УДК 518.9

А.П. Игнатенко

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ

Введение

В работе рассматривается игровая задача управления для класса компьютерных систем, состоящих из соединенных в сеть узлов с размещенными на них сервисными элементами, и пользователей. Распределенные системы с большим количеством независимых пользователей в настоящее время являются актуальным объектом исследования, в частности, примерами таких объектов является Интернет и современные многопроцессорные вычислительные среды. Эта задача формализуется в виде конфликтно-управляемой системы $N + 1$ участника, где N пользователей однородны и антагонистичны по отношению друг к другу, т.е. выигрыш одного игрока — проигрыш других, а оставшийся игрок — система управления. Каждый игрок (пользователь) заинтересован в доступе к максимальному количеству ресурсов, например для выполнения объемной вычислительной задачи. Интерес представляют ситуации, когда суммарное востребование ресурсов превышает существующее количество. В этом случае система должна распределить имеющиеся ресурсы, используя некоторый алгоритм. Этот алгоритм задает структуру динамической игры, при этом критерии его выбора — довольно трудно формализуемые понятия эффективности и справедливости распределения ресурсов.

Поскольку количество игроков даже в небольшой сети может быть довольно значительным (например, количество пользователей Интернет оценивают более чем в два миллиарда человек), то алгоритм должен быть эффективным по отношению к использованию памяти и вычислительных ресурсов. Одним из наиболее распространенных решений, доказавших свою эффективность на практике, является класс алгоритмов, получивший название протокол передачи данных (Transmission control protocol — TCP). Этот протокол обеспечивает передачу примерно 80 % трафика Интернет. Позднее было получено теоретическое обоснование эффективности алгоритма TCP [1], являющегося решением некоторой оптимизационной задачи.

Его сущность составляет набор достаточно простых правил работы элементов сети и пользователей, которые совместно с функциями полезности игроков определяют структуру игры. При этом в зависимости от степени идеализации правил протокола и поведения пользователей структура может значительно усложняться. Один из удобных инструментов исследования таких моделей — теория эволюционных игр, которая исследует динамическое взаимодействие больших групп игроков — популяций.

Структура статьи следующая. В разделе 1 сделан обзор существующих применений игровых подходов к решению задач моделирования сетевого взаимодействия, раздел 2 посвящен применению методов теории дифференциальных игр преследования к задаче управления сетью, что позволяет по-новому сформулировать условие стабильности сети и определить игровую модель с импульсными воздействиями. В разделе 3 проведено исследование решений разрывной динамической системы и рассмотрена динамическая игра в окрестности предельного цикла. Найдены условия равновесия в доминирующих стратегиях и равновесия Неша для различных соотношений параметров игры. Теоретические результаты подтверждены имитационным моделированием взаимодействия протоколов.

1. Проблема распределения ресурсов в сети и основные подходы к ее решению

Математический аппарат теории некооперативных игр, который разрабатывался для стратегического анализа взаимодействия рациональных игроков, оказался удобным инструментом для описания процессов, происходящих в компьютерных сетях. Процессы, подлежащие исследованию, заключаются в конфликтном взаимодействии пользователей, каждый из которых желает максимизировать свой выигрыш. При этом игроки не могут обмениваться информацией и договариваться о совместных действиях.

Применению общей теории игр в информационных системах посвящено несколько обзорных работ [2, 3]. Можно отметить применение идей теории управления и игровых подходов к решению задач управления потоками данных [4], справедливости распределения ресурсов [5] и обеспечения качества обслуживания [5, 7].

В указанных работах, как правило, рассматривались статические (в основном матричные) игры. Сравнительно новой идеей стало применение эволюционно-игрового подхода [8]. В этом формализме множество пользователей сети рассматриваются как некая «популяция», конкурирующая за общий ресурс и использующая одну из нескольких возможных стратегий — сетевых протоколов. Данная игра динамическая: игроки оценивают результат своей стратегии и могут изменить ее на более выигрышную. Актуальна проблема нахождения условий существования эволюционно-устойчивого равновесия. В частности, в работе [8] решается задача выбора лучших параметров протокола в беспроводных сетях для пользователей, которые могут выбирать стратегию из двух возможных протоколов — «агрессивного» и «мирного». Доказано существование в такой игре равновесного состояния в чистых и смешанных стратегиях и исследовано влияние задержки — времени реакции пользователей на устойчивость и сходимость траекторий к равновесию. Кроме того, теоретические результаты подтверждены имитационным моделированием. Однако стоит отметить вопросы, оставленные открытыми. Во-первых, эволюционный подход предполагает наличие популяции пользователей, которые случайным образом играют матричную игру двух типов игроков. Во-вторых, рассматривались только такие типы протоколов (каждый протокол описывается парой параметров α, β), для которых выполняются условия $\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$, при таком соотношении параметров протоколов считают, что первый протокол агрессивнее второго (соответственно, второй более мирный). Наконец, топология сети практически не влияла на равновесие, поскольку рассматривалась ситуация одного сервера, через который проходят все потоки пакетов пользователей.

Данная статья продолжает исследования, начатые в работе [9].

2. Управляемая потоковая модель компьютерной сети

Рассмотрим сеть, состоящую из M рабочих узлов. Каждый узел содержит, по крайней мере, один сервисный элемент, при этом суммарный ресурс всех сервисных элементов узла (например, время процессора, пропускная способность канала, общая оперативная память) ограничен. Обозначим множество индексов узлов сети $I = \{1, ..., M\}$, множество индексов сервисных элементов — $K = \{1, ..., L\}$. Максимальный ресурс узла с индексом $i \in I$ обозначим $p_i \in R_{++}^M$, а максимальную долю, которую может получить сервисный элемент с индексом $k \in K$, обозначим $q_k \in R_{++}^L$. Пусть матрица C описывает структуру соответствия узлов и сервисных элементов, $C = \{c_{ik}\}_{k \in K,\ i \in I}$, где элемент c_{ik} равен 1, если элемент k принадлежит i-му узлу, и 0 в противном случае. Положим, что у каждого узла должен быть как минимум один сервисный элемент и каждый сервисный элемент не может принадлежать более чем одному узлу.

Предположим, что в сети присутствуют N пользователей, проиндексированных множеством $J = \{1, ..., N\}$. С каждым из них связана функция $x_j(t)$, $j \in J$, $t \geq 0$, которая описывает скорость передачи данных в сеть (например, загрузка файла на удаленный сервер) в момент времени t. Естественно ограничить вектор возможных скоростей $x(t) = (x_1(t), ..., x_N(t))$ областью $X \subset R_+^n$. Каждый пользователь заинтересован в получении наилучшего уровня обслуживания (явный вид целевой функции игроков описан ниже).

Пакеты с данными обрабатываются последовательно, перемещаясь с узла на узел, при этом с каждым пользователем связан маршрут движения пакетов, состоящий из индексов сервисных элементов $m_j = \{k_1, ..., k_{n_j}\}$, $k_p \in K$, $p \in \{1, ..., n_j\}$. Предположим, что выбран вектор $x(t) = (x_1(t), ..., x_N(t))$, тогда сервисный элемент $k \in K$ испытывает нагрузку суммарного потока пакетов $y_k(t) = \sum\limits_{j \in s(k)} x_j(t)$, где $s(k) = \{j \in J : k \in m_j\}$.

Точное описание динамики такого протокола в общем случае довольно сложное и характеризуется нелинейностью, стохастическими явлениями и дискретными импульсами, воздействующими на систему. Цель данного исследования — изучение игровых аспектов поведения пользователей, поэтому ограничимся упрощенной детерминистической линейной моделью в отсутствии информационных задержек, для которой стратегии игроков имеют наглядную и удобную для исследования форму. Маршрут движения пакетов будем считать однозначным и фиксированным для каждого пользователя.

Введем функции $u_k(t)$, $k \in K$, описывающие скорость обслуживания (обработки, пересылки и т.п.) потока заданий $y_k(t)$, попадающего на данный сервисный элемент. Функция $u_k(t) = (u_1(t), ..., u_L(t))$ является управлением сети, цель которой — обслуживание пользователей. Пусть $P = \mathrm{diag}\{p_1, ..., p_M\}$, $Q = \mathrm{diag}\{q_1, ..., q_L\}$ — диагональные матрицы, тогда множество допустимых управлений сети задается формулой

$$U = \{u \in R_+^L \mid P^{-1} C Q^{-1} \overline{u} \leq \overline{1}\},$$

где неравенство понимается построчно, а $\overline{1} = (1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$. Множество $U \subset R_+^L$ является выпуклым и содержит начало координат. Матрица маршрутизации $R = \{r_{ij}\}$, $i, j \in K$, определяется следующим образом: элемент r_{ij} равен 1, если выход i-го сервисного элемента является входом j-го сервисного элемента, и 0 в противном случае. При этом будем полагать, что в системе отсутствуют циклы и любой пакет покидает сеть не более чем за $L-1$ шагов. Другими словами, для матрицы маршрутизации выполнено равенство $R^L = 0$.

Матрица $A = \{a_{kj}\}$, $k \in K$, $j \in J$, определяется структурой входного потока, при этом элемент a_{kj} равен 1, если пользователь с индексом j посылает свои данные на вход сервисного элемента с индексом k и 0 в противном случае. В данной работе предполагаем, что с каждым пользователем связано не более одного входного потока.

 ISSN 0572-2691

Определим динамическую систему

$$\dot{\bar{y}}(t) = A\bar{x} - B\bar{u}, \tag{1}$$

где матрица $B = [I - R^T]$. Отметим, что матрица B обратима и $B^{-1} = I + R^T + ... + (R^T)^{L-1}$. Динамическая система (1) описывает накопление очередей на входе каждого сервисного элемента, при этом $\bar{y} \in R_+^L$. В этой системе присутствуют два типа игроков — пользователи, управляющие вектором $x(t)$, и сеть, выбирающая управление $u(t) \in U$. Для удобства анализа представим пользователей одним объединенным мета-игроком, который выбирает программные управления. Положим в сети есть данные о состоянии каждого сервисного элемента $y_i(t)$ и о векторе $x(t)$ в момент времени $t \geq 0$, или, другими словами, использует контрстратегии. Терминальное множество $M = \{y(t) = 0\}$ нулевое. Динамическая система (1) — дифференциальная игра с динамикой простого движения, но достаточно сложной структурой управляющих множеств. В данной работе рассматриваются ограничения, которые приводят к полиэдральной структуре, однако подход может быть обобщен и на выпуклые компакты. Отметим, что формулировка проблемы управления сетью в виде дифференциальной игры преследования позволяет применить такие классические методы, как первый прямой метод Л.С.Понтрягина [10] и метод разрешающих функций [11] к определению условий стабильности сети, позволяет рассмотреть проблему в новой постановке. Следует отметить возможности обобщения этой проблемы на случай многих участников [11, 12] и динамики с интегральными ограничениями [13, 14], которые являются актуальными направлениями исследований.

Условие стабильности. В работе [15] поставлена (и решена для линейных ограничений) важная задача нахождения условий стабильности сети. Сеть называется стабильной, если для каждого допустимого $\bar{x} \in X$ существует $\bar{u} \in U$ такой, что для некоторого $T > t_0$ выполнено $\bar{y}(T, t_0, \bar{x}, \bar{u}) = 0$. Как описать аналитически условия переполнения для некоторой топологии сети, которая задается матрицами *A*, *B*, *C*, *U*?

Свойство 1. Множество U является выпуклым компактом и при этом $\text{con}\{U\} = R_+^L$.

*Доказательство***.** Рассмотрим условие $P^{-1}CQ^{-1}u \leq 1$. Оно эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{L} c_{1i} \frac{u_i}{q_i} \leq p_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{L} c_{Mi} \frac{u_i}{q_i} \leq p_M .\end{gathered}$$

При этом для каждого $k \in K$ существует хотя бы один ненулевой c_{ki}. Учитывая, что $c_{ki} \in \{0, 1\}$ и $u_i \geq 0$, получаем, что пересечение выпукло и компактно. Далее, для каждого $\bar{e}_i \in R^L$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $P^{-1}CQ^{-1}\delta\bar{e}_l \leq \bar{1}$ для всех $\delta \in [0, \varepsilon]$, поэтому коническая оболочка U совпадает со всем R_+^L.

Свойство 2. Луч, выпущенный из начала координат, пересекает множество $\{u \in U : \max\limits_{j \in K} [P^{-1} C Q^{-1} u]_j = 1\}$ не более чем в одной точке.

Доказательство. Множество $\{u \in U : \max\limits_{j \in K} [P^{-1} C Q^{-1} \overline{u}]_j = 1\}$ является выпуклым подмножеством границы ∂U выпуклого множества, содержащего начало координат.

Утверждение 1. Если существует $\alpha^* \in [0, 1)$ такое, что для любого $x(t)$, $t \in [t_0, +\infty]$, существует $u \in U$ и $0 \le \alpha < \alpha^*$, что $\sum\limits_{k=0}^{K-1} (R^T)^k A\overline{x}(t) = \alpha \cdot \overline{u}$, то динамическая система (1) стабильна.

Доказательство. Приведем систему (1) к стандартному виду дифференциальной игры преследования. Введем обозначение $z = y$. Рассмотрим убегающего игрока с управлением $\widetilde{v} = -Ax$, $\widetilde{v} \in \widetilde{V} = -AX$ и преследователя с управлением $\widetilde{u} = -Bu \in \widetilde{U} = -BU$. Терминальное множество задается условием $\{z : z = 0\}$. Система (1) преобразовывается к виду $\dot{z} = \widetilde{u} - \widetilde{v}$.

Применение первого прямого метода Понтрягина позволяет утверждать, что игра может быть закончена в момент времени T, если выполняется условие Понтрягина, т.е. $W(t) = \bigcap\limits_{\widetilde{v} \in \widetilde{V}} (\widetilde{U} - \widetilde{v}) \neq \varnothing$ для всех $t \in [t_0, T]$ и, кроме того, в момент времени T выполняется включение: $-z(t_0) \in \int\limits_{t_0}^{T} W(\tau) d\tau$. Предположим, что для любого $x(t)$, $t \in [t_0, +\infty]$, существуют $u \in U$ и $0 \le \alpha < \alpha^*$ такие, что $\sum\limits_{k=0}^{L-1} (R^T)^k A\overline{x}(t) = \alpha u$. Построим отображение $W(t)$:

$$W(t) = \bigcap_{x \in X} [-BU + Ax] = \bigcap_{x \in X} B[B^{-1} Ax - U].$$

Поскольку $B^{-1} = [I - R^T]^{-1} = I + R^T + (R^T)^2 + \ldots$ и $R^n = 0$, $n \ge K$, то выполняется

$$\bigcap_{x \in X} B[B^{-1} Ax - U] = \bigcap_{x \in X} B\left[\sum_{k=0}^{K-1} (R^T)^k Ax - U\right].$$

Для любого $x(t)$, $t \in [t_0, +\infty]$, существуют $\overline{u} \in U$ и $0 \le \alpha < 1$ такие, что $\sum\limits_{k=0}^{K-1} (R^T)^k A\overline{x}(t) = \alpha u$, поэтому точка $\{0\}$ всегда принадлежит отображению $W(t)$ и, следовательно, оно непусто. Покажем теперь, что для любого $z(t_0)$ существует такой момент времени T, для которого выполняется $-z(t_0) \in \int\limits_{t_0}^{T} W(\tau) d\tau$. Действительно, $B \sum\limits_{k=0}^{K-1} (R^T)^k A\overline{x}(t) \subset \alpha^* BU$, $0 \le \alpha^* < 1$, следовательно, $W(t) = \bigcap\limits_{x \in X} [-BU + Ax] \supset \widetilde{U} \overset{*}{-} \alpha^* \widetilde{U} = (1 - \alpha^*) \widetilde{U}$. Матрица B^{-1} содержит только неотрицательные элементы, поэтому $-Bz(t_0) \in R_{-}^{L}$, множество $\widetilde{U} \subset R_{-}^{n}$ и обладает свойством $\operatorname{con}\{\widetilde{U}\} = R_{-}^{L}$, следовательно, при некотором T будет выполнено условие

$$-z(t_0) \in \int_{t_0}^{T} (1-\alpha^{*})\widetilde{U} d\tau \subset \int_{t_0}^{T} W(\tau)\, d\tau .$$

Замечание. Условие стабильности можно ослабить, если вместо первого прямого метода Понтрягина применить метод разрешающих функций.

Если условие стабильности выполнено, сеть будет работать без потерь (именно по такому принципу работает телефонная сеть — при отсутствии свободного канала пользователь не может подключиться к системе, если же канал свободен — гарантируется определенный уровень сервиса).

Однако для компьютерных сетей это условие не совсем реалистично. Во-первых, до недавнего времени объемы данных и количество пользователей росли значительно быстрее возможностей инфраструктуры. Во-вторых, потоки данных отличаются приоритетностью и изменяются во времени (возможны кратковременные всплески), поэтому система управления должна иметь возможность отсекать часть трафика и перераспределять свободные мощности. Наконец, наиболее важно то, что пользователи не должны произвольно выбирать свои скорости передачи данных, поскольку это ухудшает безопасность и эффективность системы.

Аддитивное возрастание, мультипликативное падение (Additive increase, multiplicative decrease — AIMD), динамика. Более сложным алгоритмом регулирования поведения пользователей является TCP, который обеспечивает передачу более 80 % сегодняшнего трафика. Рассмотрим здесь наиболее раннюю версию этого алгоритма — TCP Reno. Алгоритм состоит из набора правил, регулирующих поведение пользователя при передаче данных в сети: установление соединения, передачу пакетов, подтверждение доставки и реакцию на потери.

Рассмотрим математическую модель главного алгоритма, регулирующего поведение пользователей — реакции на успешную доставку или потерю пакета данных вследствие переполнения сети.

Его сущность представляет реализацию простой идеи: каждый пользователь управляет ускорением (которое ограничено величиной $\alpha \in [1, +\infty)$) и начинает передачу данных с нулевой начальной скоростью. Если сеть свободна, то он максимально увеличивает свою скорость, если же она переполнена — уменьшает свою текущую скорость, умножая ее на число $\beta \in [0, 1)$. Эта схема управления получила название AIMD динамики и может быть представлена в виде системы с импульсными воздействиями. Доопределим систему (1) с учетом дополнительных ограничений. Будем считать, что выполнено условие стабильности, следовательно, $AX \subset BU$. Обозначим матрицу $\Xi = P^{-1} C Q^{-1} \sum_{k=0}^{M-1} (R^{T})^{k} A$.

Введем множества $\Gamma = \{\bar{x} \in R_{+}^{N} \mid \exists j \in K : [\Xi \bar{x}(t)]_j = 1\}$ и $G = \{\bar{x} \in R_{+}^{N} \mid \Xi \bar{x}(t) < 1\}$, ясно, что выполнено включение $\Gamma \subset \partial G$. Пусть задана матрица $\mathrm{B} = \operatorname{diag}\{\beta_1, ..., \beta_N\}$, где $\beta_i < 1$, тогда определим функцию $J : \Gamma \to G$ такую, что $J(\bar{x}) = \mathrm{B}\bar{x}$. Вектор $\bar{x}(t)$, описывающий скорости пользователей, растет со скоростью $\bar{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$, $\alpha_i \geq 1$, до того момента времени, пока точка $\bar{x}(t)$ не выходит на множество Γ. В момент времени θ, такой, что $\bar{x}(\theta)$ попадает на множество Γ, происходит скачок в точку $\bar{x}(\theta+) = J(\bar{x}(\theta)) = \mathrm{B}\bar{x}(\theta)$.

Динамика системы описывается следующим образом:

$$\frac{d\overline{q}(t)}{dt} = A\overline{x}(t) - B\overline{u}(t),$$

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt} = \overline{\alpha}\,,\ x \notin \Gamma,$$

$$\Delta\overline{x} = J(\overline{x}) - \overline{x}\,,\ \overline{x} \in \Gamma. \tag{2}$$

Интерес представляет исследование двух последних уравнений, образующих разрывную динамическую систему [16, 17]. Известно [16], что задача Коши для системы (2) имеет единственное решение в классе кусочно-непрерывных функций. Начальное значение x_0 определяет последовательность моментов времени, в которых происходят разрывы траектории:

$$\tau_{i+1}(x_0) = \min\{t > \tau_i \mid \exists\, j \in K : [\Xi(\overline{x}(\tau_i) + \overline{\alpha}(t - \tau_i))]_j = 1\},$$

где $i = \{1, 2, ...\}$, $\tau_0 = t_0$.

Утверждение 2. Решение задачи Коши для системы (2) является квазипериодической функцией, которая сходится к особому периодическому решению.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f : \Gamma \to \Gamma$, определенное по формуле $f(\overline{x}) = \{\overline{y} \in \Gamma \mid \mathrm{B}\overline{x} + \overline{\alpha}\tau_1(\mathrm{B}\overline{x}) = y\}$. Отображение $f(\cdot)$ определено для каждой точки Γ и является инъективным отображением. Легко видеть, что $f(\cdot)$ непрерывно. Рассмотрим симплекс Δ_{N-1}, построенный на векторах стандартного базиса $e_1, ..., e_N$. Для каждой точки $x \in \Gamma$ существует единственный вектор $\psi \in \Delta_{N-1}$ такой, что $x = a\psi$, $a \in R$. Следовательно, множество Γ гомеоморфно Δ_{N-1}, поэтому выполнены условия теоремы Брауэра и существует неподвижная точка $\overline{x}^* \in \Gamma$ отображения $f(\cdot)$. Обозначим $\overline{\gamma}$ вектор с компонентами $\gamma_i = \dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$. По определению неподвижной точки выполняется равенство

$$\mathrm{B}\overline{x}^* + \overline{\alpha}\tau_1(\mathrm{B}\overline{x}^*) = \overline{x}^*,$$

$$\overline{x}^* = (I - \mathrm{B})^{-1}\overline{\alpha}\tau_1(\mathrm{B}\overline{x}^*) = \overline{\gamma}\tau_1(\mathrm{B}\overline{x}^*)\,.$$

Рассмотрим решение $\overline{x}^*(t)$ системы (2*) из начальной точки $\mathrm{B}\overline{x}^*$. Ясно, что выполнено равенство $\overline{x}^*(t + \tau_1(\mathrm{B}\overline{x}^*)) = \overline{x}^*(t)$, следовательно, решение является периодическим с периодом $T = \tau_1(\mathrm{B}\overline{x}^*)$. Заметим, что $\tau_i(\mathrm{B}\overline{x}^*) = iT$ для произвольного натурального i.

Покажем единственность решения. Пусть существует еще одна неподвижная точка $\overline{y}^* = \overline{\gamma}\tau_1(\mathrm{B}\overline{y}^*)$, тогда $\overline{y}^* = k\overline{x}^*$ для некоторого коэффициента k, что противоречит свойству 2, поскольку обе точки принадлежат границе Γ. Рассмотрим смещенную по границе точку $\overline{x}^* + \overline{a}$ из окрестности $\overline{x}^*$ такую, что $\overline{x}^* + \varepsilon\overline{a} \in \Gamma$ для всех $\varepsilon \in [-1, 1]$. При переносе вдоль вектора $-\overline{\alpha}$ точка $\overline{x}^*$ переходит в точку $\mathrm{B}\overline{x}^*$, а точка $\overline{x}^* + \overline{a}$ — в некоторую точку $\overline{y}$, при этом $\mathrm{B}\overline{x}^* - \overline{y} = \overline{a}$. Расстояние между точками $\mathrm{B}\overline{x}^*$ и $\mathrm{B}(\overline{x}^* + \overline{a})$ равно $\|\mathrm{B}\overline{a}\| < \|\overline{a}\|$, следовательно, отображение является сжимающим. Это свойство выполняется для всех областей границы Γ, поэтому любое решение сходится к решению, соответствующему неподвижной точке. Сходимость здесь понимается в том смысле, что $x(\tau_i(\bar{x}_0)-0,\ \bar{x}_0) \to \bar{x}^*$, $i \to \infty$.

Применим утверждение 3 к решению типовых примеров. Пусть период колебаний особого решения — T, $\bar{x}^*$ — неподвижная точка отображения $f(\cdot)$.

Свойство 3. Если векторы $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ таковы, что $\bar{\gamma} = \gamma^*(1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$, для некоторого числа $\gamma^* > 0$, то $\bar{x}^* = \bar{\gamma}\tau_1(\mathrm{B}\bar{x}^*) = \gamma^*\tau_1(\mathrm{B}\bar{x}^*)(1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$ — неподвижная точка отображения $f(\cdot)$. Другими словами, для указанных векторов точка разделения ресурсов принадлежит лучу, построенному на векторе $(1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$.

Рассмотрим два класса сетей, для которых будут получены условия существования равновесия в игре нескольких однотипных пользователей.

Единственный сервер. Наиболее простая модель, в которой сеть состоит из одного узла мощности p, — $M = L = 1$. К сети присоединены N пользователей с вектором скоростей $\bar{x}(t) = (x_1(t), ..., x_N(t))^{\mathrm{T}}$. Матрица A имеет форму вектора: $A = [1\ \dots\ 1]$, множество $U = [0, p] \subset R_+$. Для данной системы матрица $\Xi = \left[\frac{1}{p}\ \dots\ \frac{1}{p}\right]$, условие переполнения записывается в виде $\frac{x_1}{p} + ... + \frac{x_N}{p} = 1$. Пусть x^* — неподвижная точка отображения $f(\cdot)$, тогда $x^* = \left[\frac{\alpha_1}{1-\beta_1} ... \frac{\alpha_N}{1-\beta_N}\right]^{\mathrm{T}} T$ и $\Xi A(Bx^* + \alpha T) = 1$. Решая систему линейных уравнений, получаем

$$T = \frac{p}{\frac{\alpha_1}{1-\beta_1} + \dots + \frac{\alpha_N}{1-\beta_N}}.$$

Отметим, что если все $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, то $T = \frac{p(1-\beta)}{N\alpha}$, $x_i^* = \frac{p}{N}$.

Модель Климова. Рассмотрим модель, изображенную на рис. 1. В данной модели N пользователей используют N сервисных элементов, расположенных на одном узле. Общая мощность узла равна p, каждый элемент имеет максимальную долю q_k. Учитывая, что $C = [1\ \dots\ 1]$, получаем $U = \{u \in R_+^K \mid \frac{u_1}{q_1} + \dots + \frac{u_N}{q_N} \le p\}$.

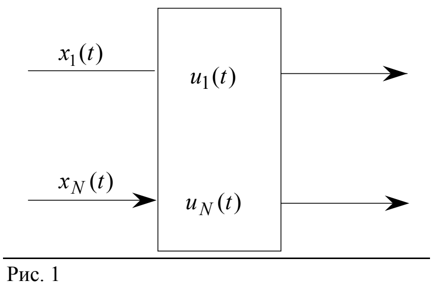

Рис. 1

Матрица $A = I$, поэтому $\Xi = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{q_1}\ \dots\ \frac{1}{q_N}\right]$ и условие стабильности задается формулой $\frac{x_1(t)}{q_1} + \dots + \frac{x_N(t)}{q_N} < p$. Неподвижная точка является решением системы уравнений:

$$\Xi(\bar{x})\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{q_i}\right) = 1,\quad \bar{x} = \left[\frac{\alpha_1}{1-\beta_1}\ \dots\ \frac{\alpha_N}{1-\beta_N}\right]^{\mathrm{T}} T.$$

Запишем результат в явном виде:

$$T = \frac{p}{\dfrac{\alpha_1}{(1-\beta_1)q_1} + \ldots + \dfrac{\alpha_N}{(1-\beta_N)q_N}}, \ x_i^* = \frac{\alpha_i p}{(1-\beta_i)\left(\dfrac{\alpha_1}{(1-\beta_1)q_1} + \ldots + \dfrac{\alpha_N}{(1-\beta_N)q_N}\right)}.$$

Отметим, что если выполнено условие $\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i} = \gamma$ для всех $i = 1, 2, ..., N$, то

$$T = \frac{p}{\dfrac{\gamma}{q_1} + \ldots + \dfrac{\gamma}{q_N}}, \ x_i^* = \gamma T.$$

3. Теоретико-игровая модель

Рассмотрим игровую постановку взаимодействия пользователей для системы (2). Положим, что система переходит в состояние равновесия (при заданных параметрах $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, x_0$) достаточно быстро и переходным периодом можно пренебречь. Положим, классический эволюционно-игровой подход рассматривает игроков в виде некоторой «популяции», члены которой случайным образом выбираются попарно для сравнения их стратегий в соответствии с выбранной матрицей игры. Для интересующей нас предметной области такая идеализация взаимодействия пользователей возможна только в случае двух игроков для простейшей топологии. В данной работе предлагается новая постановка, включающая топологию сети и взаимодействие многих игроков.

Определим N_s стратегий s_i, состоящих из пар (α_i, β_i), $i = 1, ..., N_s$. Пусть S — множество всех допустимых (чистых) стратегий, которое будем считать конечным. Рассмотрим функцию выигрыша в стандартной для таких задач форме [2, 8] $J_i(s) = Thp_i(s) - \lambda R(s)$, где $\overline{s} = (s_1, ..., s_{N_s})$ — вектор стратегий всех игроков, а $Thp_i(s) = 0{,}5(1+\beta_i)x_i^*$ — усредненная скорость i-го игрока; λ — параметр чувствительности к потерям, который естественно считать неотрицательным; под потерей понимается выход траектории на множество Γ и разрыв траектории, который при этом происходит. Введем функцию интенсивности потерь в следующем виде: $R(s) = \dfrac{1}{T(s)}$, где $T(s) = \tau_1(\mathrm{B}x^*)$. Для заданного набора стратегий особое решение системы будет колебаться между точками $\overline{x}^* = \overline{\gamma}T(s)$ и $\mathrm{B}x^*$, где $\gamma_i = \dfrac{\alpha_i}{1-\beta_i}$, остальные решения будут сходиться к нему (в смысле, указанном выше).

Пример. Вычислим выигрыши для случая двух стратегий и двух игроков:

$$J_1(s_i, s_i) = J_2(s_i, s_i) = \frac{(1+\beta_i)}{4} p - \lambda \frac{2\gamma_i}{p},$$

$$J_1(s_1, s_2) = \frac{(1+\beta_1)\gamma_1 p}{2(\gamma_1+\gamma_2)} - \frac{\lambda}{p}(\gamma_1+\gamma_2),$$

$$J_1(s_2, s_1) = \frac{(1+\beta_2)\gamma_2 p}{2(\gamma_1+\gamma_2)} - \frac{\lambda}{p}(\gamma_1+\gamma_2),$$

$$J_2(s_1, s_2) = J_1(s_2, s_1), \ J_2(s_2, s_1) = J_1(s_1, s_2).$$

 ISSN 0572-2691

Условие существования равновесия в доминирующих стратегиях для игр с *N* упорядоченными стратегиями. Рассмотрим игру, в которой каждый пользователь может выбрать одну из *N* стратегий и при этом все s_i таковы, что $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_{N_s}$, где $s_i \geq s_j$ означает, что $\alpha_i \geq \alpha_j$ и $\beta_i \geq \beta_j$. Другими словами, они упорядочены по «агрессивности».

Утверждение 3. Если λ достаточно мало, то наиболее агрессивный протокол является доминирующей стратегией для сети с топологией единственный сервер.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 \geq \alpha_i$, $\beta_1 \geq \beta_i$ для всех $i = 2, ..., N$. Вычислим выигрыши первого игрока для различных стратегий: $J_1(s_1, s_{-1})$ и $J_1(s_j, s_{-1})$, $j \neq 1$. При этом $T(s_1, s_{-1}) = \dfrac{p}{\gamma_1 + A}$, где $A = \sum\limits_{k=2, .., N} \gamma_k$ — сумма, соответствующая вектору стратегий $s_{-1} = (s_{i_2}, .., s_{i_N})$, $s_{i_2} \in S, .., s_{i_N} \in S$, $T(s_j, s_{-1}) = \dfrac{p}{\gamma_j + A}$.

Ясно, что выполняется неравенство $T(s_1, s_{-1}) < T(s_j, s_{-1})$. Продолжая вычисления, получаем:

$$Thp_1(s_1, s_{-1}) = \frac{(1+\beta_1)x_1^*}{2} = \frac{\gamma_1(1+\beta_1)p}{2(\gamma_1 + A)} = \frac{(1+\beta_1)p}{2(1 + A/\gamma_1)},$$

$$Thp_1(s_j, s_{-1}) = \frac{(1+\beta_j)x_j^*}{2} = \frac{(1+\beta_j)p}{2(1 + A/\gamma_j)},$$

$$J_1(s_1, s_{-1}) = Thp_1(s_1, s_{-1}) - \frac{\lambda}{c}(\gamma_j + A),$$

$$J_1(s_j, s_{-1}) = Thp_1(s_j, s_{-1}) - \frac{\lambda}{c}(\gamma_j + A).$$

Запишем условие доминирования первой стратегии:

$$Thp_1(s_1, s_{-1}) - \frac{\lambda}{p}(\gamma_1 + A) > Thp_1(s_j, s_{-1}) - \frac{\lambda}{p}(\gamma_j + A),$$

$$\frac{(1+\beta_1)p}{2(1 + A/\gamma_1)} - \frac{(1+\beta_j)p}{2(1 + A/\gamma_j)} > \frac{\lambda}{p}(\gamma_1 - \gamma_j),$$

$$\lambda < \frac{p^2}{\gamma_1 - \gamma_j}\left[\frac{(1+\beta_1)}{2(1 + A/\gamma_1)} - \frac{(1+\beta_j)}{2(1 + A/\gamma_j)}\right],$$

$$\lambda < \min_{j=2, .., N} \min_{A} \frac{p^2}{\gamma_1 - \gamma_j}\left[\frac{(1+\beta_1)}{2(1 + A/\gamma_1)} - \frac{(1+\beta_j)}{2(1 + A/\gamma_j)}\right].$$

Поскольку выражение справа всегда больше нуля и минимум берется по конечному множеству, то при достаточно малом λ первая стратегия доминирующая и утверждение доказано.

Следствие 1. При достаточном увеличении параметра λ доминирующей становится наиболее мирная стратегия.

Следствие 2. Если для модели Климова существует $\lambda \geq 0$, для которого выполняется неравенство $\lambda < \min\limits_{j=2, ..., N} \min\limits_{A} \dfrac{q_1 p^2}{2(\gamma_1 - \gamma_j)}\left[\dfrac{(1+\beta_1)}{1/q_1 + A/\gamma_1} - \dfrac{(1+\beta_j)}{1/q_1 + A/\gamma_j}\right]$, то наиболее агрессивный протокол является доминирующей стратегией.

Доказательство. Записывая условие доминирования для модели Климова и проводя аналогичные выкладки, получаем необходимый результат.

Обобщение на случай общего положения. В работах [9, 18, 19] проведены исследования, обобщающие анализ игры в ситуациях, которые не сводятся к отношению протоколов агрессивный–мирный. Сформулируем и докажем несколько утверждений, развивающих описанный подход.

Утверждение 4. Пусть выполнено равенство $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_N = \gamma$, тогда точка равновесия Неша (в чистых стратегиях) определяется максимальным значением параметра β для любой из рассмотренных топологий сети.

Доказательство. Действительно, рассмотрим выигрыш i-го игрока для произвольного набора стратегий $s = (s_1, ..., s_N)$:

$$J_i(s) = \frac{(1+\beta_i)x_i^*}{2} - \frac{\lambda}{T(s)} = \frac{(1+\beta_i)\gamma T}{2} - \frac{\lambda}{T},$$

где T — некоторый период особого решения, определяемый топологией сети. Наибольший выигрыш будет соответствовать наибольшему β_i.

Следствие. Таким образом, в игре с одинаковыми характеристиками протоколов $\gamma = \dfrac{\alpha}{1-\beta}$ с заданной выше целевой функцией больший выигрыш получают игроки с бóльшим параметром — β и меньшим — α. Это интуитивно понятный результат, поскольку при построении целевой функции не учитывался переходный процесс в стационарную точку динамической системы (2).

Утверждение 5. Пусть для топологии с одним сервером выполнены условия $\gamma_1 > \gamma_2 > ... > \gamma_N$ и $(1+\beta_1)(\gamma_j + (N-1)\gamma_1) > (1+\beta_j)\gamma_j N$ для всех $j = 2, ..., N$, тогда при достаточно малом $\lambda > 0$ равновесием Неша будет набор стратегий, соответствующий γ_1.

Доказательство. Действительно, поскольку игра симметрична, рассмотрим выигрыш первого игрока для случая, когда все пользователи выбрали стратегию s_1. В этом случае $J_1(s_1,...,s_1) = \dfrac{(1+\beta_1)p}{2N} - \dfrac{\lambda N\gamma_1}{p}$. При изменении стратегии первым игроком его выигрыш равен:

$$J_1(s_j, s_1, ..., s_1) = \frac{(1+\beta_j)\gamma_j p}{2(\gamma_j + (N-1)\gamma_1)} - \frac{\lambda(\gamma_j + (N-1)\gamma_1)}{p}.$$

Записывая условие равновесия, получаем

$$\frac{(1+\beta_1)p}{2N} - \frac{\lambda N\gamma_1}{p} > \frac{(1+\beta_j)\gamma_j p}{2(\gamma_j + (N-1)\gamma_1)} - \frac{\lambda(\gamma_j + (N-1)\gamma_1)}{p} \times$$

$$\times \frac{(1+\beta_1)(\gamma_j + (N-1)\gamma_1) - (1+\beta_j)\gamma_j}{2N(\gamma_j + (N-1)\gamma_1)} > \frac{\lambda(\gamma_1 - \gamma_j)}{p^2}.$$

Если правая часть больше нуля, то существует достаточно малое $\lambda > 0$, при котором это неравенство выполнено для любого $j \in \{1, ..., N\}$.

 ISSN 0572-2691

4. Имитационное моделирование взаимодействия протоколов

Моделирование выполнено на базе имитационной модели на языке Java. Построена модель взаимодействия двух пользователей с топологиями единственный сервер и модель Климова. Результаты модели для единственного сервера с параметрами $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0{,}6$ использовались для получения следующих графиков (рис. 2). При этом размер буфера установлен равным 100 пакетов, а пропускная способность общего канала C — 1000 пакетов в секунду. Усредненные значения скоростей пользователей равны согласно теоретической модели

$$x_1^* = \frac{4C}{9},\ x_2^* = \frac{5C}{9}.$$

При этом решения будут сходиться к периодическому решению, которое колеблется между точками $\left(\frac{4C}{9}, \frac{5C}{9}\right)$ и $\left(\frac{2C}{9}, \frac{3C}{9}\right)$.

На рис. 2 показано деление ресурсов канала (справа) и изменение скорости во времени (слева). На правом графике видны флуктуации, которые приводят к отклонениям от стабильной работы сети, тем не менее алгоритм TCP после небольшого переходного периода возвращается к теоретически предсказанному распределению ресурсов (показаны горизонтальными линиями). На правом графике изменение зависимости скоростей более темное в зависимости от времени, можно наблюдать сходимость к особому периодическому решению, показанному в виде черного отрезка.

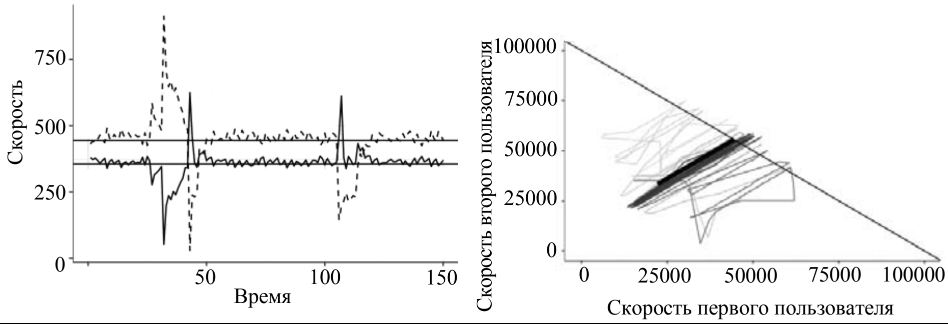

Рис. 2

Заключение

В настоящей работе исследован класс игровых взаимодействий в компьютерных сетях, которые описываются импульсными дифференциальными уравнениями. Для такой предметной области представляет интерес моделирование поведения пользователей, каждый из которых стремится максимизировать свою функцию полезности. Сформулирована игра, в которой стратегиями являются протоколы, определяющие скорость передачи данных пользователями. Для этой игры получены различные условия, характеризующие возможные точки равновесия системы и проведено имитационное моделирования для обоснования применимости теоретических результатов.

О.П. Ігнатенко

ТЕОРЕТИКО-ІГРОВА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ КОРИСТУВАЧІВ У КОМП'ЮТЕРНИХ МЕРЕЖАХ

Досліджено клас конфліктно-керованих моделей взаємодії користувачів у мережі. Динаміку гри описано імпульсними диференціальними рівняннями.

Керуваннями гравців є протоколи передачі даних. Доведено існування і єдиність точки рівноваги, побудовано матрицю мережевої гри та знайдено характеристики точки рівноваги залежно від параметра чутливості користувачів до наявності помилок. Результати підтверджені імітаційним моделюванням.

A.P. Ignatenko

GAME-THEORETIC MODEL OF USERS INETERACTION IN COMPUTER NETWORKS

The class of conflict-controlled models of users interaction in computer networks is investigated. The game dynamics is described by impulse differential equations. The existence and uniqueness of solution is proved. The matrix of network game is constructed and characteristics of equilibrium point depending on users sensitivity parameter to congestion events are found. The results are illustrated by simulations.

1. *Srikant R.* The mathematics of Internet congestion control. — Springer Science & Business Media, 2012. — 163 p.
2. *Zhu Han, Dusit Niyato, Walid Saad, Tamer Başar, Are Hjørungnes.* Game theory in wireless and communication networks. — Cambridge University Press, 2012.— 537 p.
3. *Samson L.*, *Tembine H.* Game theory and learning for wireless networks: fundamentals and applications. — Academic Press, 2011. — 328 p.
4. *Kelly Frank P., Aman K. Maulloo, David KH Tan*. Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability // Journal of the Operational Research society. — 1998 — P. 237–252.
5. *Mo J., Walrand J.* Fair end-to-end window-based congestion control // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 2000. — **8**. — P. 556–567.
6. *Paganini F., Doyle J.C., Low S.H.* Scalable laws for stable network congestion control // Proc. of IEEE Conference on Decision and Control. — 2001. — **1.** — P. 185–190.
7. *Low S.H., Srikant R.* A mathematical framework for designing a low-loss, low-delay Internet // Network and Spatial Economics. — 2004. — **4** (1). — P. 75–102.
8. *Altman E., El-Azouzi R., Hayel Ye., Tembine H.* The evolution of transport protocols: An evolutionary game perspective // Computer Networks. — 2009. — **53**, N 10. — P. 1751–1759.
9. *Ignatenko O., Synetskyi O.* Evolutionary game of N competing AIMD connections // International Conference on Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications. — Springer International Publishing, 2014. — P. 325–342.
10. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 65 с.
11. *Чикрий А.А.* Конфликтно–управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
12. *Chikriy A.A., Kalashnikova S.F.* Pursuit of a group of evaders by single controlled object // Cybernetics. — 1987. — **23**, N 4. — P. 437–445.
13. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2009. — **15**, № 4. — С. 290–301.
14. *Андон Ф.И., Игнатенко А.П.* Моделирование конфликтных процессов в Интернете // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 4. — С. 153–162.
15. *Meyn S.* Control Techniques for Complex Networks. — Cambridge University Press, 2007. — 582 p.
16. *Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А.*. Динамические игры с разрывными траекториями. — Киев. : Наук. думка. — 2005. — 220 с.
17. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев : Вища школа, 1987. — 288 с.
18. *Ігнатенко О.П., Іваненко П.А., Синецький О.Б., Ніколенко О.В.* Ігрова модель взаємодії користувачів у гетерогенних розподілених середовищах // Проблеми програмування. — 2015. — № 3. — С. 14–16.
19. *Ігнатенко О.П., Молчанов О.А.* Еволюційні ігри в TCP мережах з політиками обмеження швидкості // Там же. — 2016. — № 4. — С. 25–36.

Получено 19.04.2017