УДК 681.5.013

Ю.И. Дорофеев, Л.М. Любчик

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В СЕТЯХ ПОСТАВОК НА ОСНОВЕ ДЕСКРИПТОРНОГО ОПИСАНИЯ СИСТЕМЫ

Введение

Сеть поставок представляет собой обобщение термина «цепь поставок» [1], который предполагает наличие линейной или древовидной структуры взаимосвязей между объектами, осуществляющими добычу сырья, производство, хранение, транспортировку и распределение материальных ресурсов. В современных многоуровневых системах производства–хранения–распределения ресурсов поставки могут осуществляться между любыми двумя объектами, что и отражено в названии «сеть поставок».

Существует необходимость развития методов управления запасами в сетях поставок для удовлетворения внешнего спроса и минимизации собственных расходов. При этом под стратегией управления запасами понимается структура правил для определения размеров заказов на пополнение запасов и времени их формирования.

С точки зрения управления сетью поставок, целесообразно рассматривать спрос на ресурсы, который поступает на узлы сети из внешней среды, в качестве внешних возмущений. Стратегия управления запасами с заданной моделью спроса обычно строится с помощью метода прогнозирующего управления (Model Predictive Control) [2]. Применение указанного метода к задаче робастного управления запасами рассматривалось в [3]. На практике, как правило, отсутствует информация для построения адекватной модели внешнего спроса, которая необходима для применения прогнозирующего управления. Один из подходов к решению задачи управления запасами в условиях неопределенности спроса — использование концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий [4], при этом соответствующая модель спроса характеризуется интервальной неопределенностью.

Другой источник неопределенности в задачах управления запасами — наличие транспортных запаздываний, вызванных задержками пополнения запасов относительно моментов формирования заказов. Предполагается, что значения интервалов времени для обработки и транспортировки ресурсов между узлами сети известны. Однако в процессе работы сети указанные параметры могут отличаться от номинальных значений. В результате возникает необходимость обеспечения робастности системы управления запасами по отношению к изменениям этих параметров.

В задаче синтеза регулятора для управления запасами необходимо учитывать заданные эксплуатационные ограничения. Как правило, в теории управления ограничения на значения переменных задаются в какой-либо норме, в то время как

 ISSN 0572-2691

спецификой задач управления запасами является неотрицательность значений переменных, что приводит к необходимости учета несимметричных ограничений на значения состояний и управляющих воздействий.

Анализ различных подходов к управлению запасами можно найти в работе [5] и обширной библиографии к ней. Среди многообразия моделей управления запасами выделяют два основных типа: модель критических уровней и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состоянием запасов и размещение заказов фиксированного размера при снижении текущих запасов до некоторых критических уровней. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказов, размер которых определяется в соответствии с выбранной стратегией.

В данной работе рассматривается модель периодической проверки, а задача управления запасами сформулирована как задача подавления влияния неслучайных ограниченных внешних возмущений. Одним из подходов к данной проблематике в теории робастного управления является концепция инвариантных множеств [6], среди которых особо выделяются эллипсоиды вследствие их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова.

Большинство процедур для анализа и синтеза систем управления запасами в последние десятилетия разработано с использованием централизованного подхода, при котором вся информация о текущем состоянии системы поступает на единый регулятор, который формирует управляющие воздействия для всех узлов сети. Однако централизованный подход при синтезе системы управления сложным крупномасштабным объектом характеризуется значительной вычислительной сложностью и необходимостью наличия централизованной системы сбора информации. Поэтому для решения задач управления запасами в сетях поставок более перспективным представляется децентрализованный подход, при котором исходная оптимизационная задача заменяется набором локальных задач меньшей размерности, которые могут решаться параллельно и независимо одна от другой. Однако при этом возникает необходимость обеспечения робастной устойчивости системы в целом с учетом взаимосвязей и ограничений.

Проблема робастной устойчивости в децентрализованной структуре управления рассматривалась в работе [7]. Для получения результатов, приемлемых с точки зрения вычислительной сложности, условия устойчивости сформулированы с использованием техники линейных матричных неравенств (ЛМН) [8]. После того, как были развиты вычислительные методы, основанные на идеях выпуклой оптимизации, и для их реализации разработаны соответствующие алгоритмы и программное обеспечение (см., например, [9]), техника ЛМН используется в качестве общего метода анализа и синтеза динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени. Однако применение указанного подхода приводит к консервативным результатам: границы робастности полученных систем оказываются неоправданно заниженными. Причина этого — минимаксная природа используемого подхода, который рассчитан на реализацию наихудшего возможного варианта неопределенности.

Для уменьшения степени консерватизма результатов управления используется параметризованная функция Ляпунова (Parameter-Dependent Lyapunov Function — PDLF) [10]. Условия устойчивости, полученные на основе PDLF, менее консервативны, чем те, при получении которых использовалась функция Ляпунова, не зависящая от неопределенных параметров модели. В настоящее время подход на основе использования PDLF стал мощным инструментом для анализа и синтеза линейных систем с неопределенностью различного рода. В работе [11] предложено расширение указанного подхода на основе дескрипторного описания системы, которое первоначально было предложено для исследования устойчивости и синтеза управления в системах с запаздыванием.

Дескрипторными называют системы, в которых при построении модели объекта управления вводятся дополнительные переменные состояний, алгебраически связанные с основными переменными. Дескрипторный подход позволяет уменьшить степень консерватизма результатов управления за счет введения ослабляющих переменных состояний. Однако полученные в работе [11] результаты напрямую неприменимы к задаче управления запасами в сетях поставок, поскольку рассматривается модель системы без учета внешних возмущений и ограничений, кроме того, авторы не вводят критерий, позволяющий оценить качество полученного управления.

Таким образом, для повышения эффективности управления сложными сетями поставок актуальна проблема развития методов синтеза робастного ограниченного управления запасами путем расширения метода инвариантных эллипсоидов на основе использования дескрипторного подхода и параметризованной функции Ляпунова в условиях неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и неопределенности интервалов транспортных запаздываний.

Постановка задачи

Модель сети поставок представляют в виде ориентированного графа, вершины которого, соответствующие узлам сети, определяют виды и объемы управляемых запасов, а дуги представляют управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети, а также процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

Для математического описания процесса управления запасами в сети поставок используется дискретная динамическая модель в пространстве состояний. Выбирается период дискретизации по времени и считается, что все временные интервалы, необходимые для выполнения заказов в узлах сети и транспортировки ресурсов между ними, известны и кратны выбранному периоду дискретизации.

Предполагается, что структура сети известна, а уровни запасов доступны для непосредственного измерения. Переменными состояний являются имеющиеся уровни запасов ресурсов отдельных узлов. В качестве управляющих воздействий рассматриваются объемы заявок на поставку ресурсов, которые формируются узлами сети в текущем периоде. Объемы спроса, поступающие на узлы сети поставок извне, — внешние возмущения.

Уравнения модели описывают изменение уровней запасов каждого вида ресурсов с течением времени. Тогда математическая модель процесса управления запасами в сети поставок, которая состоит из n однопродуктовых узлов, описывается разностным уравнением с запаздыванием

$$x(k+1) = x(k) + \sum_{t=0}^{\Lambda} B_t u(k-t) + Ed(k), \tag{1}$$

где $k = 0, 1, \ldots$ — номер дискретного интервала; $x(k) \in \mathrm{R}^n$ — вектор состояний сети; $u(k) \in \mathrm{R}^m$ — вектор управляющих воздействий; $d(k) \in \mathrm{R}^q$ — вектор внешних возмущений; Λ — максимальное значение интервалов транспортных запаздываний в сети; $B_t \in \mathrm{R}^{n \times m}$, $t = \overline{0, \Lambda}$, $E \in \mathrm{R}^{n \times q}$ — матрицы влияния управлений и возмущений соответственно.

Для каждого узла заданы эксплуатационные ограничения в виде максимальных уровней запаса ресурсов и размеров заказов. Тогда в каждый момент времени $k \geq 0$ должны выполняться ограничения

$$x(k) \in X = \{x \in \mathrm{R}^n : 0 \leq x \leq x^{\max}\}, \;\; u(k) \in U = \{u \in \mathrm{R}^m : 0 \leq u \leq u^{\max}\}. \tag{2}$$

Для моделирования неопределенности внешнего спроса используется набор интервалов, в пределах которых компоненты векторной функции $d(k)$, описывающей спрос, принимают значения произвольным образом. Границы интервалов определяются на основании статистики предыдущих продаж. В результате внешние возмущения удовлетворяют ограничениям $d(k) \in D = \{d \in \mathrm{R}^q : 0 \le d^{\min} \le d \le d^{\max}\}$, где векторы $d^{\min}$ и $d^{\max}$, определяющие граничные значения спроса, считаются известными.

Множества X, U, D представляют собой многогранники, которые определяются пересечением конечного числа полупространств, т.е. являются выпуклыми множествами такими, что $0 \notin \mathrm{int}(X)$, $0 \notin \mathrm{int}(U)$, $0 \notin \mathrm{int}(D)$. Векторы $x(k) \in X$, $u(k) \in U$ и $d(k) \in D$, а также множества X, U, D называются допустимыми.

Для преобразования модели (1) к стандартному виду без запаздывания выполняется расширение пространства состояний [12] путем включения в вектор состояний векторов, определяющих размеры заказанных ранее ресурсов, которые находятся в процессе транспортировки. Тогда вектор состояний и уравнения расширенной модели примут вид

$$\begin{gathered} \xi(k) = [x^{\mathrm{T}}(k), u^{\mathrm{T}}(k-1), u^{\mathrm{T}}(k-2), ..., u^{\mathrm{T}}(k-\Lambda)]^{\mathrm{T}}, \\ \xi(k+1) = A\xi(k) + Bu(k) + Gd(k), \;\; x(k) = C\xi(k), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\xi(k) \in \mathrm{R}^N$, $N = n + m\Lambda$, матрицы $A \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $B \in \mathrm{R}^{N\times m}$, $G \in \mathrm{R}^{N\times q}$, $C \in \mathrm{R}^{n\times N}$ имеют соответствующую блочную структуру.

В случае когда интервалы транспортных запаздываний отличаются от номинальных значений, матрица динамики A модели (3) становится параметрически неопределенной и в каждом периоде может принимать какое-либо значение из множества

$$A(\theta) \in \Omega = \left\{ A \in \mathrm{R}^{N\times N} : A = \sum_{i=1}^{L} \theta_i(k) A^{(i)} \right\}, \; \theta(k) \in \Theta = \left\{ \theta \in \mathrm{R}^L : \theta_i(k) \ge 0, \sum_{i=1}^{L} \theta_i(k) = 1 \right\}. \tag{4}$$

Здесь r — количество узлов сети, интервалы запаздывания которых могут варьироваться; $\theta_i(k)$, $i = \overline{1, L}$, — набор параметров, которые описывают неопределенность модели; $A^{(i)} \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $i = \overline{1, L}$, — матрицы, определяющие вершины выпуклого множества Ω. В каждом периоде матрица $A(\theta)$ принимает какое-либо значение из возможных вариантов ее реализации, следовательно, только одно из чисел $\theta_i(k)$ принимает значение 1, а остальные равны 0, причем последовательность изменения значений неизвестна. Тогда получаем семейство моделей, которое определяется множеством наборов матриц $\{(A^{(1)}, B, G, C), (A^{(2)}, B, G, C), ...$ $..., (A^{(L)}, B, G, C)\}$. Таким образом, расширенная модель сети поставок в условиях неопределенности интервалов транспортных запаздываний описывается моделью с параметрической неопределенностью аффинного типа:

$$\begin{gathered} \xi(k+1) = A(\theta)\xi(k) + Bu(k) + Gd(k), \\ x(k) = C\xi(k), \;\; A(\theta) \in \Omega = \mathrm{Conv}\{A^{(1)}, ..., A^{(L)}\}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\mathrm{Conv}\{\cdot\}$ — выпуклая оболочка.

Критерий качества в случае бесконечного временного горизонта выбран в виде

$$J_\infty(k) = \sum_{t=k}^{\infty} \beta^t ((\xi(t) - \xi^*)^{\mathrm{T}} W_\xi (\xi(t) - \xi^*) + u^{\mathrm{T}}(t) W_u u(t)), \tag{6}$$

где $W_\xi \in \mathrm{R}^{N \times N}$, $W_u \in \mathrm{R}^{m \times m}$ — положительно-определенные диагональные весовые матрицы; $0 < \beta < 1$ — коэффициент дисконтирования; $\xi^* = [x^{*\mathrm{T}}, ..., x^{*\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ — вектор, который состоит из $\Lambda + 1$ векторов x^*, компоненты которого определяют размеры страховых запасов ресурсов в узлах сети и вычисляются с помощью продуктивной модели Леонтьева на основе верхних граничных значений внешнего спроса с учетом запаздываний:

$$x^* = (I_n - \Pi)^{-1} \tilde{d}, \quad \tilde{d}_i = \begin{cases} \Lambda_i d_i^{\max}, & i = \overline{1, q}, \\ 0, & i = \overline{q+1, n}, \end{cases} \tag{7}$$

где I_n — единичная матрица размерности n; $\Pi \in \mathrm{R}^{n \times n}$ — технологическая матрица, значения элементов $[\Pi]_{ij}$ которой равны количеству единиц ресурса i, необходимых для производства единицы ресурса j. Необходимое и достаточное условие продуктивности матрицы Π: число Фробениуса матрицы (максимальное собственное значение) должно быть меньше 1 [13].

Первое слагаемое в выражении (6) определяет размеры штрафов за отклонение текущих уровней запасов ресурсов от страховых, второе — стоимость производства и транспортировки ресурсов.

Для системы (5) с параметрической неопределенностью (4) необходимо решить задачу синтеза робастного управления запасами, которое для любого допустимого спроса $d(k) \in D$ $\forall k \geq 0$ и $\forall A(\theta) \in \Omega$ обеспечивает:

1) полное и своевременное удовлетворение спроса на ресурсы, т.е. выполнение первого из ограничений (2) на значения состояний;

2) робастную устойчивость замкнутой системы при выполнении второго из ограничений (2) на значения управляющих воздействий;

3) гарантированную стоимость управления, которая означает, что значение критерия качества (6) не превысит некоторого граничного значения.

В качестве дополнительного условия выдвигается требование снижения степени влияния вектора неопределенных параметров $\theta(k)$ на результаты управления.

Синтез централизованного робастного ограниченного управления запасами

Необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи синтеза управления запасами в сети поставок являются: 1) управляемость всех пар матриц $(A^{(j)}, B)$, $j = \overline{1, L}$; 2) условие достаточности ресурсов управления (см. [12]).

Традиционное средство защиты от неопределенности спроса — создание страховых запасов. Закон управления строится в виде линейной динамической обратной связи по сигналу рассогласования между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов

$$u(k) = K(k)(\xi(k) - \xi^*), \tag{8}$$

где $K(k) \in \mathrm{R}^{m \times N}$ — нестационарная матрица коэффициентов обратной связи. Расширенная модель замкнутой системы для управления (8) имеет вид

$$\begin{gathered} \xi(k+1) = A_f(\theta, k)(\xi(k) - \xi^*) + A(\theta)\xi^* + Gd(k), \\ x(k) = C\xi(k), \quad A_f(\theta, k) = A(\theta) + BK(k), \quad A(\theta) \in \Omega. \end{gathered} \tag{9}$$

Задача отыскания управления, минимизирующего квадратичный критерий качества, является одной из основных в теории управления. Для ее решения в «неробастной» постановке используется метод, основанный на решении алгебраического уравнения Риккати. В данной работе для решения задачи в условиях неопределенности применяется метод инвариантных эллипсоидов.

Эллипсоид, описываемый уравнением

$$E(\xi^*, Q(k)) = \{\xi \in \mathrm{R}^N : (\xi(k) - \xi^*)^{\mathrm{T}} Q^{-1}(k)(\xi(k) - \xi^*) \le 1\}, \qquad (10)$$

где $Q(k) \in \mathrm{R}^{N \times N}$ — матрица эллипсоида, называется инвариантным по состоянию для системы (9), если любая траектория системы, начавшись в эллипсоиде, остается в нем для любого момента времени $k \ge 0$.

Инвариантные эллипсоиды (10) рассматриваются в качестве аппроксимации множества достижимости замкнутой системы, т.е. позволяют характеризовать влияние внешних возмущений и неопределенности параметров модели на траекторию замкнутой системы.

Воспользуемся подходом, который основан на достаточных условиях устойчивости и заключается в построении функции Ляпунова для неопределенной системы. Определим параметризованную квадратичную функцию Ляпунова в виде

$$V(\xi(k) - \xi^*) = (\xi(k) - \xi^*)^{\mathrm{T}} P(\theta, k)(\xi(k) - \xi^*), \;\; P(\theta, k) = P^{\mathrm{T}}(\theta, k) \succ 0, \qquad (11)$$

где $P(\theta, k) \in \mathrm{R}^{N \times N}$ — нестационарная симметрическая матрица, которая зависит от вектора $\theta(k)$ неопределенных параметров модели; $M \succ 0$ ($M \succeq 0$) определяет положительно-определенную (полуопределенную) матрицу M.

Отметим, что функция Ляпунова (11) строится с использованием не вектора состояний замкнутой системы (9), а вектора невязки между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов.

Сравнение выражений (10) и (11) позволяет утверждать, что при выполнении равенства $P(\theta, k) = Q^{-1}(k)$ инвариантный эллипсоид (10) представляет множество, которое находится внутри поверхности уровня введенной функции Ляпунова. Таким образом, задача робастной стабилизации заключается в построении регулятора, который обеспечивает минимизацию по некоторому критерию инвариантного эллипсоида при заданных ограничениях. В качестве критерия выбрана сумма квадратов полуосей эллипсоида, т.е. след его матрицы $Q(k)$.

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (11) и потребуем, чтобы значение функции с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью, которая определяется значением показателя качества (6):

$$V(\xi(k+1) - \xi^*) - V(\xi(k) - \xi^*) \le -((\xi(k) - \xi^*)^{\mathrm{T}} W_\xi (\xi(k) - \xi^*) + u^{\mathrm{T}}(k) W_u u(k)). \qquad (12)$$

Просуммировав по k от 0 до ∞ левые и правые части неравенства типа Ляпунова (12), получим оценку $\max\limits_{d(k) \in D,\, A(\theta) \in \Omega} J_\infty(k) \le V(\xi(0) - \xi^*)$. Тогда управляющие воздействия необходимо искать из условия минимизации функции Ляпунова

$$u(k) = \arg \min_{u(k) \in U} V(\xi(0) - \xi^*).$$

В итоге, решая задачу минимизации инвариантного эллипсоида замкнутой системы по критерию следа матрицы при ограничении, задаваемом неравенством типа Ляпунова (12), приходим к регулятору, который обеспечивает минимизацию верхнего граничного значения показателя качества (6) при любом варианте реализации неопределенности, а также робастную устойчивость замкнутой системы. Такой подход позволяет свести задачу синтеза ограниченного робастного управления запасами к решению задачи минимизации линейной функции при ограничениях, которые могут быть представлены в виде линейных матричных неравенств, т.е. к решению задачи полуопределенного программирования.

Для применения метода инвариантных эллипсоидов выполняется аппроксимация допустимого множества значений внешнего спроса D эллипсоидом наименьшего объема

$$E(d^*,\, Q_d) = \{d \in \mathrm{R}^q : (d(k) - d^*)^{\mathrm{T}} Q_d^{-1}(d(k) - d^*) \le 1\}, \tag{13}$$

параметры которого $Q_d \in \mathrm{R}^{q\times q}$ и $d^* \in \mathrm{R}^q$ определяются в соответствии с выражениями

$$Q_d = \hat{W}^{-2}, \;\; d^* = \hat{W}^{-1}\hat{z}, \tag{14}$$

где $\hat{W}$, $\hat{z}$ — решение задачи полуопределенного программирования $-\lg\det W \to \min$ при ограничениях на матричную $W = W^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{q\times q}$ и векторную $z \in \mathrm{R}^q$ переменные:

$$W \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (Wd_i - z)^{\mathrm{T}} \\ Wd_i - z & I_q \end{bmatrix} \succeq 0, \;\; i = \overline{1, 2^q},$$

$d_i \in \mathrm{R}^q$ — векторы, содержащие координаты вершин многогранника D. Также выполняется аппроксимация допустимого множества X значений состояний исходной модели (1) эллипсоидом наименьшего объема

$$E(x^*,\, Q_x) = \{x \in \mathrm{R}^n : (x(k) - x^*)^{\mathrm{T}} Q_x^{-1}(x(k) - x^*) \le 1\}, \tag{15}$$

у которого вектор координат центра совпадает с вектором страховых запасов x^*, а матрица вычисляется в результате решения задачи полуопределенного программирования $\operatorname{tr} Q_x \to \min$ при ограничениях на матричную переменную $Q_x = Q_x^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n\times n}$:

$$Q_x \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (x_i - x^*)^{\mathrm{T}} \\ x_i - x^* & Q_x \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, 2^n},$$

где $x_i \in \mathrm{R}^n$ — векторы, содержащие координаты вершин многогранника X.

Введем переменную $y(k) = \xi(k+1)$ и выполним преобразование расширенной модели сети поставок с помощью дескрипторной системы вида

$$\begin{bmatrix} I_N & O_{N\times N} \\ O_{N\times N} & O_{N\times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{N\times N} & I_N \\ A(\theta) & -I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_{N\times m} \\ B \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} O_{N\times q} \\ G \end{bmatrix} d(k), \tag{16}$$

где $O_{n\times m}$ — нулевая матрица соответствующей размерности.

После введения обозначений $E = \begin{bmatrix} I_N & O_{N\times N} \\ O_{N\times N} & O_{N\times N} \end{bmatrix}$, $\overline{A}(\theta) = \begin{bmatrix} O_{N\times N} & I_N \\ A(\theta) & -I_N \end{bmatrix}$, $\widetilde{A}(\theta) = \begin{bmatrix} O_{N\times N} \\ A(\theta) - I_N \end{bmatrix}$, $\overline{B} = \begin{bmatrix} O_{N\times m} \\ B \end{bmatrix}$, $\overline{G} = \begin{bmatrix} O_{N\times q} \\ G \end{bmatrix}$, $\overline{\xi}(k) = \begin{bmatrix} \xi(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$, $\overline{\xi}^* = \begin{bmatrix} \xi^* \\ \xi^* \end{bmatrix}$ и блочной матрицы $P(\theta, k) = \begin{bmatrix} P_1(\theta, k) & O_{N\times N} \\ P_2(k) & P_3(k) \end{bmatrix}$, где $P_i \in \mathrm{R}^{N\times N}$, $i = \overline{1, 3}$, $P_1(\theta, k) = P_1^{\mathrm{T}}(\theta, k) =$

$= \sum_{i=1}^{L} \theta_i P_{1i}(k),\ P_{1i}(k) \succ 0, \quad P_3(k) = P_3^{\mathrm{T}}(k),$ параметризованная функция Ляпунова, которая построена на решениях системы (16), замкнутой управлением (8), определяется следующим образом:

$$V(\xi(k)-\xi^*) = (\bar{\xi}(k)-\bar{\xi}^*)^{\mathrm{T}} EP(\theta,k)(\bar{\xi}(k)-\bar{\xi}^*) = (\xi(k)-\xi^*)^{\mathrm{T}} P_1(\theta,k)(\xi(k)-\xi^*). \quad (17)$$

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (17), в результате неравенство типа Ляпунова представим в виде

$$\frac{1}{2}[(\bar{A}(\theta)(\bar{\xi}(k)-\bar{\xi}^*) + \bar{B}u(k) + \bar{G}d(k) + \tilde{A}(\theta)\bar{\xi}^*)^{\mathrm{T}}(P(\theta,k) +$$

$$+ P^{\mathrm{T}}(\theta,k))(\bar{A}(\theta)(\bar{\xi}(k)-\bar{\xi}^*) + \bar{B}u(k) + \bar{G}d(k) + \tilde{A}(\theta)\bar{\xi}^*) -$$

$$-(\bar{\xi}(k)-\bar{\xi}^*)^{\mathrm{T}} EP(\theta,k)(\bar{\xi}(k)-\bar{\xi}^*) - (\bar{\xi}(k)-\bar{\xi}^*)^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}}(\theta,k)E^{\mathrm{T}}(\bar{\xi}(k)-\bar{\xi}^*)] \le$$

$$\le -((\xi(k)-\xi^*)^{\mathrm{T}} W_\xi (\xi(k)-\xi^*) + u(k)^{\mathrm{T}} W_u u(k)). \quad (18)$$

Введем матричные переменные $S(k) \in \mathrm{R}^{m\times m}$ и $Y(k) \in \mathrm{R}^{m\times N}$ такие, что

$$P_2(k)B = BS(k), \quad Y(k) = S(k)K(k).$$

В силу неущербности S-процедуры при одном ограничении [14] выполнение неравенств (13) и (18), которые представлены в виде квадратичных форм относительно составного вектора $s(k) = [(\xi(k)-\xi^*)^{\mathrm{T}},\ (y(k)-\xi^*)^{\mathrm{T}},\ \xi^{*\mathrm{T}},\ d^{*\mathrm{T}},\ (d(k)-d^*)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, эквивалентно выполнению для некоторого скаляра $\alpha(k) > 0$ совокупности ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z^{(11)} & Z^{(12)} & \cdots & Z^{(1L)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z^{(L1)} & Z^{(L2)} & \cdots & Z^{(LL)} \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \begin{bmatrix} P_2(k)BB^{\mathrm{T}} & BS(k) \\ S^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}} & S(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \alpha(k) > 0, \quad (19)$$

где

$$Z^{(ij)} =$$

$$= \begin{bmatrix} -P_{1ij}(k) & {\Psi^{(i)}}^{\mathrm{T}}(k) & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & {\Psi^{(i)}}^{\mathrm{T}}(k) & O_{N\times q} & W_\xi & Y^{\mathrm{T}}(k)W_u \\ * & P_{12}(k) & {AP^{(j)}}^{\mathrm{T}}(k) & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & P_2^{\mathrm{T}}(k)G & -2P_2(k) & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times N} \\ * & * & O_{N\times N} & O_{N\times q} & O_{N\times q} & AP^{(i)}(k) & O_{N\times q} & O_{N\times N} & O_{N\times N} \\ * & * & * & O_{q\times q} & O_{q\times q} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times N} \\ * & * & * & * & O_{q\times q} & G^{\mathrm{T}}P_2(k) & O_{q\times q} & O_{q\times N} & O_{q\times N} \\ * & * & * & * & * & P_2^{\mathrm{T}}(k) & P_2^{\mathrm{T}}(k)GQ_d^{1/2} & O_{N\times N} & O_{N\times N} \\ * & * & * & * & * & * & \alpha(k)I_q & O_{q\times q} & O_{q\times N} \\ * & * & * & * & * & * & * & -W_\xi & O_{N\times N} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -W_u \end{bmatrix},$$

$P_{1ij}(k) = P_{1i}(k) + P_{1j}(k), \quad P_{12}(k) = P_{1ij}(k) - P_2(k) + P_2^{\mathrm{T}}(k), \quad AP^{(i)}(k) = (A^{(i)} - I_N)^{\mathrm{T}} P_2(k),$ $\Psi^{(i)}(k) = P_2^{\mathrm{T}}(k)A^{(i)} + BY(k)$, «*» обозначает соответствующий элемент симметрической матрицы неравенства.

Выполнение совокупности ЛМН (19) гарантирует стабилизацию замкнутой системы (9) при действии возмущений $d(k) \in E(d^*, Q_d)$ и любом возможном значении $A(\theta) \in \Omega$.

Ограничения (2) с помощью модификации леммы Шура для нестрогих матричных неравенств представим в виде совокупности ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Q_x & C \\ C^{\mathrm{T}} & P_{1i}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, L}, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}(k)\,\varepsilon e_m(\xi(k) - \xi^*)^+ & Y^{\mathrm{T}}(k) \\ Y(k) & S(k) \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}(k)\,u^{\max}(\xi(k) - \xi^*)^+ & Y^{\mathrm{T}}(k) \\ Y(k) & S(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{21}$$

где $\varepsilon > 0$ — малая константа; $e_m = [1, 1, ..., 1]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{m \times 1}$; $+$ — псевдообращение Мура–Пенроуза.

Наличие ЛМН (21) приводит к закону управления в виде динамической обратной связи, поскольку матрицы неравенств зависят от текущего значения вектора состояний $\xi(k)$.

Для системы (16), которая замкнута управлением (8), инвариантный по состоянию эллипсоид определяется следующим образом:

$$E(\xi^*, P_1^{-1}(\theta, k)) = \{\xi \in \mathrm{R}^N : (\xi(k) - \xi^*)^{\mathrm{T}} P_1(\theta, k)(\xi(k) - \xi^*) \le 1\}.$$

Следовательно, целевая функция оптимизационной задачи $\sum_{i=1}^{L} \mathrm{tr} P_{1i}^{-1}(k) \to \min$ нелинейная. Однако указанная задача эквивалентна задаче

$$\sum_{i=1}^{L} \mathrm{tr} H_i(k) \to \min \tag{22}$$

при ограничениях

$$P_{1i}(k) \succ 0, \quad H_i(k) \succ 0, \quad \begin{bmatrix} H_i(k) & I_N \\ I_N & P_{1i}(k) \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, L}, \tag{23}$$

где $H_i(k) \in \mathrm{R}^{N \times N}$, $i = \overline{1, L}$. Тогда результат решения задачи синтеза ограниченного робастного управления запасами в сети поставок на основе дескрипторного подхода с использованием PDLF (17) представлен в виде теоремы.

Теорема. Если для системы (9) с параметрической неопределенностью (4) и ограничениями (2) матрицы $\hat{S}(k)$ и $\hat{Y}(k)$ получены в результате решения задачи (22) при ограничениях (19)–(21), (23) на матричные переменные $P_{1i}(k) = P_{1i}^{\mathrm{T}}(k) \in \mathrm{R}^{N \times N}$, $H_i(k) \in \mathrm{R}^{N \times N}$, $i = \overline{1, L}$; $P_2(k) \in \mathrm{R}^{N \times N}$, $S(k) \in \mathrm{R}^{m \times m}$, $Y(k) \in \mathrm{R}^{m \times N}$; $Z^{(ii)} \in \mathrm{R}^{(5N + 2q + m) \times (5N + 2q + m)}$, $i = \overline{1, L}$; $Z^{(ij)} = Z^{(ji)^{\mathrm{T}}}$, $i = \overline{1, L - 1}$, $j = \overline{i + 1, L}$, и скаляр $\alpha(k)$, то:

1) для любого начального состояния $\xi(0) = [x^{\mathrm{T}}(0), u^{\mathrm{T}}(-1), ..., u^{\mathrm{T}}(-\Lambda)]^{\mathrm{T}}$, где $x(0) \ge x^*$, $u(k) = O_{m \times 1}$ $\forall k \le 0$ и любой матрицы $A(\theta) \in \Omega$, а также внешнего возмущения $d(k) \in E(d^*, Q_d)$ система (9) робастно устойчивая при ограничениях (2);

2) среди всех линейных управлений вида (8) регулятор с матрицей

$$K(k) = \hat{S}^{-1}(k)\,\hat{Y}(k) \tag{24}$$

доставляет минимум по критерию следа матрицы инвариантному эллипсоиду замкнутой системы в момент времени k.

Доказательство теоремы приведено в [15].

ISSN 0572-2691

Таким образом, с помощью дескрипторного подхода получено, что матрицы $Z^{(ij)}$, из которых сформировано первое из ЛМН (19), не содержат произведения матрицы $A(\theta)$ динамики системы и матрицы Ляпунова $P_1(\theta, k)$. В результате при вычислении матрицы регулятора не используются матрицы, которые явно зависят от вектора $\theta(k)$ неопределенных параметров модели.

Синтез децентрализованного робастного ограниченного управления запасами

Рассмотренный централизованный подход к синтезу управления запасами требует наличия централизованной системы сбора информации, а также характеризуется значительной вычислительной сложностью. Поэтому более перспективным представляется децентрализованный подход, при котором измеренные значения локальных состояний поступают на соответствующие локальные регуляторы, каждый из которых вырабатывает управляющие воздействия для отдельного узла сети.

Выполним декомпозицию рассмотренной сети поставок S на локальные подсистемы S_i, $i = \overline{1, N}$, децентрализованные по входам. Каждому узлу сети доступен лишь ограниченный объем информации, а именно: локальные ограничения на уровни запасов и размеры заказов; граничные значения спроса со стороны узлов, которые являются потребителями ресурсов; номинальные значения интервалов транспортных запаздываний для узлов сети — поставщиков ресурсов. Предложенный подход основан на робастной стабилизации подсистем с помощью метода инвариантных эллипсоидов с последующим анализом устойчивости системы в целом с учетом взаимосвязей.

Поведение системы S определяется уравнениями динамики подсистем S_i, каждое из которых является разностным уравнением с запаздыванием, аналогичным уравнению (1). Вектор внешних воздействий отдельного узла $w_i(k) \in \mathrm{R}^{n_i}$ включает функции внешнего спроса и спроса, формируемого узлами сети, для которых узел S_i служит поставщиком ресурсов

$$w_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \Pi_{ij} u_j(k) + \Pi_i d(k), \tag{25}$$

где $\Pi_{ij} \in \mathrm{R}^{n_i \times m_j}, i, j = \overline{1, N},$ — соответствующие технологические матрицы; $\Pi_i \in \mathrm{R}^{n_i \times q}$ — матрица влияния внешних возмущений. Составной вектор $x(k) = [x_1^{\mathrm{T}}(k), ..., x_N^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$ размерности $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$ — вектор состояний системы S.

В процессе функционирования сети должны выполняться локальные ограничения, аналогичные (2). Преобразование модели узла к стандартному виду без запаздывания, а также построение матрицы динамики узла в случае неопределенности интервалов запаздываний выполняется аналогично тому, как это сделано при централизованном подходе. В результате расширенная модель узла в условиях неопределенности интервалов транспортных запаздываний представлена в виде модели с параметрической неопределенностью аффинного типа, аналогичной (5). Локальные критерии качества определены аналогично (6).

Для системы, состоящей из взаимосвязанных узлов с параметрической неопределенностью, динамика которых описывается уравнениями, аналогичными (5), необходимо решить задачу синтеза децентрализованного робастного управления запасами, которое $\forall d(k) \in D$ $\forall k \geq 0$ и $\forall A_i(\theta_i) \in \Omega_i$ обеспечивает: удовлетворение спроса на ресурсы, т.е. выполнение ограничений на значения локальных состояний, аналогичных первому из ограничений (2); робастную устойчивость замкнутых подсистем при выполнении ограничений на значения локальных управляющих воздействий, аналогичных второму из ограничений (2); гарантированные значения локальных показателей качества.

Для аппроксимации множеств значений внешних воздействий локальных узлов эллипсоидами минимального объема необходимо определить граничные значения внешних воздействий для каждого из узлов на основании граничных значений внешнего спроса. Для решения задачи предложен следующий алгоритм:

1) $\forall i=\overline{1, N}: d_i^{\min}=\Pi_i d^{\min},\ d_i^{\max}=\Pi_i d^{\max}$;

2) $\forall i=\overline{1, q}: \Pi_i^{\min}=\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{q} \Pi_{ij} d_j^{\min},\ \Pi_i^{\max}=\sum\limits_{j=1, j\neq i}^{q} \Pi_{ij} d_j^{\max}$,

$$w_i^{\min}=d_i^{\min}+\Pi_i^{\min},\ w_i^{\max}=d_i^{\max}+\Pi_i^{\max};$$

3) $\forall i=\overline{q+1, N}: \Pi_i^{\min}=\sum\limits_{j=1}^{i-1} \Pi_{ij}(\Pi_j^{\min}+d_j^{\min}),\ \Pi_i^{\max}=\sum\limits_{j=1}^{i-1} \Pi_{ij}(\Pi_j^{\max}+d_j^{\max})$,

$$w_i^{\min}=d_i^{\min}+\Pi_i^{\min},\ w_i^{\max}=d_i^{\max}+\Pi_i^{\max}.$$

При этом множество значений внешних воздействий каждого из узлов S_i аппроксимируется эллипсоидом (13), параметры которого вычисляются согласно (14) после решения соответствующей задачи полуопределенного программирования.

Локальный закон управления строится по аналогии с (8) в виде линейной динамической обратной связи по состоянию

$$u_i(k)=K_i(k)(\xi_i(k)-\xi_i^*), \tag{26}$$

где ξ_i^* — вектор, составленный из (Λ_i+1) векторов x_i^*, которые определяют размеры страховых запасов узла S_i и вычисляются по формуле $x_i^*=\Lambda_i w_i^{\max}$. Также выполняется аппроксимация допустимых множеств значений локальных состояний отдельных узлов эллипсоидами (15), матрицы которых вычисляются в результате решения соответствующих задач полуопределенного программирования. Тогда по аналогии с централизованным подходом матрицы локальных регуляторов вычисляются по формуле (24) на основании дескрипторного описания подсистем с использованием параметризованной функции Ляпунова (17) в результате решения последовательности задач полуопределенного программирования, аналогичных задаче (22) при ограничениях (19)–(21), (23).

Для анализа устойчивости децентрализованной системы управления запасами в сети поставок применен метод сравнения и метод векторных функций Ляпунова. Уравнение динамики расширенной модели узла с учетом взаимосвязей (25) запишем

$$\xi_i(k+1)=A_i(\theta_i)\xi_i(k)+B_i u_i(k)+\sum_{j=1, j\neq i}^{N} B_{ij} u_j(k)+F_i d(k), \tag{27}$$

где матрицы $B_{ij}\in \mathrm{R}^{N_i\times m_j}$, $F_i\in \mathrm{R}^{N_i\times q}$ имеют блочную структуру:

$$B_{ij}^{\mathrm{T}}=[\Pi_{ij}E_i \,\vdots\, O_{m_j\times m_i} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, O_{m_j\times m_i}],\ \ F_i^{\mathrm{T}}=[\Pi_i E_i \,\vdots\, O_{q\times m_i} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, O_{q\times m_i}].$$

Уравнение (27) при управлении (26) примет вид

$$\xi_i(k+1)=A_{f_i}(\theta_i, k)(\xi_i(k)-\xi_i^*)+A_i(\theta_i)\xi_i^*+\sum_{j=1, j\neq i}^{N} F_{ij}(k)(\xi_j(k)-\xi_j^*)+F_i d(k),$$

где $F_{ij}(k)=B_{ij}K_j(k)$, $A_{f_i}(\theta_i, k)=A_i(\theta_i)+B_i K_i(k)$.

 ISSN 0572-2691

Для сети поставок S построим векторную функцию Ляпунова

$$V(\xi(k)-\xi^*)=[v_1(\xi_1(k)-\xi_1^*),...,v_N(\xi_N(k)-\xi_N^*)]^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$

где $\xi(k)=[\xi_1^{\mathrm{T}}(k),...,\xi_N^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$ и $\xi^*=[\xi_1^{*\mathrm{T}},...,\xi_N^{*\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ — составные векторы соответствующей размерности. Компонентами функции (28) являются функции Ляпунова локальных подсистем в форме (17). На основе векторной функции Ляпунова (28) строится модульная функция Ляпунова для управляемой сети поставок S

$$V_0(\xi(k)-\xi^*)=\sum_{i=0}^{N}p_{0i}\left|v_i(\xi_i(k)-\xi_i^*)\right|=P_0V(\xi(k)-\xi^*), \tag{29}$$

где $P_0=[p_{01},...,p_{0N}]\in \mathrm{R}^{1\times N}$, $p_{0i}>0,\, i=\overline{1,N}$.

Сопоставим набор локальных подсистем S_i, $i=\overline{1,N}$, и линейную систему сравнения, обусловленную разностными уравнениями:

$$\begin{aligned}&\upsilon(k+1)=\Lambda(k)\,\upsilon(k),\;\; \upsilon(0)=V(\xi(0)-\xi^*),\\ &\eta(k)=P_0\,\upsilon(k),\end{aligned} \tag{30}$$

где $\upsilon(k)\in \mathrm{R}^N$ — вектор состояний системы сравнения; $\eta(k)$ — скалярная функция, которая является выходом системы сравнения; $\Lambda(k)\in \mathrm{R}^{N\times N}$ — нестационарная матрица динамики с неотрицательными элементами.

Квадратичные формы $v_i(A_{f\,i}(\theta_i,k)(\xi_i(k)-\xi_i^*))$ и $v_i(\xi_i(k)-\xi_i^*)$ определяют пучок форм $v_i(A_{f\,i}(\theta_i,k)(\xi_i(k)-\xi_i^*))-\mu v_i(\xi_i(k)-\xi_i^*)$, где μ — некоторый параметр. Аналогично квадратичные формы $v_j(F_{ij}(k)(\xi_j(k)-\xi_j^*))$ и $v_j(\xi_j(k)-\xi_j^*)$ определяют пучок форм $v_j(F_{ij}(k)(\xi_j(k)-\xi_j^*))-\mu v_j(\xi_j(k)-\xi_j^*)$. Вычисление элементов матрицы $\Lambda(k)$ выполняется по характеристическим уравнениям пучков квадратичных форм:

$$\det(A_{f\,i}^{\mathrm{T}}(\theta_i,k)\,P_i(\theta_i,k)\,A_{f\,i}(\theta_i,k)-\mu_{ii}P_i(\theta_i,k))=0,\;\; i=\overline{1,N},$$

$$\det(F_{ij}^{\mathrm{T}}(k)\,P_i(\theta_i,k)\,F_{ij}(k)-\mu_{ij}P_j(\theta_j,k))=0,\;\; i,j=\overline{1,N},\;\; j\neq i,$$

где $[\Lambda(k)]_{ij}=(\mu_{ij}^{\max})^{1/2}$; $\mu_{ij}^{\max}$ — максимальное значение корня соответствующего уравнения. В результате для векторной (28) и модульной (29) функций Ляпунова сети поставок выполняются неравенства

$$V(\xi(k)-\xi^*)\le \upsilon(k),\quad V_0(\xi(k)-\xi^*)\le \eta(k).$$

Таким образом, система сравнения (30) покомпонентно мажорирует векторную и модульную функции Ляпунова, построенные для рассматриваемой системы. В результате анализ устойчивости децентрализованной системы управления запасами в сети поставок сводится к анализу устойчивости линейной положительной системы сравнения (30).

При построении модели сети поставок узлы нумеруются и группируются в соответствии со стадиями переработки сырья и полуфабрикатов, начиная с тех, на которые поступает внешний спрос. Тогда если граф, представляющий модель сети, не имеет циклов, то матрица динамики системы сравнения нижнетреугольная. Поскольку локальные подсистемы после замыкания стабилизированы, то значения диагональных элементов матрицы динамики положительные и меньше единицы. В результате матрица $\Lambda(k)\;\forall k$ нильпотентная и, таким образом, система сравнения (30) устойчивая. Следовательно, управляемая сеть поставок, которая состоит из взаимосвязанных подсистем, замкнутых локальными обратными связями с децентрализованными регуляторами (26), устойчивая по Ляпунову.

Численный пример

В качестве примера исследована линия по производству моющего средства ТМ «SAMA», которое выпускает компания «СВ», одна из ведущих производителей средств бытовой химии в Украине. Технологический процесс предусматривает изготовление тонны полуфабриката путем смешивания в определенных пропорциях абразива, соды и поверхностно активных веществ (ПАВ), затем в средство добавляют ароматизатор, расфасовывают в банки и закрывают крышками. Модель соответствующей сети поставок представлена на рис. 1.

Управляемые потоки u_1, u_2 и u_3, которые описывают процессы перемешивания ресурсов и расфасовки, изображены в виде гипердуг, потоки $u_4 - u_{10}$ описывают поставки сырья извне. Неуправляемые потоки d_1 и d_2 представляют внешний спрос.

Период дискретизации равен одним суткам. Для каждого управляемого потока в круглых и квадратных скобках указаны значение времени транспортировки и количество ресурсов, которое требуется в соответствии с технологическим процессом. Около каждого узла в круглых скобках указаны значения времени выполнения заказа.

Максимальное значение интервала запаздывания $\Lambda = 3$, размерность вектора состояний расширенной модели $N = 40$. Заданы ограничения на уровни запасов и размеры заказов:

$$x^{\max} = [6000; 15000; 20000; 50; 18000; 1000; 1000; 50; 40000; 40000]^{\mathrm{T}},$$

$$u^{\max} = [1000; 3000; 4000; 20; 3000; 800; 800; 20; 6000; 6000]^{\mathrm{T}}.$$

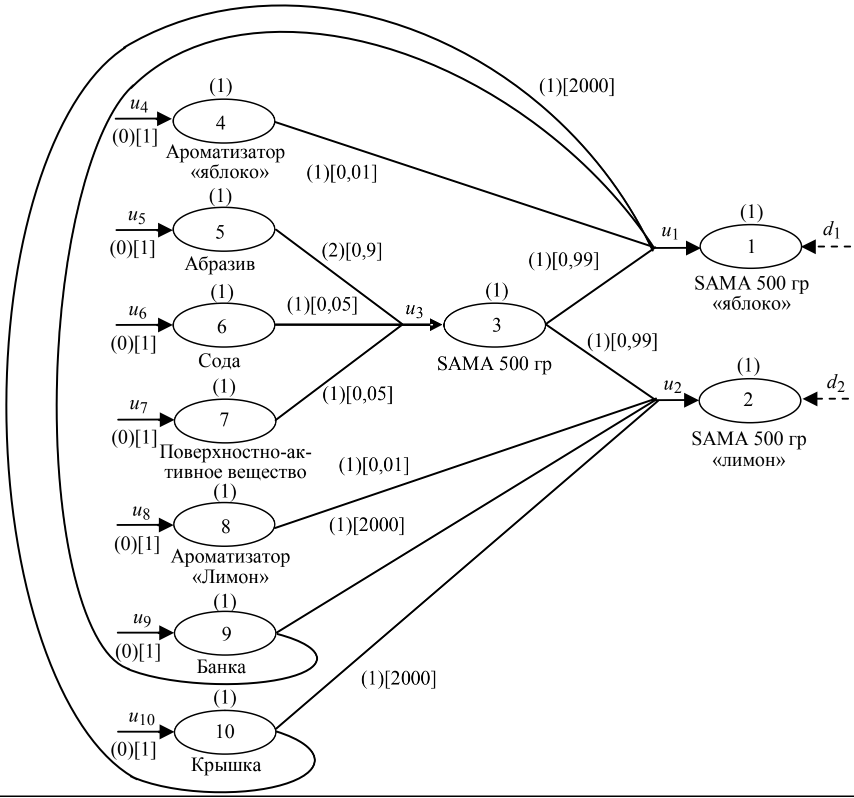


Рис. 1

На основе информации об объемах внешнего спроса за март 2016 года определены граничные значения спроса $d^{\min} = [0;\, 0]^{\mathrm{T}}$, $d^{\max} = [1520;\, 3750]^{\mathrm{T}}$. В соответствии с (7) вычислены уровни страховых запасов, которые выбраны в качестве начального состояния сети

$$x(0) = x^{*} = [3040;\, 7500;\, 10440;\, 30;\, 9390;\, 520;\, 520;\, 30;\, 21080;\, 21080]^{\mathrm{T}}.$$

Если время транспортировки банок от узла 9 до узлов 1 и 2 может увеличиваться на один период, т.е. $T_{9,1} = T_{9,2} \in \{1,\, 2\}$, то значения интервалов запаздывания узлов 1 и 2 принадлежат множеству $\Lambda_1 = \Lambda_2 \in \{2,\, 3\}$. В результате матрица динамики модели может принимать одно из двух значений: $A(\theta) \in \Omega = \mathrm{Conv}\{A^{(1)},\ A^{(2)}\}$, где:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} I_{10} & B_1 & B_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} & B_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & \\ 0 & \mathbf{0} & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \\ O_{10\times 10} & O_{10\times 10} & O_{10\times 10} & O_{10\times 10} \\ O_{10\times 10} & I_{10} & O_{10\times 10} & O_{10\times 10} \\ O_{10\times 10} & O_{10\times 10} & I_{10} & O_{10\times 10} \end{bmatrix},$$

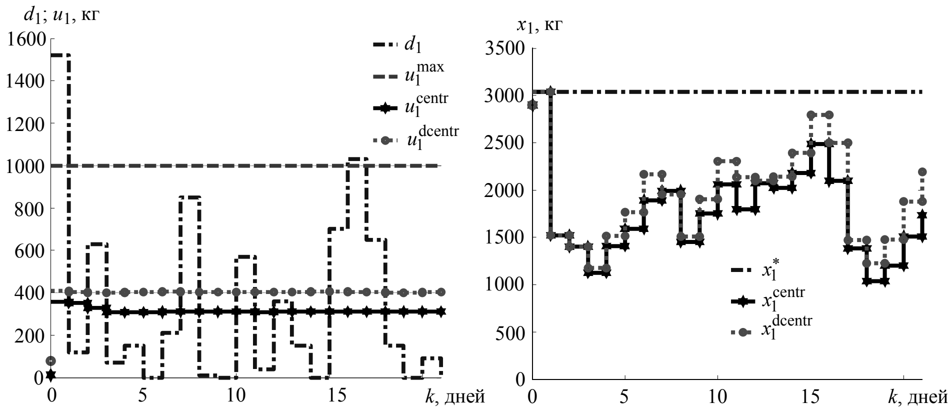
$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} I_{10} & B_1 & B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & \\ 0 & \mathbf{0} & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} & B_3^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \\ O_{10\times 10} & O_{10\times 10} & O_{10\times 10} & O_{10\times 10} \\ O_{10\times 10} & I_{10} & O_{10\times 10} & O_{10\times 10} \\ O_{10\times 10} & O_{10\times 10} & I_{10} & O_{10\times 10} \end{bmatrix}.$$

Моделирование выполнено в течение 22 периодов (количество рабочих дней в марте 2016 года). Во втором периоде и далее через каждые пять периодов матрица динамики системы равна $A^{(2)}$, в остальных периодах — $A^{(1)}$.

В результате решения соответствующих задач выпуклой оптимизации в среде MATLAB с помощью свободно распространяемого пакета cvx [9] определены параметры аппроксимирующих эллипсоидов.

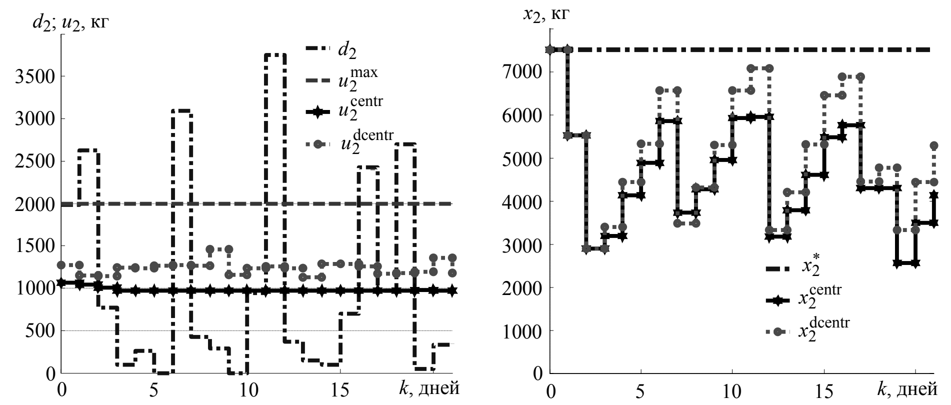
Результаты моделирования, полученные на основе дескрипторного подхода с использованием параметризованной функции Ляпунова (17) с помощью централизованной и децентрализованной систем управления запасами для узлов 1 и 2 сети поставок, представлены на рис. 2 и рис. 3: *а* — значения внешнего спроса и размера заказов; *б* — значения страхового и наличного уровней запасов. На рис. 4 изображена фазовая траектория замкнутой системы, полученная при использовании централизованной системы управления, и проекция инвариантного эллипсоида на трехмерное подпространство.

Из анализа результатов моделирования следует, что полученное управление как при использовании централизованной, так и децентрализованной структуры системы управления запасами обеспечивает достижение поставленных целей управления. При этом централизованный подход характеризуется значительной вычислительной сложностью, поскольку требует решения задач полуопределенного программирования для модели размерностью 40. В случае использования децентрализованной системы управления запасами для получения результата необходимо независимо решить десять задач для моделей, размерности которых не превышают 4. При использовании децентрализованного регулятора объемы заказов ресурсов существенно превышают объемы заказов, которые формирует централизованный регулятор. Поэтому отклонения наличных уровней запасов ресурсов от страховых оказываются меньше при децентрализованном подходе. В результате значение показателя качества, полученное суммированием значений локальных показателей, оказалось на 14 % меньше значения, полученного при использовании централизованной системы управления запасами. Из рис. 3, *б* очевидно, что после 7-, 12- и 17-го периодов, когда значение интервала запаздывания второго узла увеличивается на один период по сравнению с номинальным значением, уровень запаса ресурсов существенно уменьшается, однако дефицита ресурсов не возникает.



а *б*

Рис. 2



а *б*

Рис. 3

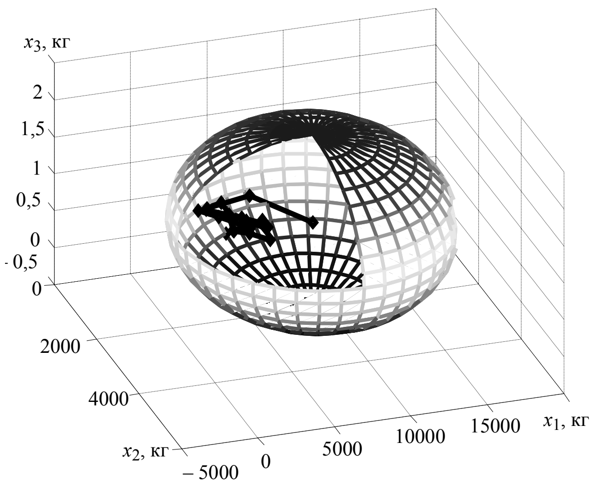


Рис. 4

Заключение

В настоящей работе предложен подход к решению задачи синтеза ограниченного робастного управления запасами в сетях поставок с параметрической неопределенностью в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия несимметричных ограничений на значения состояний и управлений. Закон управления строится в виде линейной динамической обратной связи по сигналу невязки между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов. Подход основан на использовании метода инвариантных эллипсоидов и параметризованной функции Ляпунова. Применение математического аппарата ЛМН позволило сформулировать задачу синтеза управления в виде последовательности задач полуопределенного программирования, которые решаются численно в реальном времени с помощью свободно распространяемых специализированных программных пакетов. С помощью дескрипторного описания системы удалось добиться уменьшения степени консерватизма результатов управления, который проявляется в сужении границ робастности и является следствием минимаксного подхода при использовании традиционной линейно-квадратичной техники синтеза регулятора.

Синтезированное управление зависит от выбранных значений страховых запасов. В рамках предложенного метода возможен выбор оптимальных значений страховых запасов, поскольку рассмотренное решение задачи синтеза робастного управления запасами задает, фактически, алгоритмическую зависимость между уровнем страховых запасов и оптимальным значением критерия качества.

Ю.І. Дорофєєв, Л.М. Любчик

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ У МЕРЕЖАХ ПОСТАВОК НА ОСНОВІ ДЕСКРИПТОРНОГО ОПИСУ СИСТЕМИ

Вирішено задачу синтезу робастного обмеженого керування запасами в мережах поставок в умовах дії невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту. Закон керування будується у вигляді лінійного динамічного зворотного зв'язку за сигналом нев'язки між готівковими і страховими рівнями запасу ресурсів. Для зменшення впливу зовнішніх збурень, що моделюють зміни попиту, одночасно із забезпеченням робастної стійкості замкнутої системи застосовано метод інваріантних еліпсоїдів з використанням дескрипторного опису системи та параметризованої функції Ляпунова. За допомогою техніки лінійних матричних нерівностей задачу синтезу керування зведено до послідовності задач напіввизначеного програмування.

Yu.I. Dorofieiev, L.M. Lyubchyk

SYNTHESIS OF ROBUST CONSTRAINED INVENTORY CONTROL IN SUPPLY NETWORKS ON THE BASE OF DESCRIPTOR SYSTEM APPROACH

The problem of robust constrained inventory control synthesis in supply networks under action of unknown, but bounded external demand is solved. The control law is constructed in the form of a linear dynamic feedback with respect to deviation between available and safety stock levels of resources. In order to suppress the influence of external disturbances, modeling changes in demand, while ensuring robust stability of the closed system the method of invariant ellipsoids is used, which has been improved through the use descriptor system approach and parameter-dependent Lyapunov function. Via the linear matrix inequalities technique the control synthesis problem is reduced to a sequence of semidefinite programming problems.

1. *Daganzo C.* A theory of supply chains. — Heidelberg : Springer, 2003. — 126 p.
2. *Bemporad A., Morari M.* Robust model predictive control: a survey // Lecture Notes in Control and Information Sciences. — 1999. — **245**. — P. 207–226.
3. *Lyubchyk L., Dorofieiev Yu., Nikul'chenko A.* Robust model predictive control of constrained supply networks via invariant ellipsoids technique // Proc. 7-th IFAC Conference on Manufacturing Modeling, Management and Control (MIM'2013). — 2013. — http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/60351.html.
4. *Bertsekas D.P., Rhodes I.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — **16**. — P. 117–128.
5. *Стерлигова А.Н.* Управление запасами в цепях поставок. — М. : ИНФРА-М, 2008. — 430 с.
6. *Blanchini F., Miani S.* Set theoretic methods in control. — Boston : Birkhäuser, 2008. — 504 p.
7. *Šiljak D.* Decentralized control of complex systems. — New York : Academic Press, 1991. — 544 p.
8. *Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. — Philadelphia : SIAM, 1994. — 187 p.
9. *Grant M., Boyd S.* CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1. — 2014. — http://cvxr.com/cvx.
10. *Feron E., Apkarian P., Gahinet P.* Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1996. — **41**. — P. 1041–1046.
11. *Zhang W., Su H., Liang Y., Han Z.* Robust stability test for uncertain discrete-time systems: a descriptor system approach // Latin American Applied Research. — 2011. — **41**, N 4. — P. 359–364.
12. *Blanchini F., Pesenti R., Rinaldi F., Ukovich W.* Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays // IEEE Transactions on Robotics and Automation. — 2000. — **16**, N 3. — P. 313–317.
13. *Обросова Н.К., Оленев Н.Н.* Математические модели в экономике: методическое пособие по практической работе. — М. : РУДН, 2004. — 44 с.
14. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств). — М. : ЛЕНАНД, 2014. — 560 с.
15. *Дорофеев Ю.И.* Робастное управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности спроса и транспортных запаздываний : Дис. ... доктора техн. наук : 05.13.07. — Харьков, 2016. — 284 с.

Получено 28.11.2016