УДК 519.8

А.О. Емец

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ ЗАДАЧ ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА СОЧЕТАНИЯХ

Введение

Впервые метод ветвей и границ (МВГ) был предложен в работе [1] для задач дискретной оптимизации, точнее, для целочисленного линейного программирования. Обобщая походы к оптимизации, изложенные в данной публикации, различные исследователи обобщили МВГ и сферу его применения (см., в частности, [2–10]):

— целочисленные и дискретные оптимизационные задачи, в том числе задачи с булевыми переменными, сетевые задачи, задачи теории расписаний [11–17];

— задача нечеткой оптимизации [18–21];

— задачи оптимизации с интервальной неопределенностью [22, 23];

— задачи оптимизации комбинаторного типа [3–8, 24–34].

Из этих задач Ю.Г. Стоян выделил задачи евклидовой комбинаторной оптимизации [35]. Для этих задач исследование МВГ для ряда комбинаторных множеств и некоторых классов функций изложено, в частности, в работах [25–34].

В известной схеме МВГ необходимо конкретизировать правила ветвления и отсечения, решить самую сложную задачу применения метода, существенно влияющую на эффективность, — проблему оценивания допустимых подмножеств. Эти проблемы для задач евклидовой комбинаторной оптимизации, нечеткой, интервальной оптимизации решаются с учетом специфики допустимых множеств и целевых функций (см., в частности, [18–21, 23, 25–34]). Для множества сочетаний оценки получены в случае множества сочетаний с неограниченными повторениями, т.е. когда в k-сочетании может быть k экземпляров любого элемента [32].

В данной статье рассматриваются общие сочетания, где кратность возможного повторения каждого элемента индивидуально заданная.

Постановка задачи

Пусть $S^k_{\eta n}(G)$ — общее множество евклидовых k-сочетаний [36], т.е. k-выборок, в которых элементы упорядочены по неубыванию, где $G=\{g_1,...,g_\eta\}$ — заданное мультимножество, и выполняется

$$g_{1\leq ...\leq}\, g_\eta\,, \tag{1}$$

для основы $S(G)=(e_1, ..., e_n)$ справедливо

$$e_1 < ... < e_n\ , \tag{2}$$

а первичная спецификация $[G]=(\eta_1, ..., \eta_n)$ содержит кратности η_i элементов основы e_i .

Для элементов $x=(x_1, ..., x_k)\in S^k_{\eta n}(G)$ по определению [36] выполняется

$$x_1 \le ... \le x_k\ . \tag{3}$$

Обозначим $J_m = \{1, 2, ..., m\}$, $J_0 = \varnothing$. Рассмотрим задачу

$$C(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \min \tag{4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i\ ,\ \forall i \in J_m = \{1, 2, ..., m\}\ , \tag{5}$$

$$x \in S^k_{\eta n}(G)\ . \tag{6}$$

Как известно [35], задача (4)–(6) — линейная условная полностью комбинаторная задача евклидовой комбинаторной оптимизации на общем множестве сочетаний.

Метод ветвей и границ для задачи (4)–(6)

Метод ветвей и границ требует формулирования и обоснования трех аспектов его схемы:

1) правил ветвления допустимой области;

2) способа оценивания образованных допустимых подмножеств;

3) техник отсечения подмножеств, которые заведомо не содержат оптимального решения.

Ветвление. Разветвлять можно, перебирая возможные значения x_i от x_1 до x_k в порядке (1), следя за выполнением (3) и (5). Обозначим множество $D^{i_1 i_2 \dots i_t} =$ $= \{ x=(g_{i_1}, g_{i_2}, ..., g_{i_t},\ x_{t+1}, ..., x_k\ )\in S^k_{\eta n}(G),\ g_{i_1} \le ... \le g_{i_t} \}$.

Оценивание. Обозначим $C^* = C(x^*)$ минимум функции (4) при условиях (5), (6), а $x^* = \arg\min C(x)$ — минималь функции (4) при этих условиях, $x^* \in$ $\in \arg\min C(x)$ — множество всех минималей функции (4) при условиях (5), (6).

Рассмотрим задачу нахождения

$$C^{**} = \min_{x\in R^k} C(x) \tag{7}$$

при условиях (5) и

$$x \in E^k_{\eta n}(G)\ , \tag{8}$$

где $E^k_{\eta n}(G)$ — общее множество k-размещений [35] из мультимножества $G=\{g_1, ..., g_\eta\}$ с основой $S(G)=(e_1, ..., e_n)$.

Обозначим $x^{**} = \arg\min\limits_{x\in R^k} C(x)$ при условиях (5) и (8).

Легко видеть справедливость такого утверждения: минимум целевой функции $C(x)$ в линейной задаче (4)–(6) полностью комбинаторной оптимизации на евклидовых k-сочетаниях из мультимножества G не меньше минимума этой же функции в линейной задаче (7), (5), (8) полностью комбинаторной оптимизации на k-размещениях с этим же мультимножеством G .

Действительно, как известно, множество $S^k_{\eta n}(G)$ можно рассматривать как подмножество общего множества размещений $E^k_{\eta n}(G)$ [35] при условиях (3). Таким образом, $S^k_{\eta n}(G) \subset E^k_{\eta n}(G)$, условие (5) общее для обеих задач с целевой функцией $C(x)$, т.е.

$$\min_{x \in S^k_{\eta n}(G)} C(x) \ge \min_{x \in E^k_{\eta n}(G)} C(x) \tag{9}$$

при одинаковых дополнительных условиях, в частности (5).

Рассмотрим возможность получения оценки множества $D^{i_1\, i_2\, \dots\, i_t}$. Пусть $\widetilde{C} = (c_{t+1}, c_{t+2}, \dots, c_k)$; образуем разность мультимножеств $\widetilde{G} = G - \{ g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_t} \}$. Упорядочим (пронумеруем) элементы $\widetilde{G} = \{ \widetilde{g}_{j_1}, \dots, \widetilde{g}_{j_s} \}$, где $s = \eta - t$, чтобы выполнялось $\widetilde{g}_{j_1} \le \dots \le \widetilde{g}_{j_s}$.

Для дальнейшего построения k-сочетания при выборе x_{t+1}, …, x_k из $\widetilde{G}$ нужно, чтобы $\widetilde{g}_{i_1} \ge g_{i_t}$, тогда из $\widetilde{G}$ будет использоваться σ элементов, $\sigma \le s = \eta - t$. Если $\widetilde{g}_{j_1} < g_{i_t}$, то по $\widetilde{G}$ строим $\widetilde{\widetilde{G}} = \{ \widetilde{g}_{j_i} \in \widetilde{G},\ \widetilde{g}_{j_i} \ge g_{i_t}\ \ \forall i \in J_s \}$, т.е. $\widetilde{\widetilde{G}} = \{ \widetilde{\widetilde{g}}_{j_1}, \dots, \widetilde{\widetilde{g}}_{j_\sigma} \}$, а нумерация элементов в $\widetilde{\widetilde{G}}$ такая, что $\widetilde{\widetilde{g}}_{j_1} \le \dots \le \widetilde{\widetilde{g}}_{j_\sigma}$; при этом $\widetilde{\widetilde{g}}_{j_1} \ge g_{i_t}$.

Если $\widetilde{\widetilde{G}} = \varnothing$, то $D^{i_1\, i_2\, \dots\, i_t} = \varnothing$. Если $\sigma = k - t$, то $| D^{i_1\, i_2\, \dots\, i_t} | = 1$ и $D^{i_1\, i_2\, \dots\, i_t}$ содержит только одно решение g, тогда в процессе применения МВГ $F(g)$ сравниваем с F_0, и если возможно (т.е. при $F(g) < F_0$), улучшаем F_0. Если $\sigma > k - t$: $| D^{i_1\, i_2\, \dots\, i_t} | > 1$, необходимо оценивание подмножества $D^{i_1\, i_2\, \dots\, i_t}$. Обозначим $r = k - t$. Для этого оценивания необходимо найти $\min\limits_{y \in E^r_{\sigma\nu}(\widetilde{\widetilde{G}})} \sum\limits_{j=1}^{r} \widetilde{c}_j y_j$, где $\nu = |S(\widetilde{\widetilde{G}})|$.

Пронумеруем элементы $\widetilde{C} = \{ \widetilde{c}_{j_1}, \dots, \widetilde{c}_{j_r} \}$, чтобы выполнялось

$$\widetilde{c}_{j_1} \ge \dots \ge \widetilde{c}_{j_q} > \widetilde{c}_{j_{q+1}} = \widetilde{c}_{j_{q+2}} = \dots = \widetilde{c}_{j_p} = 0 > \widetilde{c}_{j_{p+1}} \ge \dots \ge \widetilde{c}_{j_r}.$$

Тогда, как известно [35], $y^* = (y^*_1, \dots, y^*_r) = \underset{y = (y_1, \dots, y_r) \in E^r_{\sigma\nu}(\widetilde{\widetilde{G}})}{\arg\min} \sum\limits_{j=1}^{r} \widetilde{c}_j y_j$ имеет такие координаты:

$$y^*_{j_1} = \widetilde{\widetilde{g}}_{j_1}, \ \dots,\ y^*_{j_q} = \widetilde{\widetilde{g}}_{j_q};$$

$$y^*_{j_r} = \widetilde{\widetilde{g}}_{j_\sigma};\ y^*_{j_{r-1}} = \widetilde{\widetilde{g}}_{j_{\sigma-1}};\ \dots;\ y^*_{j_{p+1}} = \widetilde{\widetilde{g}}_{j_{\sigma-r+p+1}};$$

$y^*_{j_{q+1}}$, …, $y^*_{j_p}$ — произвольные из $\widetilde{\widetilde{G}} - \{ \widetilde{\widetilde{g}}_{j_1}, \widetilde{\widetilde{g}}_{j_2}, \dots, \widetilde{\widetilde{g}}_{j_q}; \widetilde{\widetilde{g}}_{j_\sigma}, \widetilde{\widetilde{g}}_{j_{\sigma-1}}, \dots$ $\dots, \widetilde{\widetilde{g}}_{j_{\sigma-r+p+1}} \}$, такие что $y^*_1 \le \dots \le y^*_r$. А значит, при

$$c^{i_1\, i_2\, \dots\, i_t} = \sum_{j=1}^{r} \widetilde{c}_j y^*_j, \tag{10}$$

$$\nu^{i_1\, i_2\, \dots\, i_t} = \sum_{j=1}^{t} c_j g_{i_j} \tag{11}$$

имеем

$$\xi^{i_1 i_2 \dots i_t} = \nu^{i_1 i_2 \dots i_t} + c^{i_1 i_2 \dots i_t} . \tag{12}$$

Теорема 1. Величина $\xi^{i_1 i_2 \dots i_t}$, вычисляемая по формуле (12), — оценка множества $D^{i_1 i_2 \dots i_t}$ в методе ветвей и границ для задачи (4)–(6).

Доказательство. Как известно, в МВГ в задаче минимизации функции $F(x)$ число ν является оценкой допустимого подмножества Q, если $\forall x \in Q \;\; F(x) \le \nu$.

Для множества $\forall x \in D^{i_1 i_2 \dots i_t}$ $\quad C(x) = \nu^{i_1 i_2 \dots i_t} + \sum\limits_{j=t+1}^{k} c_j x_j$. Оценим $c^* = \min\limits_{x \in S^r_{\sigma\nu}(\tilde{\tilde{G}})} \sum\limits_{j=t+1}^{k} c_j x_j$. По формуле (9) $c^* \ge \min\limits_{y \in E^r_{\sigma\nu}(\tilde{\tilde{G}})} \sum\limits_{j=1}^{r} \tilde{c}_j y_j$, что с учетом (10) дает $c^* \ge c^{i_1 i_2 \dots i_t}$.

Таким образом, $\forall x \in D^{i_1 i_2 \dots i_t}$

$$C(x) \ge \nu^{i_1 i_2 \dots i_t} + \min_{x \in S^r_{\sigma\nu}(\tilde{\tilde{G}})} \sum_{j=t+1}^{k} c_j x_j \ge \nu^{i_1 i_2 \dots i_t} + c^{i_1 i_2 \dots i_t} = \xi^{i_1 i_2 \dots i_t} \tag{13}$$

с учетом (12). Отсюда $\forall x \in D^{i_1 i_2 \dots i_t} \subset S^k_{\eta n}(G)$ — значение целевой функции $C(x) \ge \xi^{i_1 i_2 \dots i_t}$, т.е. $\xi^{i_1 i_2 \dots i_t}$ — оценка множества $D^{i_1 i_2 \dots i_t}$ в МВГ, что и надо было доказать.

Отсечение. Отсечение допустимых множеств происходит при классическом для МВГ условии: $\xi^{i_1 i_2 \dots i_t} \ge F_0$, где F_0 — текущий рекорд минимального значения, или при условии $D^{i_1 i_2 \dots i_t} = \varnothing$ на этапе ветвления. Заметим, что по окончании МВГ будет получено все множество минималей, но если отсекать по строгому неравенству $\xi^{i_1 i_2 \dots i_t} > F_0$, то МВГ дает только одну из минималей (но, возможно, быстрее).

Свойства оценивания и применение МВГ к задаче (4)–(6)

Если при оценивании $D^{i_1 i_2 \dots i_t}$ имеем в целевой функции $C(x)$ вида (4) слагаемое $\sum\limits_{j=t+1}^{k} c_j x_j$, где

$$c_{t+1} \ge c_{t+2} \ge \dots \ge c_\alpha > c_{\alpha+1} = c_{\alpha+2} = \dots = c_\beta = 0 > c_{\beta+1} \ge \dots \ge c_k , \tag{14}$$

то в оценке этого множества (12)

$$c^{i_1 i_2 \dots i_t} = \sum_{l=t+1}^{k} c_l y_l \tag{15}$$

при

$$y_{t+1} = \tilde{\tilde{g}}_{j_1}, \; \dots, \; y_\alpha = \tilde{\tilde{g}}_{j_\alpha}; \; y_k = \tilde{\tilde{g}}_{j_\sigma}; \; y_{k-1} = \tilde{\tilde{g}}_{j_{\sigma-1}}, \; \dots, \; y_{\beta+1} = \tilde{\tilde{g}}_{j_{\sigma-k+\beta+1}} \tag{16}$$

и точка-сочетание из $S^r_{\sigma\nu}(\tilde{\tilde{G}})$ $\quad g = (g_{i_1}, \dots, g_{i_t}, \tilde{\tilde{g}}_{j_1}, \dots, \tilde{\tilde{g}}_{j_\alpha}, \tilde{\tilde{g}}_{j_{\sigma-k+\beta+1}}, \dots, \tilde{\tilde{g}}_{j_\sigma}) \in$ $\in D^{i_1 i_2 \dots i_t}$. Поэтому в других точках $y \in D^{i_1 i_2 \dots i_t}$ имеем $C(y) \ge C(g)$ и разветвлять множество $D^{i_1 i_2 \dots i_t}$ дальше нет смысла. Выделяем из него одноэлементное множество $\{g\}$ и (значение целевой функции на нем) $C(g) = F(g) = \xi^{i_1 i_2 \dots i_t}$, которое сравниваем с F_0, и если $F(g) < F_0$, то обновляем (улучшаем) рекордное значение минимума, т.е. присваиваем $F_0 := F(g)$. Действительно, равенства (16) следуют из теоремы 3.1 из [35] и при выборе другого ветвления, отличного от $\{g\}$,

ISSN 0572-2691

точки которого удовлетворяют условию (3), в x будет большее значение $C(x)$, чем $C(g)$. Таким образом, доказана следующая теорема для оценки подмножества $D^{i_1 i_2 \dots i_t}$ в МВГ.

Теорема 2. Если в функции (4) выполняется условие (14), то при оценивании в МВГ подмножества $D^{i_1 i_2 \dots i_t}$ оно редуцируется до $D^{i_1 i_2 \dots i_t} = \{g\}$ и $|D^{i_1 i_2 \dots i_t}| = 1$, где точка $g = (g_{i_1}, ..., g_{i_t}, \tilde{\tilde{g}}_{j_1}, ..., \tilde{\tilde{g}}_{j_\alpha}, \tilde{\tilde{g}}_{j_{\sigma-k+\beta+1}}, ..., \tilde{\tilde{g}}_{j_\sigma})$ имеет координаты, которые удовлетворяют (16), а $C(g) = \xi^{i_1 i_2 \dots i_t}$ в соответствии с (12), где слагаемые оценки задаются в (11) и (15).

Иллюстративный пример

Применим МВГ к задаче $C(x) = x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min$ на $S^k_{\eta n}(G)$, где $G = \{-1, 0, 1, 2, 2, 5\}$, $k = 4$ ($m = 0$, т.е. условий (5) нет).

Изложим расчеты, иллюстрируя их на рисунке (ξ — оценки (12) подмножеств, $\otimes$ — отсечение подмножества).

Образуем D^1, где $x_1 = -1$, тогда $\tilde{C} = (-1; 2; 5)$; $\tilde{G} = (0, 1, 2, 2, 5)$; $\nu^1 = -1$; $c^1 = \min\limits_{x \in E^3_{5,4}(\tilde{G})} C(x) = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = -3$; $\xi^1 = -1 - 3 = -4$.

Подмножество D^{12}: $\tilde{C} = (-1; 2)$; $\tilde{\tilde{G}} = (1, 2, 2, 5)$. Для него $c^{12} = \min\limits_{x \in E^2_{4,3}(\tilde{G})} C(x) = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = -3$; $\xi^{12} = \nu^{12} + c^{12} = -1 - 3 = -4$.

Рассмотрим D^{123}: $\tilde{\tilde{G}} = (2, 2, 5)$; $\nu^{123} = -1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -2$; $c^{123} = 2 \cdot 2 = 4$; $\xi^{123} = \nu^{123} + c^{123} = -2 + 4 = 2$.

D^{1234}: $\tilde{\tilde{G}} = (2, 5)$; $\xi^{1234} = -2 + 4 = 2 = F_0$; $D^{1234} = x^0 = (-1; 0; 1; 2)$. Для $D^{1236} = x^1 = (-1; 0; 1; 5)$ значение $C(x_1) = F_1 = 8 > F_0$ (здесь можно применить теорему 2).

Образуем D^{124}. Тогда $\nu^{124} = -1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -3$; $c^{124} = 2 \cdot 2 = 4$; $\xi^{124} = -3 + 4 = 1$.

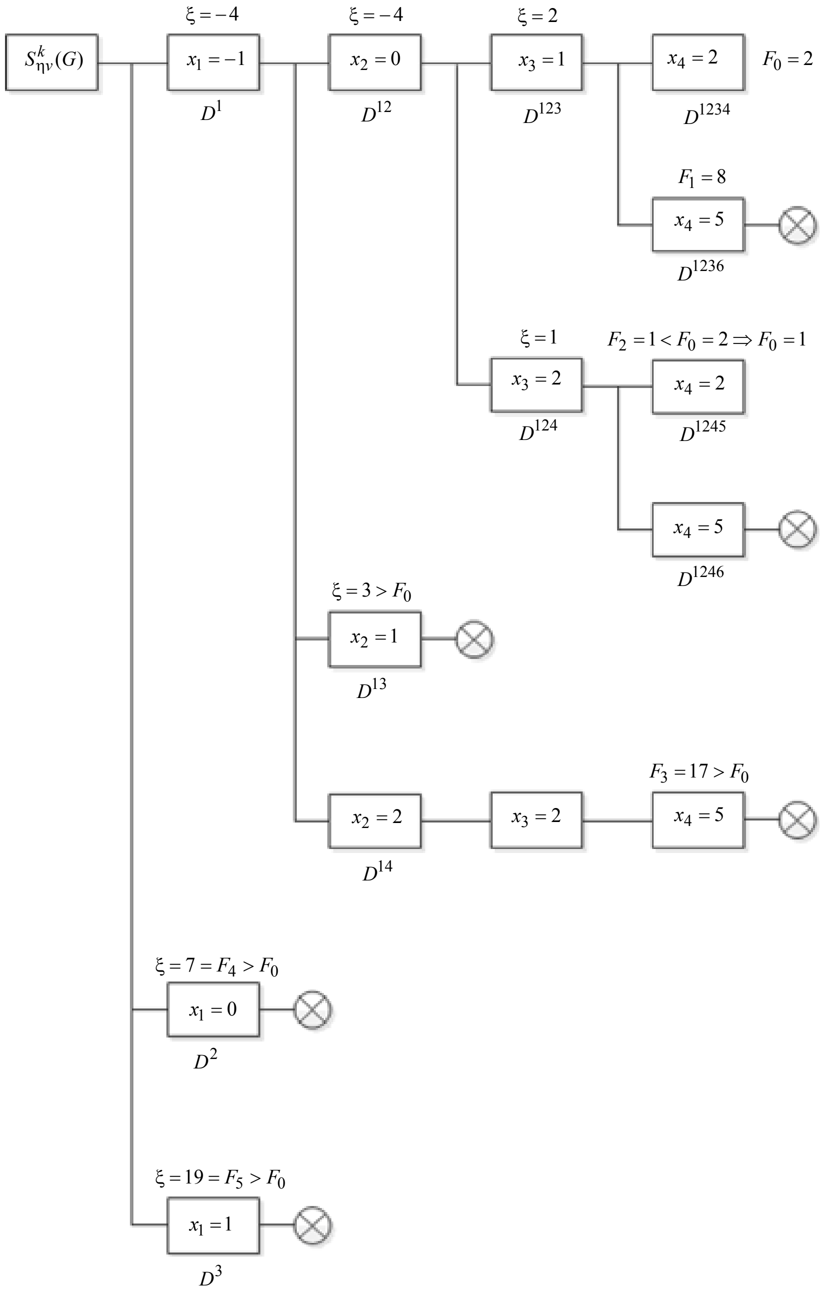
Дальше имеем D^{1245} — одноэлементное. $\xi^{1245} = 1 = F_2 < F_0$, следовательно, $F_0 = 1$ — новое значение рекорда. Оценка для D^{1246} хуже F_0 (по теореме 2).

Для D^{13}: $\nu^{13} = -1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 4$; $\tilde{\tilde{G}} = (2, 2, 5)$, $\tilde{C} = (-1; 2)$, $c^{13} = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = -1$, $\xi^{13} = 4 - 1 = 3 > F_0$. D^{13} отсекаем.

Рассмотрим D^{14}, здесь одноэлементное множество $x_3 = (-1; 2; 2; 5)$; $F_3 = 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 17$. Множество D^{14} с оценкой $\xi^{14} = 3 > F_0$ можно отсечь, не анализируя, сколько в нем элементов. Возвращаемся на уровень вверх: образуем D^2. Здесь $\xi^2 = F_4 = 0 + 5 + (-2) + 4 = 7 > F_0$. Отсекаем D^2.

Дальше: D^3, — $\xi^3 = F_5 = 1 + 10 - 2 + 10 = 19 > F_0$. Отсекаем и это подмножество. Все ветвления окончены. Таким образом, $F_{\min} = 1$ — решение в точке $x_{\min} = (-1; 0; 2; 2)$.

Замечание. Совпадение оценок и значений целевых функций $\xi^{124} = F_2$; $\xi^2 = F_4$; $\xi^3 = F_5$ подтверждает, что в этом примере оценка неулучшаемая, т.е. эффективна.



Заключение

В настоящей работе для линейных задач оптимизации на общем множестве евклидовых сочетаний в методе ветвей и границ предложена и обоснована оценка допустимых множеств и исследованы ее свойства.

В процессе дальнейших исследований целесообразно рассмотреть следующие вопросы: 1) возможно ли улучшения оценок, если учитывать наличие упорядоченности нескольких первых (последних) коэффициентов целевой функции и в случае учета необходимости выполнения условия (3) при подсчете $c^{i_1 i_2 \ldots i_t}$? 2) при всех ли входных данных задачи предложенная оценка неулучшаемая?

 ISSN 0572-2691

О.О. Ємець

МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ ДЛЯ ЗАДАЧ ЕВКЛІДОВОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА СПОЛУЧЕННЯХ

Описано метод гілок та меж для задач евклідової комбінаторної оптимізації з загальними сполученнями, де кратність можливого повторення кожного елемента індивідуально задана. Наведено правила розгалуження, оцінювання і відсікання вершин в методі гілок і меж.

A.O. Yemets'

BRANCH AND BOUND METHOD FOR PROBLEMS OF EUCLIDEAN COMBINATORIAL OPTIMIZATION ON COMBINATIONS

The branch and bound method for problems of Euclidean combinatorial optimization with common combinations, where the multiplicity of possible recurrence of each element is individually specified, is represented. Rules of branching, estimation and nodes cutting in the branch and bound method are presented.

1. *Land A.H., Doig A.G.* An automatic method of solving discrete programming problems / Econometrica. — 1960. — **28**, N 3. — P. 497–520.
2. *Lawler E.L., Wood D.E.* Branch and bound methods. A survey / Operations Research. — 1966. — **14**, N 4. — P. 699–719.
3. *Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. — М. : Наука, 1969. — 368 с.
4. *Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю.* Метод ветвей и границ (обзор теории, алгоритмов, программ и приложений) // Math. Operations for Statist. Ser. Optimization. — 1977. — **20**, N 2. — P. 253–280.
5. *Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю.* Об эффективности комбинаторных методов дискретного программирования // Современное состояние теории исследований операций — М. : Наука, 1979. — С. 283–311.
6. *Леонтьев В.К.* Дискретные экстремальные задачи (обзор) // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теория кибернетики. — 1979. — Вып. 16. — С. 93–101.
7. *Финкельштейн Ю.Ю.* Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. — М. : Наука, 1976. — 264 с.
8. *Ковалев М.М.* Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). — Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1977. — 192 с.
9. *Сергиенко И.В.*, *Лебедева Т.Т.*, *Рощин В.А.* Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. — Киев : Наук. думка, 1980. — 276 с.
10. *Сергиенко И.В.*, *Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — Киев : Наук. думка, 2003. — 263 с.
11. *Balas E.* An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables // Oper. Res. — 1965. — **13**, N 4. — P. 517–546.
12. *Танаев В.С.*, *Шкурба В.В.* Введение в теорию расписаний. — М. : Наука, 1975. — 256 с.
13. *Береснев В.Л.*, *Гимеди Э.Х.*, *Дементьев В.Т.* Экстремальные задачи стандартизации. — Новосибирск : Наука, 1978. — 334 с.
14. *Михалевич В.С.*, *Кукса А.И.* Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов. — М. : Наука, 1983. — 208 с.
15. *Михалевич В.С.*, *Трубин В.А.*, *Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. — М. : Наука, 1986. — 264 с.
16. *Scholz D.* Deterministic global optimization: geometric branch-and-bound methods and their applications. — New York : Springer, 2012. — 142 p.
17. *Tomlin J.* An improved branch-and-bound method for integer programming // Oper. Res. — 1971. — **31**. — P. 1070–1075.

18. *Ємець О.О.*, *Ємець Ол-ра О.* Розв’язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. — Полтава : ПУЕТ, 2011. — 239 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
19. *Yemets` Oleg O.*, *Yemets’ Oleksandra O.* Fuzzy optimization by a branch and bound method / 19^{th} Zittau East-West Fuzzy Colloquium: Conference Proceedings, September 5–7, 2012, Zittau, Germany. — Hochschule Zittau/Gorlitz : Univ. of Appl. Sciences. — 2012. — P. 117–124.
20. *Iemets O.*, *Yemets` O.* A Branch and bound method for optimization problems with fuzzy numbers // Modeling and Simulation: MS'2012: Proc. of the Intern. Conf., 2–4 May 2012, Minsk, Belarus. — Minsk: Publ. Center of BSU, 2012. — P. 62–65.
21. *Емец О.А.*, *Емец А.О., Парфенова Т.А.* Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 2. — С. 55–60.
22. *Breuel T.M.* On the use of interval arithmetic in geometric branch-and-bound algorithms // Pattern Recognition Letters. — 2003. — **24**, N 9–10. — P. 1375–1384.
23. *Сергиенко И.В.*, *Емец О.А.*, *Емец А.О.* Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 5. — С. 38–50.
24. *Brusco M.J.*, *Stahl S.* Branch-and-bound applications in combinatorial data analysis. — New York : Springer Verlag, 2005. — 221 p.
25. *Ємець О.О.*, *Парфьонова Т.О.* Оцінювання допустимих множин розв’язків комбінаторної транспортної задачі на переставленнях, що розв’язується методом гілок та меж // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2010. — № 1. — С. 21–28.
26. *Емец О.А.*, *Парфенова Т.А.* Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 106–112.
27. *Ємець О.О.*, *Ємець Є.М.*, *Парфьонова Т.О.*, *Чілікіна Т.В.* Лінійні умовні задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях та їх розв’язування // Штучний інтелект. — 2011. — № 2. — С.131–136.
28. *Ємець О.О.*, *Парфьонова Т.О.* Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв’язування, узагальнення. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 174 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.
29. *Емец О.А.*, *Емец А.О.* Решение линейной задачи евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях с условием постоянства суммы элементов размещения // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 4. — С. 83–94.
30. *Емец О.А.*, *Емец А.О.* Решение методом ветвей и границ одной задачи минимизации взвешенной длины связующей сети / Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 4. — С. 44–54.
31. *Емец О.А.*, *Емец Е.М.*, *Парфенова Т.А.*, *Чиликина Т.В.* Решение линейных условных полностью комбинаторных оптимизационных задач на перестановках методом ветвей и границ // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 2. — С. 121–138.
32. *Ємець О.О.*, *Парфьонова Т.О.* Оцінювання в методі гілок та меж при оптимізації на евклідовій множині сполучень // Інформатика та системні науки (ІСН–2013): Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 21–23 березня 2013 р.). — Полтава : ПУЕТ, 2013. — С. 106–111. — http://dspace.puet.edu.ua//handle/123456789/1617.
33. *Ємець О.О.*, *Парфьонова Т.О.* Метод гілок та меж для задачі оптимізації на перестановках з сепарабельною цільовою функцією та лінійними обмеженнями // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ–2013): Матеріали III Всеукраїнського наукового семінару (м. Полтава, 30–31 серпня 2013 р.). — Полтава : ПУЕТ, 2013. — С. 40–42. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/1900.
34. *Ємець О.О.*, *Чілікіна Т.В.* Задача комівояжера: нелінійна модель на переставленнях та метод гілок та меж // Вісник Черкаського університету. Сер. Прикладна математика. Інформатика. — 2015. — № 18 (351). — С. 19–27.
35. *Стоян Ю.Г.*, *Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. — 188 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
36. *Ємець О.О.*, *Парфьонова Т.О.* Дискретна математика. Вид. 2-ге, допов. — Полтава : РВВ ПУСКУ, 2009. — 287 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/552.

Получено 03.11.2015
После доработки 02.08.2016