_{0i} можно определить как корень уравнения

$$\psi_{0i}^2 - 2 \left[\frac{e_{2i}(t_0) + 2x_{2i}(t_1)}{T_{\min} - t_0} + \frac{2e_{1i}(t_0)}{(T_{\min} - t_0)^2} \right] \psi_{0i} - \frac{e_{2i}(t_0)^2}{(T_{\min} - t_0)^2} = 0. \quad (\text{П44})$$

В зависимости от знака функции переключения $D_i(t_0)$ это будет или положительный корень ($D_i(t_0) > 0$), или модуль отрицательного корня ($D_i(t_0) < 0$). Так как уравнение линии переключения D_i согласно (П36) зависит от ограничения ψ_{0i} , а ψ_{0i} неизвестно, непосредственно воспользоваться уравнением (П43) невозможно. Для нахождения ψ_{0i} поступим следующим образом. Найдем возможное время прихода вектора состояния системы (П11) в начало координат при значении $\psi_{0i} = s_{i_1}^+$. Если найденное время совпадает со временем T_{\min} , то значение $\psi_{0i} = s_{i_1}^+$ и будет искомым ограничением. В противном случае в качестве ограничения следует выбрать значение $\psi_{0i} = |s_{i_2}^+|$. Таким образом, алгоритм нахождения ограничения ψ_{0i} имеет следующий вид:

$$T = t_0 + 2 \left(x_{2i}(t_{1i}) + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{e_{2i}(t_0)^2}{s_{i_1}^{+2}} + \frac{x_{2i}(t_{1i})e_{2i}(t_0)}{s_{i_1}^{+2}} - \frac{e_{1i}(t_0)}{s_{i_1}^+} + \frac{x_{2i}(t_{1i})^2}{s_{i_1}^{+2}}} \right) - \frac{e_{2i}(t_0)}{s_{i_1}^+}, \quad (\text{П45})$$

$$\psi_{0i} = \begin{cases} s_{i_1}^+, & T_{\min} - T = 0, \\ |s_{i_2}^+|, & T_{\min} - T \neq 0. \end{cases} \quad (\text{П46})$$

Утверждение доказано.

М.В. Єфименко

**СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ЗА ЧАСОМ
ПРОСТОРОВОГО РОЗВОРОТУ КОСМІЧНОГО
АПАРАТА З ВИКОРИСТАННЯМ ДИНАМІЧНОГО
РІВНЯННЯ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО
ТІЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРІГА–ГАМІЛЬТОНА**

Запропоновано алгоритм просторової переорієнтації КА за мінімальний час. На відміну від відомих рішень, запропонований підхід не накладає ніяких обмежень на характер руху КА. Наведено результати чисельного моделювання роботи запропонованого алгоритму.

N.V. Yefymenko

**SYNTHESIS OF TIME-OPTIMAL
THREE-DIMENSIONAL ROTATION
OF SPACECRAFT USING ROTATIONAL
MOTION OF EQUATION OF RIGID BODY
AT RODRIGUES–HAMILTON PARAMETERS**

Algorithm of three-dimension reorientation of spacecraft at minimum time is proposed. Unlike known solutions, the proposed approach does not impose any restrictions on the character spacecraft motion. results of computational modeling of the proposed algorithm are presented.

1. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 2. — С. 7–24.
2. *Левский М.В.* Задача оптимального по быстродействию управления переориентацией космического аппарата // Прикладная математика и механика. — 2009. — 73, вып. 1. — С. 23–38.
3. *Левский М.В.* Управление переориентацией космического аппарата с минимальным интегралом энергии // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 12. — С. 25–42.
4. *Левский М.В.* Некоторые вопросы оптимального по времени управления программным разворотом космического аппарата // Космические исследования. — 2011. — 49, № 6. — С. 538–550.
5. *Dwyer T.A.W. III.* Exact nonlinear control of spacecraft slewing maneuvers with internal momentum transfer // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 1986. — 9, N 2. — P. 240–247.
6. *Ефименко Н.В.* Управление угловой переориентацией космического аппарата посредством маховиков // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 5. — С. 121–128.
7. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 2. — С. 165–176.
8. *Ермошина О.В., Крищенко А.П.* Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики // Там же. — 2000. — № 2. — С. 155–162.
9. *Велицанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Квазиоптимальная переориентация космического аппарата // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2002. — Вып. 32. — С. 144–153.
10. *Велицанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2003. — № 5. — С. 156–163.
11. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели. — М. : Наука, 1987. — 304с.
12. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. — М. : Наука, 1988. — 328с.
13. *Челноков Ю.Н.* Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы // Космические исследования. — 1994. — 32, № 3. — С. 21–32.
14. *Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т.* Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 5–15.
15. *Ефименко Н.В.* Синтез алгоритмов управления пространственной переориентацией космического аппарата с использованием динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 3. — С. 102–115.
16. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. III.* Оптимальное управление системами. — М. : Радио и связь, 1982. — 392 с.
17. *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. — М. : Наука, 1985. — 286 с.

Получено 11.07.2016

После доработки 01.02.2017