УДК 517.977

Л.В. Барановская

О КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГРАХ СБЛИЖЕНИЯ

В теории динамических игр разработан ряд фундаментальных методов [1, 2], ставших уже классическими.

В данной работе в качестве предмета исследований выбран метод разрешающих функций [3], который широко применяется для исследования конфликтно-управляемых процессов различной природы. Так, в [3, 4] изучаются процессы с дробными производными, в [5] — игровые задачи поочередного сближения, в работе [6] дается общая схема метода разрешающих функций, прикладная задача о мягкой встрече решена в [7], случай интегральных ограничений изучен в [8], а в работе [9] предложен вариант матричных разрешающих функций.

В настоящей статье рассматривается аналитический метод решения при фазовом векторе и векторе запаздывания дифференциально-разностных игр преследования с перестановочными матрицами. При этом используется интегральное представление решения на основе запаздывающего экспоненциала [10]. Для локальной задачи преследования построена соответствующая схема метода разрешающих функций [3]. Даны достаточные условия завершения игры, которые иллюстрируются на модельном примере. Статья примыкает к работам [11, 12] и продолжает исследования [13].

Пусть R^n — конечномерное евклидово пространство, $K(\mathrm{R}^n)$ — совокупность непустых компактов пространства R^n, $\mathrm{co}K(\mathrm{R}^n)$ — совокупность непустых выпуклых компактов.

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau) + \phi(u, v),\ \ z \in \mathrm{R}^n,\ \ u \in U,\ \ v \in V, \tag{1}$$

где A, B — постоянные перестановочные квадратные матрицы порядка n; $U, V \in K(\mathrm{R}^n)$; $\phi : U \times V \to \mathrm{R}^n$, функция ϕ непрерывна по совокупности переменных, $\tau = \mathrm{const} > 0$.

Начальным состоянием системы (1) является абсолютно непрерывная функция

$$z(t) = z^0(t), \tag{2}$$

определенная на отрезке $[-\tau; 0]$.

Рассмотрим решение задачи Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (1), с соответствующей ей однородной системой

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau). \tag{3}$$

Согласно свойствам линейных систем решение задачи Коши (1), (2) можно записать в виде суммы $z(t) = z_0(t) + z_н(t)$ решения $z_0(t)$ однородной системы, которая удовлетворяет начальному условию (2), и решения $z_н(t)$ неоднородной системы, удовлетворяющей нулевым условиям $z(t) \equiv \Theta,\ -\tau \le t \le 0,\ \Theta$ — нулевая матрица порядка n.

Известно, что решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{z}(t) = Az(t),\ z \in \mathrm{R}^n,\ t \ge 0,\ z(0) = z_0$$

можно записать в виде матричного экспоненциала $z(t) = z_0 \exp\{At\}$, где $\exp\{At\} = I + A\frac{t}{1!} + A^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + A^n\frac{t^n}{n!} +, \ldots,\ I$ — единичная матрица порядка n.

Определение [10]. Запаздывающим экспоненциалом $\exp_\tau\{B, t\}$ называется матричная функция, которая имеет вид

$$\exp_\tau\{B,t\} = \begin{cases} \Theta,\ -\infty < t < -\tau; \\ I,\ -\tau \le t < 0; \\ I + B\frac{t}{1!} + B^2\frac{(t-\tau)^2}{2!} + \ldots + B^k\frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}, (k-1)\tau \le t \le k\tau \end{cases} \tag{4}$$

полинома степени k, «склеенного» в узлах $t = k\tau,\ k = 1, 2, \ldots$

Лемма 1 [10]. Пусть матрицы A и B однородной системы (3) перестановочны. Тогда решение задачи Коши (2), (3) имеет вид

$$z_0(t) = \exp\{A(t+\tau)\}\exp_\tau\{B_1, t-\tau\}z^0(-\tau) +$$

$$+\int_{-\tau}^{0}\exp\{A(t-\tau)\}\exp_\tau\{B_1, t-\tau-s\}[\dot{z}^0(s) - Az^0(s)]ds \tag{5}$$

и матрица

$$F(t) = \exp\{At\}\exp_\tau\{B_1, t\},\ t \ge 0, \tag{6}$$

где $B_1 = \exp\{-A\tau\}B$, является решением системы (3), удовлетворяющим начальному условию $F(t) \equiv \exp\{At\},\ -\tau \le t \le 0$.

Замечание 1. Из определения матричного экспоненциала (4) и условия перестановочности матриц A и B имеем

$$\exp\{At\}B = B + AB\frac{t}{1!} + A^2B\frac{t^2}{2!} + \ldots + A^nB\frac{t^n}{n!} + \ldots =$$

$$= B + BA\frac{t}{1!} + BA^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + BA^n\frac{t^n}{n!} + \ldots = B\exp\{At\}.$$

Замечание 2. Используя перестановочность матриц A и B, равенство (5) можно переписать в виде

$$z_0(t) = \exp\{At\}[F(t)z^0(-\tau) + \int_{-\tau}^{0}F(t-\tau-s)[\dot{z}^0(s) - Az^0(s)]ds].$$

 ISSN 0572-2691

Лемма 2 [10]. Решение $z_н(t)$ неоднородной системы (1) с перестановочными матрицами A и B, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, для $t \geq 0$ имеет вид

$$z_н(t) = \int_0^t \exp\{A(t-\tau-s)\}\exp_\tau\{B_1, t-\tau-s\}\,\phi(u(s), v(s))ds.$$

Лемма 3 [10]**.** Решение системы (1) с перестановочными матрицами A и B, удовлетворяющее начальному условию (2), имеет вид

$$z(t) = \exp\{A(t+\tau)\}\exp_\tau\{B_1, t-\tau\}z^0(-\tau) + \int_{-\tau}^0 \exp\{A(t-\tau)\}\exp_\tau\{B_1, t-\tau-s\}\times$$

$$\times[\dot{z}^0(s) - Az^0(s)]ds + \int_0^t \exp\{A(t-\tau-s)\}\exp_\tau\{B_1, t-\tau-s\}\,\phi\,(u(s), v(s))\,ds.$$

Решение $z(t)$ может быть представлено в виде

$$z(t) = F(t)a + \int_{-\tau}^0 F(t-\tau-s)b(s)ds + \int_0^t F(t-\tau-s)\phi(u(s), v(s))ds, \tag{7}$$

где

$$a = \exp\{A\tau\}z^0(-\tau),\ \ b(t) = \exp\{A\tau\}[\dot{z}^0(t) - Az^0(t)], \tag{8}$$

$F(t)$ определена равенством (6).

Запаздывающий экспоненциал $\exp_\tau\{B, t\}$ — непрерывная функция при $t \geq 0$. Это автоматически выплывает из представления

$$\exp_\tau\{B,t\} = \begin{cases} \Theta, & -\infty < t < -\tau; \\ I, & -\tau \leq t < 0; \\ I + B\dfrac{t}{1!}, & 0 \leq t < \tau; \\ I + B\dfrac{t}{1!} + B^2\dfrac{(t-\tau)^2}{2!}, & \tau \leq t < 2\tau; \\ I + B\dfrac{t}{1!} + B^2\dfrac{(t-\tau)^2}{2!} + B^3\dfrac{(t-2\tau)^3}{3!}, & 2\tau \leq t < 3\tau; \\ \ldots & \ldots \\ I + B\dfrac{t}{1!} + B^2\dfrac{(t-\tau)^2}{2!} + \ldots + B^k\dfrac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t \leq k\tau. \end{cases}$$

Поэтому и матричная функция $F(t) = \exp\{At\}\cdot\exp_\tau\{B_1, t\}$ является непрерывной функцией на полуоси $[0; +\infty)$.

Рассмотрим задачу сближения, заданную системой дифференциально-разностных уравнений (1), удовлетворяющую начальным условиям (2) и условию перестановочности матриц A и B.

Терминальное множество является цилиндрическим и имеет вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{9}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, M — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M_0. Состоянием системы (1) в момент t является отрезок траектории $z^t(\cdot) = \{z(t+s),\ -\tau \leq s \leq 0\}$.

Цель преследователя (u) — вывести траекторию процесса (1), (2) на терминальное множество M^* за кратчайшее время, цель убегающего (v) — уклонить траекторию от встречи с этим множеством на всем полубесконечном интервале времени $t \geq 0$ или, если это невозможно, максимально оттянуть момент встречи.

Обозначим Ω_V совокупность измеримых по Лебегу функций $v(t), v(t) \in V$, $t \geq 0$. Аналогично определяется Ω_U. Отображение, действующее из R^n в Ω_V, назовем программной стратегией убегающего, а ее конкретную реализацию при заданном начальном состоянии $z^0(\cdot)$ процесса (1), (2) — программным управлением. В ходе игры (1), (2) убегающий использует программные управления $v(\cdot) \in \Omega_V$. Контруправлением преследователя, которое соответствует начальному состоянию $z^0(\cdot)$, назовем функцию $u(t) = u(z^0(\cdot), t, v(t))$, $t \geq 0$, такую, что если $v(\cdot) \in \Omega_V$, то $u(\cdot) \in \Omega_U$. Контруправление предписывается стробоскопической стратегией Хайека [17].

Если игра происходит на интервале $[0, T]$, то будем считать, что преследователь выбирает управление вида

$$u(t) = \begin{cases} u_1(z^0(\cdot), t, v(t)), & t \in [0, t_*]; \\ u_2(z^0(\cdot), t, v(t)), & t \in [t_*, T], \end{cases}$$

где $[0, t_*)$ — активный участок, $[t_*, T]$ — пассивный участок, а $t_* = t_*(v(\cdot))$ — момент переключения с одного закона выбора контруправления на другой, зависящий от предыстории управления убегающего. На первом участке работает собственно метод разрешающих функций [3], на втором — первый прямой метод Л.С. Понтрягина [1].

Таким образом, в целом управление преследователя строим в виде $u(t) = u(z^0(\cdot), t, v_t(\cdot))$, $t \geq 0$, где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t],\ v(\cdot) \in \Omega_V\}$, причем $u(\cdot) \in \Omega_U$. В этом случае говорят об использовании квазистратегий [2].

В этих предположениях, приняв сторону преследователя, найдем достаточные условия на параметры процесса (1), (2) для приведения траектории (1) на множество M^* (9) за некоторое гарантированное время (локальная задача преследования).

Пусть π — ортопроектор, действующий из R^n в L. Рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, v) = \pi F(t) \phi(U, v),\ \ W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v),$$

где $F(t)$ определена равенством (6).

Условие Понтрягина. Отображение $W(t) \neq \varnothing$ для всех $t \geq 0$. Так как в силу предположений о параметрах процесса (1), (2) многозначное отображение $W(t, v)$ непрерывно на множестве $[0, +\infty) \times V$, то $W(t)$ полунепрерывно сверху, а значит, борелевское [15], к тому же оно замкнутозначно.

Согласно теореме измеримого выбора [16] существует хотя бы один борелевский селектор $g(t)$, $g(t) \in W(t)$, $t \geq 0$. Обозначим $G = \{g(\cdot) : g(t) \in W(t),\ t \geq 0\}$ совокупность борелевских селекторов многозначного отображения $W(t)$. Зафиксируем некоторый элемент $g(\cdot) \in G$ и положим

$$\xi(t, z^0(\cdot), g(\cdot)) = \pi F(t) a + \int_{-\tau}^{0} \pi F(t - \tau - s) b(s) ds + \int_0^t g(s) ds,$$

где $F(t)$ определена равенством (6), a, $b(t)$ — равенством (8).

Рассмотрим функцию

$$\alpha(t,\, s,\, z^0(\cdot),\, m,\, v,\, g(\cdot)) = \alpha_{W(t-\tau-s,\ v)-g(t-\tau-s)}(m - \xi(t,\, z^0(\cdot),\, g(\cdot)))$$

для $t \ge s \ge 0$, $v \in V$, $g(\cdot) \in G$, $m \in M$, $x \in \mathrm{R}^n$.

В силу свойств суперпозиции многозначных отображений и функций она борелевская по совокупности s, v [3].

Положив $\alpha(t,\, s,\, z^0(\cdot),\, v,\, g(\cdot)) = \max\limits_{m \in M} \alpha(t,\, s,\, z^0(\cdot),\, m,\, v,\, g(\cdot))$, получим равенство

$$\alpha(t,\, s,\, z^0(\cdot),\, v,\, g(\cdot)) = \sup\{\alpha \ge 0 : [W(t-\tau-s,\, v) - g(t-\tau-s)] \cap$$

$$\cap\, \alpha[M - \xi(t,\, z^0(\cdot),\, g(\cdot))] \ne \varnothing\}. \qquad (10)$$

Функцию (10) назовем разрешающей по аналогии с [3]. Отсюда вытекает утверждение: для того чтобы функция $\alpha(t,\, s,\, z^0(\cdot),\, v,\, g(\cdot)) \in M$ равнялась $+\infty$ тождественно по $s \in [0,\, t]$, $v \in V$, необходимо и достаточно, чтобы $\xi(t,\, z^0(\cdot),\, g(\cdot)) \in M$. Если же $\xi(t,\, z^0(\cdot),\; g(\cdot)) \notin M$, то разрешающая функция (10) принимает конечные значения.

Введем функцию

$$T(z^0(\cdot),\, g(\cdot)) = \inf\left\{ t \ge 0 : \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t,\, s,\, z^0(\cdot),\, v,\, g(\cdot))\, ds \ge 1 \right\},\ \ g(\cdot) \in G. \qquad (11)$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется для всех $t \ge 0$, то будем полагать $T(z^0(\cdot),\; g(\cdot)) = +\infty$.

Теорема. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) с начальным состоянием (2) и перестановочными матрицами A и B выполнено условие Понтрягина, множество M выпукло, для начального состояния $z^0(\cdot)$ и некоторого селектора $g^0(\cdot) \in G$ $T = T(z^0(\cdot),\, g^0(\cdot)) < +\infty$.

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена из начального состояния $z^0(\cdot)$ на терминальное множество M^* в момент T с использованием подходящей квазистратегии.

Доказательство. Пусть $v(\cdot) \in \Omega_V$. Рассмотрим сначала случай $\xi(t,\, z^0(\cdot),$ $g^0(\cdot)) \notin M$. Введем контрольную функцию

$$h(t) = h(T,\, t,\, s,\, z^0(\cdot),\, v(\cdot),\, g^0(\cdot)) = 1 - \int_0^t \alpha(T,\, s,\, z^0(\cdot),\, v(s),\, g^0(\cdot))\, ds, \quad t \ge 0.$$

Функция $h(t)$ непрерывна, не возрастает и $h(0) = 1$.

Из определения момента T следует, что существует такой момент $t_* = t_*(v(\cdot))$, $0 < t_* \le T$, что $h(t_*) = 0$. Как отмечалось выше, момент переключения t_* разбивает процесс преследования на активный и пассивный участки. Таким образом, в момент переключения с одного закона выбора управления на другой контрольная функция будет равняться нулю.

Укажем способ выбора управления преследователя на этих участках.

Введем многозначное отображение

$$U_1(s, v) = \{u \in U : \pi F(t-\tau-s)\, \phi(u,\, v) - g^0(T-\tau-s) \in$$

$$\in \alpha(T,\, s,\, z^0(\cdot),\, v(s),\, g^0(\cdot))[M - \xi(T,\, z^0(\cdot),\, g^0(\cdot))]\,\}. \qquad (12)$$

В силу предположений о параметрах процесса (1), (2) и свойств разрешающей функции следует, что отображение $U_1(s, v)$ является борелевским на множестве $[0, +\infty)\times V$ [13]. Тогда его селектор

$$u_1(s, v) = \operatorname{lexmin} U_1(s, v) \tag{13}$$

— борелевская функция по совокупности переменных [13].

Управление преследователя на интервале $[0, t_*)$ положим равным

$$u(s) = u_1(s, v(s)), \tag{14}$$

которое является измеримой функцией (по Лебегу) как суперпозиция внешней борелевской и измеримой функций.

На пассивном участке $[t_*, T]$ положим

$$\alpha(T, s, z^0(\cdot), v(s), g^0(\cdot)) \equiv 0, \;\; s \in [t_*, T].$$

Введем многозначное отображение

$$\begin{gathered} U_2(s, v) = \{u \in U : \pi F(T-\tau-s)\,\phi(u, v) - g^0(T-\tau-s) = 0\}, \\ s \in [t_*, T], \;\; v \in V, \end{gathered} \tag{15}$$

которое также является борелевским по совокупности переменных, и его селектор

$$u_2(s, v) = \operatorname{lexmin} U_2(s, v) \tag{16}$$

— борелевская по совокупности переменных функция.

Управление преследователя на пассивном интервале положим равным

$$u(s) = u_2(s, v(s)). \tag{17}$$

Пусть $\xi(t, z^0(\cdot), g^0(\cdot)) \in M$. Тогда управление преследователя на интервале $[0, T]$ выберем в виде (17).

Таким образом, определен закон управления преследователя для любой из возможных ситуаций. Покажем, что при этом траектория процесса (1) в момент T попадет на терминальное множество M^* при любых допустимых управлениях убегающего.

Из леммы 3 для системы (1), удовлетворяющей начальному условию (2), при условии перестановочности матриц A и B следует представление

$$\pi z(T) = \pi F(t)a + \int_{-\tau}^{0} \pi F(T-\tau-s)b(s)ds + \int_0^t \pi F(T-\tau-s)\,\phi(u(s), v(s))ds, \tag{18}$$

где $F(t)$ определена равенством (6), $a, b(t)$ — равенствами (8).

Проанализируем сначала случай $\xi(t, z^0(\cdot), g^0(\cdot)) \notin M$. Для этого прибавим и вычтем из правой части (18) вектор $\int_0^T g^0(T-\tau-s)ds$. Тогда, используя закон выбора управления преследователя (12)–(17), получим

$$\pi z(T) = \left[\pi F(T)\,a + \int_{-\tau}^{0} \pi F(T-\tau-s)\,b(s)\,ds + \int_0^T g^0(T-\tau-s)\,ds\right] +$$

$$+\int_0^T [\pi F(T-\tau-s)\,\phi(u(s), v(s)) - g^0(T-\tau-s)]ds \in \xi(T, z^0(\cdot), g^0(\cdot)) +$$

ISSN 0572-2691

$$+\int_0^T \alpha(T, s, z^0(\cdot), v, g^0(\cdot))[M-\xi(T, z^0(\cdot), g^0(\cdot))]ds = \xi(T, z^0(\cdot), g^0(\cdot)) +$$

$$+\int_0^T \alpha(T, s, z^0(\cdot), v, g^0(\cdot))Mds - \int_0^T \alpha(T, s, z^0(\cdot), v, g^0(\cdot))\,\xi(T, z^0(\cdot), g^0(\cdot))ds. \quad (19)$$

Поскольку согласно методу разрешающих функций $\alpha(T, s, z^0(\cdot),\ v(s), g^0(\cdot)) = 0$, $s \in [t_*, T]$, из (19) имеем

$$\pi z(T) \in \xi(T, z^0(\cdot), g^0(\cdot))\left[1-\int_0^{t_*} \alpha(T, s, z^0(\cdot), v(s), g^0(\cdot))ds\right]+$$
$$+\int_0^{t_*} \alpha(T, s, z^0(\cdot), v(s), g^0(\cdot))Mds.$$

Учитывая, что $\int_0^{t_*} \alpha(T, s, z^0(\cdot), v(s), g^0(\cdot))ds = 1$ и множество M выпукло, окончательно получим $\pi z(T) \in M$.

Пусть $\xi(T, z^0(\cdot), g^0(\cdot)) \in M$. Тогда, учитывая закон выбора управления преследователя, из представления (18) сразу получим включение $\pi z(T) \in M$.

Следствие. Пусть конфликтно-управляемый процесс (1), (2) линеен $(\phi(u, v) = u - v)$, матрицы A и B перестановочны, выполнено условие Понтрягина, существует непрерывная положительная функция $r(t)$, $r: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, число $l \geq 0$, такие, что $\pi F(t)U = r(t)S$, $M = lS$, где $F(t)$ определена равенством (6), S — единичный шар пространства L с центром в нуле.

Тогда разрешающая функция $\alpha(T, s, z^0(\cdot), v, g(\cdot))$, определенная равенством (10), при $\xi(T, z^0(\cdot), g(\cdot)) \notin lS$ является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$\| \pi F(t-\tau-s)v + g(t-\tau-s) - \alpha \cdot \xi(t, z^0(\cdot), g(\cdot)) \| r(t-\tau-s) + \alpha l \quad (20)$$

относительно $\alpha > 0$.

Доказательство. Из выражения (10) с учетом условия имеем, что разрешающая функция $\alpha(T, s, z^0(\cdot), v, g(\cdot))$ при фиксированных значениях аргументов является таким максимальным числом α, что

$$[r(t-\tau-s)S - \pi F(t-\tau-s)v - g(t-\tau-s)] \cap \alpha[lS - \xi(t, z^0(\cdot), g(\cdot))] \neq \varnothing.$$

Последнее равносильно включению

$$\pi F(t-\tau-s)v + g(t-\tau-s) - \alpha \cdot \xi(t, z^0(\cdot), g(\cdot)) \in [r(t-\tau-s) + \alpha l]S.$$

В силу линейности здесь левой части по α при максимальном α вектор

$$\pi F(t-\tau-s)v + g(t-\tau-s) - \alpha \cdot \xi(t, z^0(\cdot), g(\cdot))$$

будет лежать на границе шара $[r(t-\tau-s) + \alpha l]S$, т.е. длина вектора будет равна радиусу шара, что и выражено равенством (20).

Пример. Пусть движения преследователя и убегающего описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot z_1(t) &= z_1(t) - u(t),\ z_1 \in \mathrm{R}^n, \\ \dot z_2(t) &= z_2(t-1) + v(t),\ z_2 \in \mathrm{R}^n, \end{aligned} \quad (21)$$

где $u(t), v(t)$ — n-мерные векторы из R^n, удовлетворяющие условиям $\| u \| \leq 2$, $\| v \| \leq 1$.

В качестве терминального множества M^* в R^{2n} берется линейное подпространство, состоящее из векторов $z=(z_1, z_2)$, удовлетворяющее условию $z_1 = z_2$.

Начальное состояние системы положим равным абсолютно непрерывной функции

$$z^0(t) = (z_1^0(t), z_2^0(t)), \ -1 \le t \le 0.$$

Очевидно, что $L = \{z \in \mathrm{R}^{2n} : z = (z_1, z_2), z_2 = -z_1\}$; ортопроектор π задается матрицей $\pi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}$, где I_n — единичная матрица порядка n.

Запишем уравнения (21) в виде системы (1), где матрицы $A = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$, под нулями подразумеваются нулевые матрицы n-го порядка:

$$\dot z(t) = Az(t) + Bz(t-1) + u(t) - v(t).$$

Области управления —

$$U = \left\{\begin{pmatrix} -u(t) \\ 0 \end{pmatrix} : u \in \mathrm{R}^n, \|u\| \le 2\right\}, \ V = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -v(t) \end{pmatrix} : v \in \mathrm{R}^n, \|v\| \le 1\right\}.$$

Здесь матрицы A и B перестановочные,

$$AB = BA = 0, \ A^n = A, \ B^n = B. \tag{22}$$

Определим функциональную матрицу $F(t)$ из равенства (6), являющегося решением однородной системы

$$\begin{bmatrix} \dot F_{11}(t) & \dot F_{12}(t) \\ \dot F_{21}(t) & \dot F_{22}(t) \end{bmatrix} \otimes I_n = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) \end{bmatrix} \otimes I_n +$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{11}(t-1) & F_{12}(t-1) \\ F_{21}(t-1) & F_{22}(t-1) \end{bmatrix} \otimes I_n = \begin{bmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ F_{21}(t-1) & F_{22}(t-1) \end{bmatrix} \otimes I_n$$

и удовлетворяющего начальному условию $F(t) = \exp\{At\}, \ -1 \le t \le 0.$

Из равенства (6) с учетом (22) получим

$$B_1 = \exp\{-A\}B = (I - A + \frac{A^2}{2!} - \frac{A^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{A^n}{n!} + \ldots) \cdot B = B.$$

Тогда

$$F(t) = \exp\{At\}\exp_\tau\{B, t\} = \left(I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \ldots + A^n\frac{t^n}{n!} + \ldots \right) \times$$

$$\times \left(I + Bt + B^2\frac{(t-1)^2}{2!} + B^3\frac{(t-2)^3}{3!} + \ldots + B^n\frac{(t-(n-1))^n}{n!} + \ldots \right) = I + Bt +$$

ISSN 0572-2691

$$+B^2\frac{(t-1)^2}{2!}+B^3\frac{(t-2)^3}{3!}+\ldots+B^n\frac{(t-(n-1))^n}{n!}+\ldots+At+A^2\frac{t^2}{2!}+$$

$$+A^3\frac{t^3}{3!}+\ldots+A^n\frac{t^n}{n!}+\ldots=\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & F_{22}(t)\end{bmatrix}\otimes I_n,$$

где числовая функция

$$F_{22}(t)=\exp_1\{I_n,t\}=1+\frac{t}{1!}+\frac{(t-1)^2}{2!}+\frac{(t-2)^3}{3!}+\ldots+\frac{(t-(k-1))^k}{k!},$$

$$(k-1)\le t\le k,\ k=0,1,2,\ldots \tag{23}$$

Таким образом, при $t\ge 0$ $F(t)=\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & F_{22}(t)\end{bmatrix}\otimes I_n.$

Выберем селектор $g(t)$ тождественно равным нулю. Проверим выполнение условия Понтрягина.

Для линейного процесса $W(t)=\pi F(t)U \underline{*} \pi F(t)V$ $\pi F(t)U$ представляет собой шар пространства L с центром в нуле и радиуса $l_1=\sqrt{2e^{2t}}$; $\pi F(t)V$ — шар пространства L с центром в нуле и радиуса $l_2=\frac{\sqrt{2}}{2}F_{22}(t).$ Таким образом, $W(t)$ — шар пространства L с центром в нуле и радиуса $l=l_1-l_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(2e^t-F_{22}(t)).$

Поскольку $F_{22}(t)$ растет не быстрее, чем $e^t=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}$, то $2e^t-F_{22}(t)\ge 0$ при $t\ge 0,$ поэтому $W(t)\ne\varnothing$ при $t\ge 0,$ следовательно, условие Понтрягина выполнено.

Положим $\xi(t,z^0(\cdot),0)=\pi F(t)a+\int_{-1}^{0}\pi F(t-1-s)b(s)ds,$ где $a=\exp\{A\}z^0(-1),$ $b(t)=\exp\{A\}[\dot z^0(t)-Az^0(t)].$ Тогда имеем

$$\xi(t,z^0(\cdot),0)=\exp\{A\}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}I_n & -\frac{1}{2}I_n\\ -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^tI_n & 0\\ 0 & F_{22}(t)I_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} z_1^0(-1)\\ z_2^0(-1)\end{bmatrix}+\exp\{A\}\times$$

$$\times\int_{-1}^{0}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}I_n & -\frac{1}{2}I_n\\ -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{t-1-s}I_n & 0\\ 0 & F_{22}(t-1-s)I_n\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}\dot z_1^0(s)\\ \dot z_2^0(s)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} I_n & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} z_1^0(-1)\\ z_2^0(-1)\end{bmatrix}\right)ds=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{A+t}z_1^0(-1)-\frac{1}{2}e^AF_{22}(t)z_2^0(-1)+\frac{e^A}{2}\int_{-1}^{0}\{e^{t-1-s}(\dot z_1^0(s)-z_1^0(s))-F_{22}(t-1-s)\dot z_2^0(s)\}ds\\ -\frac{1}{2}e^{A+t}z_1^0(-1)+\frac{1}{2}e^AF_{22}(t)z_2^0(-1)+\frac{e^A}{2}\int_{-1}^{0}\{e^{t-1-s}(\dot z_1^0(s)-z_1^0(s))-F_{22}(t-1-s)\dot z_2^0(s)\}ds\end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\xi(t,z^0(\cdot),0)=\begin{bmatrix} G(t)\\ -G(t)\end{bmatrix}$, т.е. является блочной функциональной матрицей порядка $2n\times 1,$ $z_1^0=(z_{11}^0,\ldots,z_{1n}^0)^T,$ $z_2^0=(z_{21}^0,\ldots,z_{2n}^0)^{\mathrm{T}}.$

Для нахождения разрешающей функции воспользуемся следствием. Выберем положительную непрерывную функцию $r(t)=\sqrt{2}e^t$ и число $l=0$. Тогда $\pi F(t)U = r(t)S$, $M = lS = 0$, где S — единичный шар пространства L с центром в нуле. Поскольку $\xi(t, z^0(\cdot), 0) \notin lS$, то функция $\alpha(t, s, z^0(\cdot), v, 0)$ согласно следствию 1 является большим положительным корнем квадратного уравнения $\| \pi F(t-1-s)v - \alpha \cdot \xi(t, z^0(\cdot), 0) \| r(t-1-s)$, которое перепишем в виде

$$\alpha^2 \| \xi(t, z^0(\cdot), 0) \|^2 - 2\alpha(\pi F(t-1-s)v, \xi(t, z^0(\cdot), 0)) +$$
$$+ \| \pi F(t-1-s)v \|^2 - r^2(t-1-s) = 0.$$

В результате получим

$$\alpha(t, s, z^0(\cdot), v, 0) = \frac{(\pi F(t-1-s)v, \xi(t, z^0(\cdot), 0))}{\| \xi(t, z^0(\cdot), 0) \|^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(\pi F(t-1-s)v, \xi(t, z^0(\cdot), 0))^2 - \| \xi(t, z^0(\cdot), 0) \|^2 \cdot (\| \pi F(t-1-s)v \|^2 - r^2(t-1-s))}}{\| \xi(t, z^0(\cdot), 0) \|^2}.$$

Поскольку

$$\pi F(t-1-s)v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} F_{22}(t-1-s)v_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2} F_{22}(t-1-s)v_n \\ -\frac{1}{2} F_{22}(t-1-s)v_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\frac{1}{2} F_{22}(t-1-s)v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} F_{22}(t-1-s) \cdot v \\ -\frac{1}{2} F_{22}(t-1-s) \cdot v \end{bmatrix}, \text{ где } v = (v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}}, \text{ то}$$

$$(\pi F(t-1-s)v, \xi(t, z^0(\cdot), 0) = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} F_{22}(t-1-s) \cdot v \\ -\frac{1}{2} F_{22}(t-1-s) \cdot v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G(t) \\ -G(t) \end{bmatrix} \right) =$$

$$= F_{22}(t-1-s)(v, G(t)), \ \| \pi F(t-1-s)v \|^2 = \frac{1}{2} F_{22}^2(t-1-s) \cdot \| v \|^2.$$

Также очевидно, что $\| \xi(t, z^0(\cdot), 0) \|^2 = 2\| G(t) \|^2$. Имеем

$$\alpha(t, s, z^0(\cdot), v, 0) = \frac{F_{22}(t-1-s)(v, G(t))}{2\| G(t) \|^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{F_{22}^2(t-1-s)(v, G(t))^2 - 2\| G(t) \|^2 \cdot \left(\frac{1}{2} F_{22}^2(t-1-s) \| v \|^2 - 2e^{2(t-1-s)} \right)}}{2\| G(t) \|^2}.$$

Минимум достигается на векторе $v = -\dfrac{G(t)}{\| G(t) \|}$ и равен

ISSN 0572-2691

$$\min_{\|v\|\le 1}\alpha(t,s,z^0(\cdot),v,0)=\frac{-F_{22}(t-1-s)\cdot\|G(t)\|}{2\|G(t)\|^2}+$$

$$+\frac{\sqrt{F_{22}^2(t-1-s)2\|G(t)\|^2-2\|G(t)\|^2\cdot(\frac{1}{2}F_{22}^2(t-1-s)-2e^{2(t-1-s)})}}{2\|G(t)\|^2}=$$

$$=\frac{-F_{22}(t-1-s)+2e^{t-1-s}}{2\|G(t)\|^2}.$$

Следовательно, из начального состояния $z^0(\cdot)$ можно завершить преследование за конечное время $T=T(z^0(\cdot),0)$, являющееся согласно (11) наименьшим положительным корнем уравнения

$$\left\| e^{A+t}z_1^0(-1)-e^AF_{22}(t)z_2^0(-1)+e^A\int_{-1}^0\left(e^{t-1-s}(\dot z_1^0(s)-z_1^0(s))-\right.\right.$$

$$\left.\left.-F_{22}(t-1-s)\dot z_2^0(s)\right)ds\right\|=\int_0^t(2e^s-F_{22}(s-1))ds, \qquad (24)$$

где $F_{22}(t)$ — многочлен N-й степени, выраженный равенством (23).

Решение уравнения (24) существует для любых начальных состояний $z^0(\cdot)$, $z_1^0(-1)\ne 0$. Действительно, в начальный момент левая часть (24) равна $\|z_1^0(-1)-z_2^0(-1)\|$, а правая — 0, причем $\|z_1^0(-1)-z_2^0(-1)\|>0$. Поскольку $F_{22}(t)$ — многочлен N-й степени на интервалах $N\le t\le N+1$, $N=0,1,\ldots$, то имеем эквивалентность

$$\left\| e^{A+t}z_1^0(-1)-e^AF_{22}(t)z_2^0(-1)+e^A\int_{-1}^0(e^{t-1-s}(\dot z_1^0(s)-\right.$$

$$\left.-z_1^0(s))-F_{22}(t-1-s)\dot z_2^0(s))ds\right\|\sim\|e^{A+t}\cdot z_1^0(-1)\|,$$

поскольку $\dfrac{P_N(t)}{e^t}\to 0,\ t\to\infty.$

Аналогично правая часть (24) при $t\to\infty$ эквивалентна $2(e^t-1)$. Старший член $2(e^t-1)$ справа в (24) растет быстрее, чем старший член слева. Таким образом, момент поимки завершен.

Укажем управление преследователя:

$$\pi F(T-1-s)u=-\alpha(T,s,z^0(\cdot),v,0)\cdot\xi(T,z^0(\cdot),0)+\pi F(T-1-s)v,$$

$$\pi F(T-1-s)u=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{T-1-s}\cdot I_n & -\frac{1}{2}F_{22}(T-1-s)\cdot I_n\\ -\frac{1}{2}e^{T-1-s}\cdot I_n & \frac{1}{2}F_{22}(T-1-s)\cdot I_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-u(s)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}e^{T-1-s}\cdot u(s)\\ \frac{1}{2}e^{T-1-s}\cdot u(s)\end{bmatrix},$$

где $u=(u_1,\ldots,u_n)^{\mathrm{T}},\ 0=\underbrace{(0,\ldots,0)}_{n}{}^{\mathrm{T}}.$

Поскольку в евклидовом пространстве R^n $(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}$, то

$$(v, \xi(t, z^0(\cdot), 0))=\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -v_1(t) \\ \vdots \\ -v_n(t) \end{bmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{A+t}z_{11}^0(-1)-\frac{1}{2}e^A F_{22}(t)z_{21}^0(-1)+\frac{e^A}{2}\int_{-1}^0 (e^{t-1-s}(\dot{z}_{11}^0(s)-z_{11}^0(s))-F_{22}(t-1-s)\dot{z}_{21}^0(s))ds \\ \vdots \\ \frac{1}{2}e^{A+t}z_{1n}^0(-1)-\frac{1}{2}e^A F_{22}(t)z_{2n}^0(-1)+\frac{e^A}{2}\int_{-1}^0 (e^{t-1-s}(\dot{z}_{1n}^0(s)-z_{1n}^0(s))-F_{22}(t-1-s)\dot{z}_{2n}^0(s))ds \\ -\frac{1}{2}e^{A+t}z_{11}^0(-1)+\frac{1}{2}e^A F_{22}(t)z_{21}^0(-1)-\frac{e^A}{2}\int_{-1}^0 (e^{t-1-s}(\dot{z}_{11}^0(s)-z_{11}^0(s))-F_{22}(t-1-s)\dot{z}_{21}^0(s))ds \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}e^{A+t}z_{1n}^0(-1)+\frac{1}{2}e^A F_{22}(t)z_{2n}^0(-1)-\frac{e^A}{2}\int_{-1}^0 (e^{t-1-s}(\dot{z}_{1n}^0(s)-z_{1n}^0(s))-F_{22}(t-1-s)\dot{z}_{2n}^0(s))ds \end{bmatrix}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}e^{A+t}z_{1i}^0(-1)-\frac{1}{2}e^A F_{22}(t)\,z_{2i}^0(-1)+\frac{e^A}{2}\int_{-1}^0 (e^{t-1-s}(\dot{z}_{1i}^0(s)-z_{1i}^0(s))-\right.$$
$$\left.-F_{22}(t-1-s)\dot{z}_{2i}^0(s))ds\right)v_i(s).$$

Обозначив

$$g_i(t)=\frac{1}{2}e^{A+t}z_{1i}^0(-1)-\frac{1}{2}e^A F_{22}(t)z_{2i}^0(-1)+$$

$$+\frac{e^A}{2}\int_{-1}^0 (e^{t-1-s}(\dot{z}_{1i}^0(s)-z_{1i}^0(s))-F_{22}(t-1-s)\dot{z}_{2i}^0(s))\,ds,$$

получим

$$\alpha(T, s, z^0(\cdot), v, 0)=\frac{F_{22}(T-1-s)\cdot\sum_{i=1}^{n} g_i(T)\cdot v_i(s)}{2\sum_{i=1}^{n} g^2{}_i(T)}+$$

$$+\frac{\sqrt{F_{22}^2(T-1-s)\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(T)\cdot v_i(s)\right)^2-2\sum_{i=1}^{n} g^2{}_i(T)\cdot\left(\frac{1}{2}F_{22}^2(T-1-s)\|v\|^2-2e^{2(T-1-s)}\right)}}{2\sum_{i=1}^{n} g^2{}_i(T)}.$$

Управление преследователя будет

 ISSN 0572-2691

$$
\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{T-1-s}\cdot u_1(s) \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}e^{T-1-s}\cdot u_n(s) \\ \frac{1}{2}e^{T-1-s}\cdot u_1(s) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}e^{T-1-s}\cdot u_n(s) \end{bmatrix} = -\alpha(T, s, z^0(\cdot), v, 0) \begin{bmatrix} g_1(T) \\ \vdots \\ g_n(T) \\ -g_1(T) \\ \vdots \\ -g_n(T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F_{22}(T-1-s)\cdot v_1(s) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}F_{22}(T-1-s)\cdot v_n(s) \\ -\frac{1}{2}F_{22}(T-1-s)\cdot v_1(s) \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}F_{22}(T-1-s)\cdot v_n(s) \end{bmatrix}
$$

или

$$
u_i(s) = 2e^{-(T-1-s)}\cdot\alpha(T,s,z^0(\cdot),v,0)\cdot g_i(T) - F_{22}(T-1-s)\cdot e^{-(T-1-s)}\cdot v_i(s). \qquad (25)
$$

Таким образом, если $t_* = t_*(v(\cdot))$ — момент переключения, являющийся нулем контрольной функции $1-\int_0^t \alpha(T, s, z^0(\cdot), v, 0)\,ds,$ то управление преследователя, реализующее время T, на интервале $[0, t_*)$ имеет вид $u(s) = (u_1(s), \dots, u_n(s))^{\mathrm{T}}$, где $u_i(s)$ определены равенством (25).

Таким образом, разработана схема метода разрешающих функций для класса дифференциально-разностных игр преследования с перестановочными матрицами для случая одного убегающего и одного преследователя. Найдены достаточные условия на параметры процесса для гарантированной поимки. Указан метод нахождения фундаментальной матрицы системы и способ построения разрешающей функции. Результаты проиллюстрированы на контрольном примере.

Л.В. Барановська

ПРО КВАЗІЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВІ ІГРИ ЗБЛИЖЕННЯ

Для дослідження диференціально-різницевих ігор зближення з переставними матрицями запропоновано аналітичний підхід на основі методу розв'язуючих функцій. При цьому використовується ідея інтегрального представлення розв'язку системи через запізнюючий експоненціал. Наведено достатні умови та гарантований час для завершення гри. Результати проілюстровано на прикладі.

L.V. Baranovska

ON QUASI-LINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE GAMES OF APPROACH

An analytic approach based on the method of resolving functions is suggested to study differential-difference games of approach with delay and commutative matrices. The use is made of the idea of integral representation system solution through time-lag exponential. The sufficient conditions and guaranteed time of the game completion are given. The results are illustrated by an example.

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — **2**. — 576 с.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
3. *Chikrii A.A.* Conflict-controlled processes. — Springer Science &Business Media, 2013. — 404 p. — doi: 10.1007/978-94-017-1135-7.
4. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
5. *Chikrii A.A.*, *Kalashnikova S.F.* Pursuit of a group of evaders by a single controlled object // Cybernetics. — 1987. — **23.** — N 4. — P. 437–445.
6. *Chikrii A.A.* Analytical method in dynamic pursuit games // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. —2010. — **271.** — P. 69–85.
7. *Albus J.*, *Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.J.* Analytical method for solution of the game problem of softlanding for moving objects // Cybernetics and systems analysis. — 2001. — **37**, N 1. — P. 75–91.
8. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2009. —**15**, № 4. — С. 290–301.
9. *Chikrii A.A., Chikrii G.Ts.* Matrix resolving functions in game problems of dynamics // Proceedings of the Steklov Institute of mathematics. — 2015. — **291**, N 1. — P. 56–65.
10. *Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Ружичкова М.* Линейные динамические системы с последействием. Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация. — Киев : ГП Информ.-аналит. агентство, 2015. — 252 с.
11. *Baranovska L.V.* Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects // Advance in Dynamical Systems and Control. — 2016. — P. 159–176. — doi: 10.1007/978-3-319-40673-2_7.
12. *Барановская Л.В.* Метод разрешающих функций для одного класса задач преследования // Восточно-европейский журнал передовых технологий. — 2015. — № 2/4 (74). — С. 4–8. — doi: 10.15587/1729-4061.2015.39355.
13. *Baranovskaya G.G., Baranovskaya L.V.* Group pursuit in quasilinear differential-difference games // Journal of Automation and Information Sciences. — 1997. — **29**, N 1. — P. 55–62.
14. *Барановская Л.В.* Первый прямой метод Л.С.Понтрягина для одной задачи преследования // Сборник научных трудов SWORLD. — 2015. — **21,** вып. 1(38). — С. 91–94.
15. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.
16. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.
17. *Hajek O.* Pursuit games. — N.Y.: Acad. Press, 1975. — **12.** — 266 p.

Получено 21.03.2017