УДК 53.01:53.05+519.2

*И.И. Горбань*

# ЧТО ТАКОЕ ТЕОРИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

## Введение

Среди различных физических закономерностей особое место занимает статистическая устойчивость — физический феномен, проявляющийся в стабильности относительной частоты массовых событий, средних величин и других статистик. В настоящее время известно две теории, описывающие этот феномен: классическая теория вероятностей и теория гиперслучайных явлений.

В рамках теории вероятностей массовые физические явления представляются случайными явлениями (моделями) — случайными событиями, величинами, процессами и полями. Характерные особенности случайной модели — ее масссовость (существование множества реализаций) и наличие вероятностной меры (вероятности), характеризующей частоту наступления любых возможных событий при неограниченно большом количестве реализаций. Массовые явления, которые не характеризуются вероятностной мерой, случайными не считаются.

Возможность использования случайных моделей для описания реалий окружающего мира основана на физической гипотезе идеальной статистической устойчивости, предполагающей сходимость (состоятельность) оценок параметров и характеристик реальных событий, величин, процессов и полей при бесконечно большом объеме выборки.

Теория вероятностей нашла широкое применение в различных областях науки и техники. Однако, как выяснилось, некоторые ее положения противоречат опытным данным. Характерный пример касается потенциальной точности измерений. Согласно теории вероятностей принципиальных ограничений точности измерений нет: увеличивая объем обрабатываемых данных, теоретически можно уменьшить погрешность до нуля. Но практика показывает, что реальная точность измерений всегда ограничена. Преодолеть определенный предел точности путем статистической обработки данных невозможно.

Исследование причин расхождения между теорией и практикой привело к пониманию, что проблема связана с необоснованной идеализацией феномена статистической устойчивости.

Результаты многочисленных экспериментальных исследований различных реальных физических процессов на больших интервалах наблюдения показывают, что реальные статистики свойством сходимости не обладают. При относительно небольшом объеме данных увеличение числа отсчетов приводит к уменьшению флуктуаций средних величин. Но при большом объеме эта тенденция не наблюдается: достигнув определенного значения, уровень флуктуаций практически не изменяется или даже растет.

Пока объемы обрабатываемых данных оставались относительно небольшими, классические модели и методы теории вероятностей полностью удовлетворяли потребностям практики, и вопрос о сходимости реальных статистик не поднимался. Однако в последнее время, с появлением новых задач, требующих обработки больших объемов данных, собираемых на больших интервалах наблюдения, ситуация изменилась. Для таких задач вопрос корректного учета нарушений статистической устойчивости чрезвычайно актуален. Исследование нарушений статистической устойчивости и разработка эффективных способов описания физических явлений с учетом этих нарушений привели к формированию теории гиперслучайных явлений.

Теория гиперслучайных явлений базируется на физической гипотезе ограниченной статистической устойчивости, предполагающей отсутствие сходимости оценок параметров и характеристик реальных событий, величин, процессов и полей.

В рамках теории гиперслучайных явлений массовые физические явления описываются гиперслучайными явлениями (моделями) — гиперслучайными событиями, величинами, процессами и полями, представляющими собой совокупности случайных явлений. В отличие от случайной модели, характеризуемой мерой, гиперслучайная модель характеризуется множеством мер.

Теория гиперслучайных явлений — физико-математическая теория. Объект ее исследования — физический феномен статистической устойчивости, а предмет исследования — способы адекватного его описания гиперслучайными моделями.

Математическая часть теории гиперслучайных явлений базируется на системе математических аксиом теории вероятностей, предложенной А.Н. Колмогоровым. Поэтому, с математической точки зрения, теория гиперслучайных явлений представляет собой ветвь классической теории вероятностей. Однако, с физической точки зрения, это новая теория, которая, в отличие от теории вероятностей, учитывает нарушения статистической устойчивости.

Термин «гиперслучайное явление» вошел в научную литературу лишь в 2005 г. [1], однако основы рассматриваемой теории начали формироваться еще на рубеже 70–80-х годов прошлого столетия. Исследованию нарушений статистической устойчивости и разработке теории гиперслучайных явлений посвящено уже немало публикаций — одних только монографий, как минимум, семь: четыре на русском языке [2–5], две на украинском [6, 7] и одна на английском [8]. В настоящее время готовится к изданию еще одна монография на английском языке [9].

В рамках теории гиперслучайных явлений разработана методика исследования нарушений статистической устойчивости. С ее помощью установлена зависимость статистической устойчивости случайных процессов от их спектрально-корреляционных характеристик. В результате экспериментальных исследований оценены интервалы статистической устойчивости ряда реальных процессов разной физической природы. Предложены способы описания реальных физических явлений с помощью гиперслучайных моделей. Разработаны варианты описания гиперслучайных событий, скалярных и векторных гиперслучайных величин, скалярных и векторных гиперслучайных функций и гиперслучайных функционалов. Обобщены понятия сходимости на случай последовательности гиперслучайных величин и гиперслучайных функций. Установлено, что свойства стационарности и эргодичности присущи в обобщенном смысле некоторым гиперслучайным процессам. Исследованы гиперслучайные процессы, обладающие марковскими свойствами. Получены формулы, позволяющие рассчитывать характеристики гиперслучайных величин и процессов при различных преобразованиях. Распространены методы математической статистики на гиперслучайные величины и процессы. Разработаны основы математического анализа расходящихся и многозначных функций. Доказаны обобщенный закон больших чисел и обобщенная центральная предельная теорема, справедливые как при отсутствии, так и при наличии сходимости. Проработан ряд прикладных вопросов.

Как видно, спектр рассмотренных вопросов широк. В одной обзорной статье ограниченного объема представить все направления невозможно.

Цель настоящей статьи — описать основные идеи, подходы и результаты теории гиперслучайных явлений на примере простейшей гиперслучайной модели — скалярной вещественной гиперслучайной величины.

## 1. Феномен статистической устойчивости

На феномен статистической устойчивости впервые обратил внимание в 1662 г. торговец сукном Дж. Граунт [10]. Сохранились отрывочные сведения об исследованиях статистической устойчивости, проводимых в период с конца XVII по конец XIX столетия Я. Бернулли, У. Пети, Х. Гюйгенсом, Д. Венном, С.Д. Пуассоном, И.Ж. Бьенеме, А. Курно, А. Кетле и др. [11–13]. Систематические исследования статистической устойчивости начались в конце XIX века. На рубеже столетий и в начале XX века исследованием статистической устойчивости занимались В. Лексис, К. Пирсон, А.А. Чупров, В.И. фон Борткевич, А.А. Марков, Р. фон Мизес и др. [12, 13]. Новый виток исследования феномена статистической устойчивости начался на рубеже 70–80-х лет прошлого столетия.

**Статистическая устойчивость относительной частоты событий.** Экспериментальными исследованиями устойчивости относительных частот различных реальных массовых событий занимались многие ученые: П.С. Лаплас, Г. Бюффон, К. Пирсон, лауреат Нобелевской премии Р. Фейнман, А. де Морган, В.С. Джевонс, В.И. Романовский, У. Феллер и др. В табл. 1 приведены некоторые результаты их экспериментов с подбрасыванием монеты [14–16]. На первый взгляд совершенно тривиальная задача для них таковой не представлялась.

Таблица 1

| № | Исследователь | Количество опытов | Число выпадений орла | Относительная частота выпадений орла |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Бюффон | 4 040 | 2 048 | 0,508 |
| 2 | Пирсон | 12 000 | 6 019 | 0,5016 |
| 3 | Пирсон | 24 000 | 12 012 | 0,5005 |
| 4 | Фейнман | 3 000 | 1 492 | 0,497 |
| 5 | Морган | 4 092 | 2 048 | 0,5005 |
| 6 | Джевонс | 20 480 | 10 379 | 0,5068 |
| 7 | Романовский | 80 640 | 39 699 | 0,4923 |
| 8 | Феллер | 10 000 | 4 979 | 0,4979 |

**Статистическая устойчивость статистик.** Феномен статистической устойчивости проявляется не только в устойчивости частоты массовых событий, но и в стабильности средних значений $y(t)$ различных процессов $x(t)$, а также в устойчивости их выборочных средних $y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и других статистик, в частности выборочного среднеквадратического отклонения (СКО) $z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_n)^2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — дискретные отсчеты рассматриваемого процесса $x(t)$.

Для примера на рис. 1, *а* приведен фрагмент записи эффективного (действующего) значения напряжения $x(t)$ городской электросети длительностью 1,8 ч, а на рис. 1, *б* — изменение выборочного среднего $y(t)$ колебания $x(t)$.

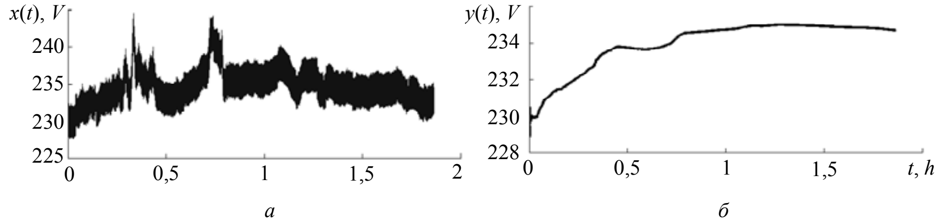


Рис. 1

Исследование большого количества разнообразных процессов показывает, что феномен статистической устойчивости проявляется при вычислении разных статистик различных случайных, детерминированных и реальных физических процессов, что свидетельствует о фундаментальном характере рассматриваемого феномена.

## 2. Варианты интерпретации феномена статистической устойчивости

**Идеальная статистическая устойчивость**. Анализируя табл. 1, рис. 1, *б* и множество других подобных результатов расчета статистик, естественно предположить, что при неограниченном увеличении объема выборки $n$ последовательность $p_1(A), p_2(A), \ldots$ относительных частот $p_n(A)$ любого реального массового события $A$ сходится к некоторой детерминированной величине $P(A)$ (вероятности), а последовательность $y_1, y_2, \ldots$ средних величин любого реального колебания $x(t)$ — к некоторой детерминированной величине $m$ (математическому ожиданию).

Современная теория вероятностей базируется на этом предположении — физической гипотезе идеальной статистической устойчивости статистик.

**Ограниченная статистическая устойчивость.** Долгое время считалось, что гипотеза идеальной статистической устойчивости адекватно отражает реальность. Однако ряд ученых (среди которых даже основоположник современной аксиоматической теории вероятностей А.Н. Колмогоров [17] и такие известные ученые как А.А. Марков [18], А.В. Скороход [19], Э. Борель [20], В.Н. Тутубалин [21] и др.) отмечали, что идеальная статистическая устойчивость справедлива лишь с определенными оговорками.

Результаты множества экспериментальных исследований реальных физических процессов при больших объемах данных показывают, что последовательности $p_1(A), p_2(A), \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ тенденции к сходимости не проявляют. В подтверждение на рис. 2, *а* приведен 60-часовой фрагмент той же, что и на рис. 1, *а*, записи колебания напряжения $x(t)$ городской электросети, а на рис. 2, *б* — соответствующее изменение выборочного среднего $y(t)$. Процессы, изображенные на рис. 1, *б* и рис. 2, *б*, существенно различаются. В процессе на рис. 1, *б* можно усмотреть тенденцию к стабилизации среднего; в значительно более длительном процессе на рис. 2, *б* нет даже намека на стабилизацию.

Теория гиперслучайных явлений базируется на физической гипотезе ограниченной статистической устойчивости статистик.

Признание ограниченной статистической устойчивости влечет за собой серьезные последствия. Так, например, оказывается, что вероятность — математическая абстракция, не имеющая физической интерпретации.

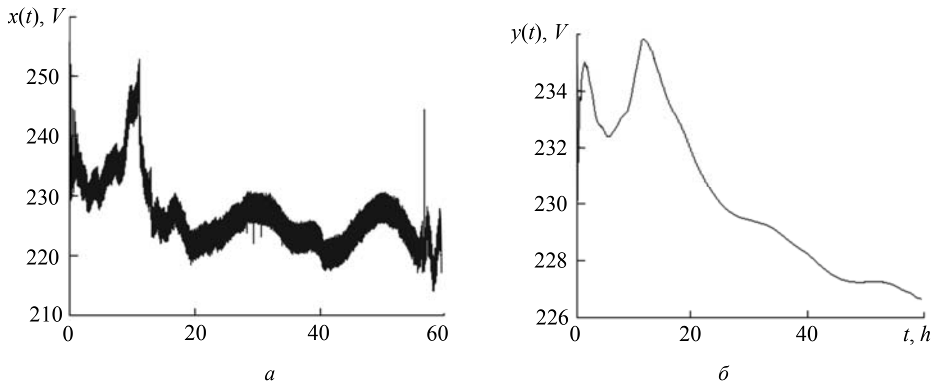

Рис. 2

### 3. Методика и результаты исследования статистической устойчивости процессов

**Статистическая устойчивость процессов на бесконечном интервале наблюдения.** Как ни странно, до недавнего времени понятие статистической устойчивости не было формализовано. Исследования показывают, что статистическая устойчивость — атрибут не только данных, но и рассматриваемой статистики. Степень статистической устойчивости зависит от объема данных и их последовательности.

Нарушения статистической устойчивости можно зафиксировать с помощью различных параметров статистической неустойчивости. Для случайной последовательности $X_1, \ldots, X_N$ в качестве таких параметров используют параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему $\gamma_N$ и к СКО $\Gamma_N$, описываемые следующими выражениями: $\gamma_N = \dfrac{\mathrm{M}[\overline{D}_{Y_N}]}{\mathrm{M}[\overline{D}_{X_N}]}$, $\Gamma_N = \dfrac{\mathrm{M}[\overline{D}_{Z_N}]}{\mathrm{M}[\overline{D}_{X_N}]}$, где M — оператор математического ожидания (МО), $\overline{D}_{Y_N} = \dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{n=1}^{N}(Y_n - \overline{m}_{Y_N})^2$ — выборочная дисперсия флуктуации среднего $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ $(n = \overline{1, N})$, $\overline{m}_{Y_N} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} Y_n$ — выборочное среднее флуктуации среднего, $\overline{D}_{Z_N} = \dfrac{1}{N-2}\sum\limits_{n=2}^{N}(Z_n - \overline{m}_{Z_N})^2$ — выборочная дисперсия флуктуации выборочного СКО $Z_n = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - Y_n)^2}$ $(n = \overline{2, N})$, $\overline{m}_{Z_N} = \dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{n=2}^{N} Z_n$ — среднее СКО, $\overline{D}_{X_N} = \dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{n=1}^{N}(X_i - Y_N)^2$ — выборочная дисперсия исходной последовательности.

Диапазон изменения параметров $\gamma_N$ и $\Gamma_N$ — $[0, \infty)$. Чем меньшие значения принимают эти параметры, тем более устойчивая последовательность соответственно по отношению к среднему и СКО. Случайные последовательности, у которых параметры $\gamma_N$ и $\Gamma_N$ стремятся к нулю при $N \to \infty$, считаются статистически устойчивыми по отношению соответственно к среднему и СКО. Последовательности же, которые таким свойством не обладают, считаются статистически неустойчивыми по отношению соответственно к среднему и СКО.

Для количественной оценки степени неустойчивости используется эталонная единица измерения $\gamma_{0N}$, представляющая собой параметр $\gamma_N$, рассчитанный для эталонной статистически устойчивой последовательности некоррелированных отсчетов белого гауссовского шума. Абсолютный уровень статистической неустойчивости по отношению к среднему и СКО в единицах измерения $\gamma_{0N}$ характеризуют соответственно параметры статистической неустойчивости $h_N = \gamma_N / \gamma_{0N}$ и $H_N = \Gamma_N / \gamma_{0N}$.

**Статистическая устойчивость процессов на ограниченном интервале наблюдения.** При решении практических задач существенную роль играет наличие тенденции сходимости анализируемой статистики на рассматриваемом интервале наблюдения. Если такая тенденция прослеживается, процесс можно считать статистически устойчивым, в противном случае — статистически неустойчивым.

Разные статистики и разные процессы, как правило, имеют разные интервалы статистической устойчивости. Формализовать понятия интервалов статистической устойчивости среднего $\tau_{sm}$ и СКО $\tau_{sd}$ позволяют границы коридора статистической устойчивости. Для параметров статистической неустойчивости $\gamma_N$ и $\Gamma_N$ верхняя граница коридора статистической устойчивости определяется выражением $\gamma^{+}_{0N} = \gamma_{0N} + \varepsilon\sigma_{\gamma^{*}_{0N}}$, где $\varepsilon$ — параметр, характеризующий ширину коридора, $\sigma_{\gamma^{*}_{0N}}$ — СКО величины $\gamma^{*}_{0N} = \overline{D}_{Y_N} / \mathrm{M}[\overline{D}_{X_N}]$, соответствующей эталонной статистически устойчивой последовательности.

Критерием нарушения статистической устойчивости по отношению к среднему и СКО (определяющим величины интервалов статистической устойчивости $\tau_{sm}$ и $\tau_{sd}$) служит выход соответственно параметров статистической неустойчивости $\gamma_N$ и $\Gamma_N$ за границу $\gamma^{+}_{0N}$ (или параметров статистической неустойчивости $h_N$ и $H_N$ за границу $h^{+}_{0N} = \gamma^{+}_{0N} / \gamma_{0N}$).

Заметим, что при практических расчетах вместо параметров $\gamma_N$, $h_N$ и $\Gamma_N$, $H_N$ используют соответствующие оценки $\gamma^{*}_N$, $h^{*}_N$ и $\Gamma^{*}_N$, $H^{*}_N$.

**Статистическая устойчивость случайных процессов.** Исследования показывают, что статистическая устойчивость случайного процесса по отношению к среднему и СКО определяется его спектрально-корреляционными характеристиками.

Установлено, что непрерывный аналог $\gamma_T$ параметра статистической неустойчивости $\gamma_N$ случайного процесса $X_T(t)$, определенного на интервале времени $[0, T]$, при $T \to \infty$ описывается следующей асимптотической формулой:

$$\gamma = \lim_{T\to\infty} \gamma_T = \lim_{T\to\infty} \frac{\int\limits_{1/T}^{T} \frac{\ln^2 fT}{f^2} S_{x_T}(f)df}{4\pi^2 T^2 \int\limits_{1/T}^{T} S_{x_T}(f)df},$$

где $S_{x_T}(f)$ — спектральная плотность мощности (СПМ) процесса $X_T(t)$, $f$ — частота.

Многие реальные шумы хорошо аппроксимируются случайными процессами, спектральная плотность мощности (СПМ) которых описывается степенным законом $1/f^{\beta}$ с различным показателем формы спектра $\beta$. Такие шумы иногда называют цветными. В зависимости от значения параметра $\beta$ ( $-2, -1, 0, 1, 2$ и $> 2$ ) различают фиолетовый, синий (голубой), белый, розовый, коричневый (красный) и черный шумы. Степенной зависимостью СПМ описываются также фликкер-шумы ( $\beta > 0$ ), фрактальные (самоподобные) антиперсистентные ( $-1 < \beta < 0$ ) и персистентные ( $0 < \beta < 1$ ) процессы.

Исследования показывают, что процесс со степенной СПМ статистически устойчивый по отношению к среднему и по отношению к СКО, если $\beta < 1$, и статистически неустойчивый, если $\beta \geq 1$. При $\beta \leq 0$ процесс более устойчив по отношению к среднему, чем по отношению к СКО, а при $\beta > 0$ — наоборот.

Статистически устойчивыми по отношению к среднему и СКО являются стационарные процессы, часть нестационарных процессов, фрактальный гауссовский шум, часть фликкер-шумов, а также фиолетовый, синий и белый шумы (рис. 3). Статистически неустойчивыми процессами по отношению к среднему и СКО являются: часть нестационарных процессов, часть фликкер-шумов, а также розовый, коричневый и черный шумы.

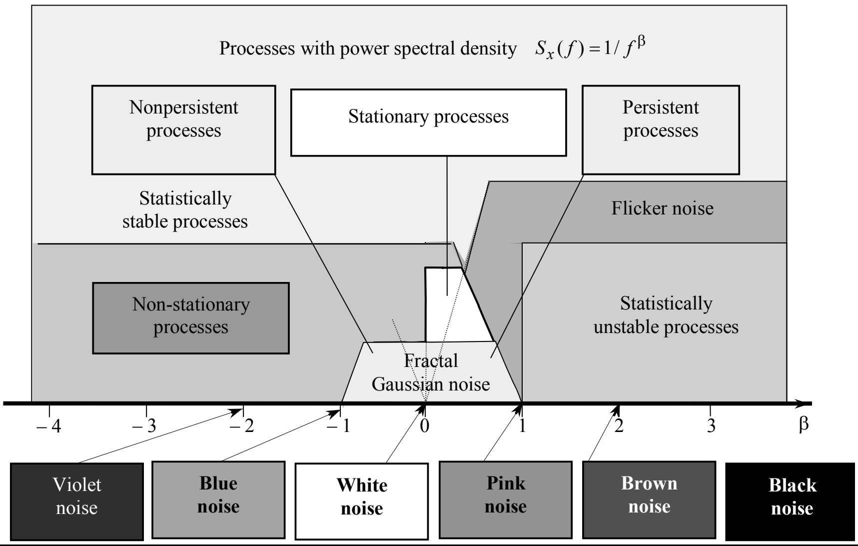


Рис. 3

Исследования показали, что наличие положительной корреляции приводит к уменьшению устойчивости, а наличие отрицательной корреляции — к ее увеличению. Нарушения статистической устойчивости наблюдаются не только в случае низкочастотных, но и в случае полосовых процессов. Не только нестационарные, но и стационарные в узком смысле случайные процессы могут быть статистически неустойчивыми. Таковыми, например, являются стационарные случайные процессы, сечения которых описываются распределениями, которые вообще не имеют моментов или не имеют моментов выше первого (типа распределения Коши).

Существует множество факторов, вызывающих нарушение статистической устойчивости в реальном мире, в частности поступление в открытую систему извне вещества, энергии и (или) информации, различные нелинейные преобразования, низкочастотная линейная фильтрация особого вида и др. Установлено, что процедура интегрирования превращает стационарные статистически устойчивые шумы, соответствующие диапазону от белого включительно до розового, в нестационарные статистически неустойчивые шумы, располагающиеся в коричнево-черной области (рис. 3). Некоторые характерные признаки нарушения устойчивости приведены в табл. 2.

Таблица 2

| № | Признаки нарушения статистической устойчивости | Нарушение по отношению к | |
|---|---|---|---|
| | | среднему | СКО |
| 1 | **Спектральные** | | |
| | быстрый рост СПМ процесса с понижением частоты | + | + |
| | низкочастотный узкополосный процесс | + | + |
| | высокочастотный узкополосный процесс | – | + |
| 2 | **Корреляционные** | | |
| | высокая корреляция отсчетов низкочастотного процесса | + | + |
| | высокая корреляция отсчетов высокочастотного процесса | – | + |
| 3 | **Моментов** | | |
| | статистически непредсказуемые флуктуации оценки МО процесса | + | + |
| | статистически непредсказуемые флуктуации оценки дисперсии процесса | – | + |
| | отсутствие у распределения МО | + | + |
| | отсутствие у распределения дисперсии (МО существует) | – | + |
| 4 | **Плотности распределения (Пр) и функции распределения (Фр)** | | |
| | явная нестабильность местоположения выборочных Пр (или Фр) | + | + |
| | явная нестабильность формы выборочных Пр (или Фр) при стабильности их местоположения | – | + |
| | наличие «тяжелых хвостов» | + | + |
| 5 | **Системообразующие** | | |
| | формирование процесса с элементами низкочастотной фильтрации | ± | ± |
| | формирование процесса с элементами нелинейного преобразования | ± | ± |

**Результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости реальных процессов разной физической природы.** Для выяснения того, являются ли реальные процессы статистически устойчивыми и, если в целом они неустойчивы, то на каком интервале наблюдения их можно считать устойчивыми (а следовательно, беспрепятственно применять методы теории вероятностей), исследовались нарушения статистической устойчивости разнообразных физических процессов на больших интервалах наблюдения.

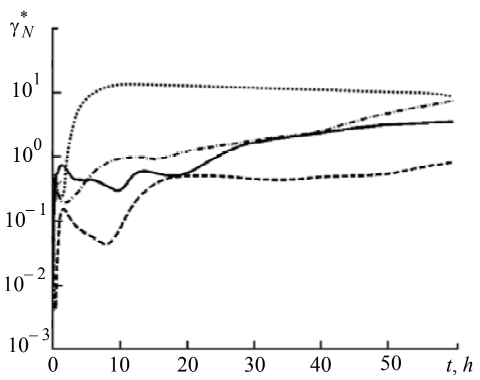


Рис. 4

Изучались, например, нарушения статистической устойчивости колебаний напряжения городской электросети. На рис. 4 изображены изменения во времени параметра статистической неустойчивости $\gamma_N^*$ для четырех 60-часовых записей. Выяснилось, что в этом случае интервал статистической устойчивости по отношению к среднему $\tau_{sm}$ равен примерно одному часу.

Результаты оценки величины интервала статистической устойчивости некоторых других реальных физических процессов приведены в табл. 3.

Все оценки, за исключением приведенной в строке 8 таблицы, относятся к интервалу статистической устойчивости по отношению к среднему, а оценка в строке 8 — к интервалу статистической устойчивости по отношению к СКО.

Обобщая результаты экспериментальных исследований физических процессов, следует отметить, что все процессы, подвергнутые исследованию, оказались статистически неустойчивыми. Это позволяет предположить, что все реальные физические величины и процессы статистически неустойчивы [3, 4, 8]. Исключение могут составлять, возможно, лишь мировые физические константы типа скорости света.

Таблица 3

| № | Реальные колебания | Интервал статистической устойчивости |
|---|---|---|
| 1 | Колебания курса валют | Порядка 1 ч |
| 2 | Колебания высоты волн и периода их следования | Порядка полусуток |
| 3 | Колебания температуры и скорости звука в океане | Десятки часов |
| 4 | Колебание интенсивности излучения астрофизического источника Cygnus X-1 | Порядка неделя |
| 5 | Колебания температуры воздуха | Несколько недель |
| 6 | Колебание интенсивности излучения астрофизического источника GRS 1915+105 | Порядка месяца |
| 7 | Узкополосные колебания температуры воды в океане со средним периодом от 2 до 10 ч | Несколько недель |
| 8 | Колебание интенсивности излучения пульсара PSR J1012+5307 | Несколько месяцев |
| 9 | Колебания скорости ветра | Несколько месяцев |
| 10 | Колебание магнитного поля Земли | Несколько месяцев |
| 11 | Колебания количества осадков | Многие десятки лет |

## 4. Математические основы теории гиперслучайных явлений

**Условные характеристики и параметры гиперслучайных величин.** Гиперслучайная величина $X$ может быть представлена множеством случайных величин $X_g$, каждая из которых ассоциируется с определенными статистическими условиями $g \in G$: $X = \{X_g \mid g \in G\}$. Для описания гиперслучайной величины $X$ используют различные вероятностные характеристики условных случайных величин $X_g$ ($g \in G$), в частности условные функции распределения $F_{x/g}(x)$ (рис. 5) и плотности распределения $f_{x/g}(x) = dF_{x/g}(x)/dx$.

Наиболее полное описание гиперслучайной величины $X$ дает многозначная функция распределения $\tilde{F}_x(x) = \{F_{x/g}(x) \mid g \in G\}$*. Менее полное описание обеспечивают многозначные начальные, центральные моменты и связанные с ними величины, в частности математическое ожидание $\tilde{m}_x = \{m_{x/g} \mid g \in G\}$, дисперсия $\tilde{D}_x = \{D_{x/g} \mid g \in G\}$ и СКО $\tilde{\sigma}_x = \{\sigma_{x/g} \mid g \in G\}$, где $m_{x/g} = \mathrm{M}[X_g] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{x/g}(x)\, dx$ — условные математические ожидания, $D_{x/g} = \mathrm{D}[X_g] = \mathrm{M}[(X_g - m_{x/g})^2]$ — условные дисперсии, $\sigma_{x/g} = \sqrt{D_{x/g}}$ — условные СКО.

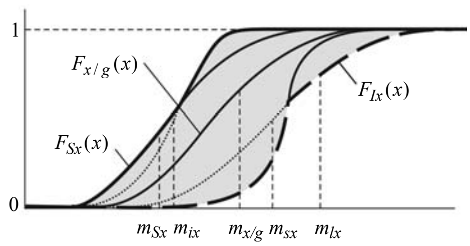

Рис. 5

**Границы распределения и их моменты.** Представление о скалярной гиперслучайной величине $X$ дают границы функции распределения $F_{Sx}(x) = \sup_{g \in G} F_{x/g}(x)$, $F_{Ix}(x) = \inf_{g \in G} F_{x/g}(x)$ (см. рис. 5). Эти границы могут рассматриваться как функции

* Далее многозначные функции и многозначные величины, подобно $\tilde{F}_x(x)$, обозначены буквами со знаком тильды над ними.

распределения некоторых виртуальных случайных величин. Между границами функции распределения расположена область неопределенности (затемненная область на рис. 5).

Аналогами плотности распределения случайной величины служат плотности распределения границ $f_{Sx}(x) = dF_{Sx}(x)/dx$, $f_{Ix}(x) = dF_{Ix}(x)/dx$, представляющие собой производные верхней и нижней границ функции распределения. Для описания гиперслучайных величин используют моменты границ распределения и связанные с ними величины, в частности математические ожидания границ $m_{Sx} = \mathrm{M}_S[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{Sx}(x)dx$, $m_{Ix} = \mathrm{M}_I[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{Ix}(x)dx$, дисперсии границ $D_{Sx} = \mathrm{M}_S[(X - m_{Sx})^2]$, $D_{Ix} = \mathrm{M}_I[(X - m_{Ix})^2]$, СКО границ $\sigma_{Sx} = \sqrt{D_{Sx}}$, $\sigma_{Ix} = \sqrt{D_{Ix}}$ и др.

**Границы моментов.** Представление о гиперслучайной величине дают также границы моментов. Верхней и нижней границами математического ожидания гиперслучайной величины $X$ являются величины $m_{sx} = \mathrm{M}_s[X] = \sup_{g \in G} m_{x/g}$, $m_{ix} = \mathrm{M}_i[X] = \inf_{g \in G} m_{x/g}$ (см. рис. 5), верхней и нижней границами дисперсии — величины $D_{sx} = \sup_{g \in G} D_{x/g}$, $D_{ix} = \inf_{g \in G} D_{x/g}$, а верхней и нижней границами СКО — величины $\sigma_{sx} = \sqrt{D_{sx}}$, $\sigma_{ix} = \sqrt{D_{ix}}$.

**Связь гиперслучайных явлений с величинами другого типа.** Обратим внимание, что частным случаем гиперслучайной величины (рис. 6, *в*) является интервальная величина $[a_i, a_s]$ (рис. 6, *г*), у которой область неопределенности представляет собой прямоугольник. Другим частным случаем гиперслучайной величины является случайная величина (рис. 6, *б*), описываемая одной функцией распределения. Приближенно детерминированную величину $a$ можно рассматривать как частный случай случайной величины или как частный случай гиперслучайной величины, у которой функция распределения описывается функцией единичного скачка в точке $a$ (рис. 6, *а*).

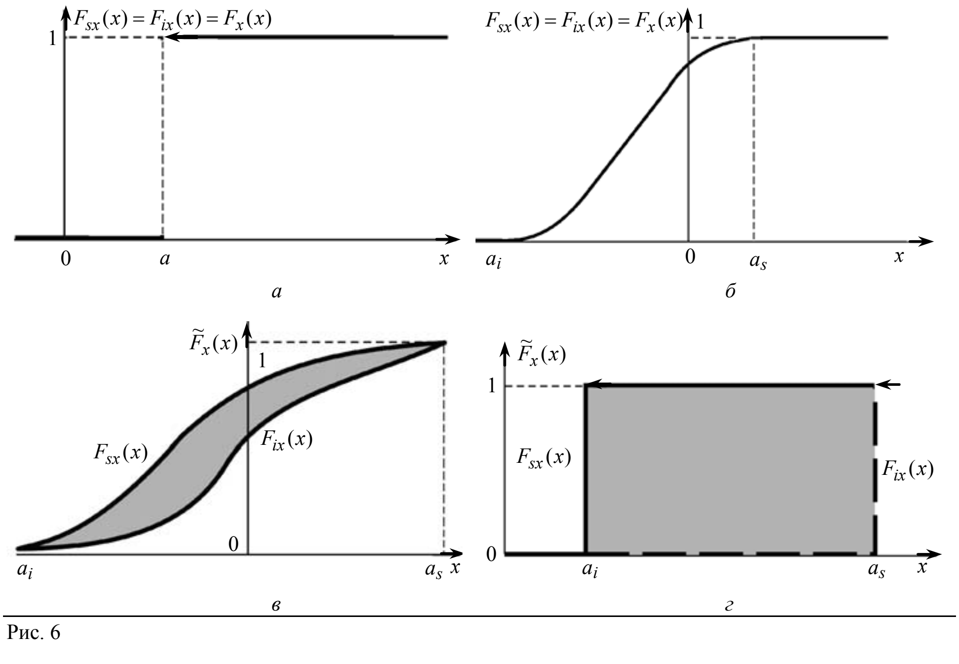


Рис. 6

Таким образом, гиперслучайные величины являются обобщением детерминированных, случайных и интервальных величин. Аналогично гиперслучайные функции являются обобщением детерминированных, случайных и интервальных функций.

## 5. Основы математической статистики теории гиперслучайных явлений

Основные понятия математической статистики теории гиперслучайных явлений базируются на понятиях математической статистики теории вероятностей.

Генеральная совокупность гиперслучайной величины $X = \{X_g \mid g \in G\}$ представляет собой бесконечное множество всех ее реализаций (членов или элементов), наблюдаемых во всех условиях $g \in G$ (т.е. $X$ — объединение генеральных совокупностей всех случайных составляющих $X_g$, $g \in G$). Наиболее полно генеральная совокупность описывается многозначной функцией распределения $\widetilde{F}_x(x)$. Множество членов генеральной совокупности $\vec{x} = (x_1,...,x_N) = = \{x_{1g}, \ldots, x_{Ng} \mid g \in G\} = \{\vec{x}_g \mid g \in G\}$ гиперслучайной величины $X$, полученное при конечном числе $N$ опытов в различных нефиксированных или фиксированных условиях $g \in G$, называется выборкой из генеральной совокупности, а ее элементы $x_1, \ldots, x_N$ или $x_{1g}, \ldots, x_{Ng}$ — выборочными значениями или реализациями.

Без конкретизации условий $g$ каждое выборочное значение $x_n$ $(n = \overline{1, N})$ представляет собой множество детерминированных величин (множество чисел), а при конкретизации условий $g$ каждое выборочное значение $x_{ng}$ — детерминированную величину (число).

Бесконечное множество выборок $\vec{x} = (x_1, ..., x_N)$ объемом $N$, сформированных из одной генеральной совокупности, образует $N$-мерный гиперслучайный вектор

$$\vec{X} = (X_1,...,X_N) = \{X_{1g},\ldots,X_{Ng} \mid g \in G\} = \{\vec{X}_g \mid g \in G\},$$

называемый гиперслучайной выборкой, а бесконечное число выборок $\vec{x}_g = (x_{1g}, \ldots, x_{Ng})$ объемом $N$, сформированных из одной генеральной совокупности в конкретных условиях $g \in G$, образует $N$-мерный случайный вектор $\vec{X}_g = (X_{1g}, \ldots, X_{Ng})$.

Компоненты $X_n$ гиперслучайной выборки $\vec{X}$ обычно полагают взаимно независимыми при всех условиях.

В теории гиперслучайных явлений статистикой называют любую функцию гиперслучайной выборки $\vec{X}$, случайной выборки $\vec{X}_g$ в фиксированных условиях $g \in G$, детерминированной многозначной выборки $\vec{x}$, а также детерминированной однозначной выборки $\vec{x}_g$ в фиксированных условиях $g \in G$.

По генеральной совокупности гиперслучайной величины теоретически можно вычислить различные ее точные детерминированные характеристики и параметры, а по реализациям с использованием определенных статистик — приближенные оценки этих же характеристик. Если выборка гиперслучайная, то оценки гиперслучайные, если же выборка детерминированная, то оценки детерминированные.

Процедура формирования оценок строится по следующей схеме. Для всего множества $G$ условий $g$ формируются выборки $x_{1g}, \ldots, x_{Ng}$. Для каждых условий $g$ по выборке $x_{1g}, \ldots, x_{Ng}$ рассчитываются оценки условных характеристик и параметров, например оценка условной функции распределения $F^*_{x/g}(x)$, оценка условного математического ожидания $m^*_{x/g}$, оценка условной дисперсии $D^*_{x/g}$ и др. По оценкам условных функций распределения $F^*_{x/g}(x)$ для всех $g \in G$ вычисляются оценки границ функции распределения: $F^*_{Sx}(x) = \sup_{g \in G} F^*_{x/g}(x)$, $F^*_{Ix}(x) = \inf_{g \in G} F^*_{x/g}(x)$ и оценки характеристик, описывающие эти границы: оценки математических ожиданий границ $m^*_{Sx}$, $m^*_{Ix}$, оценки дисперсий границ $D^*_{Sx}$, $D^*_{Ix}$ и пр. По оценкам условных величин определяются оценки границ соответствующих величин, например оценки границ математического ожидания $m^*_{sx} = \sup_{g \in G} m^*_{x/g}$, $m^*_{ix} = \inf_{g \in G} m^*_{x/g}$, оценки границ дисперсии $D^*_{sx} = \sup_{g \in G} D^*_{x/g}$, $D^*_{ix} = \inf_{g \in G} D^*_{x/g}$ и т. д.

Определенные трудности можно ожидать на первом этапе при формировании требуемых выборок $\vec{x}_g$ для всех $g \in G$ из-за сложности обеспечения, контроля и поддержания условий $g$. Однако вопрос облегчается тем, что часто реальные выборки обладают эргодическими свойствами и для расчета ряда искомых характеристик не требуется информация о том, в каких именно условиях получены условные характеристики. Главное, чтобы на уровне условных характеристик были представлены все возможные условия $g \in G$ и в массив данных, используемый для расчета условных характеристик в конкретных условиях, не попадали данные, соответствующие другим условиям.

Обычно при наличии одной длинной реальной выборки последнее требование можно обеспечить, поскольку закон распределения хотя и изменяется зачастую непрерывно, но изменяется медленно, и на основе наблюдения за физическим явлением удается определить примерное число последовательных элементов выборки $N_s$, для которых плотность распределения остается практически неизменной. Это позволяет собирать данные на всем интервале наблюдения, не заботясь о том, каковы в конкретный момент времени условия и в какой последовательности они чередуются. Далее полученные данные можно разделять на фрагменты по $N_s$ последовательных элементов и использовать для расчета искомых оценок. Главное при таком подходе — обеспечить охват всех возможных условий наблюдения.

### 6. Обобщенный предел и сходимость последовательностей в обобщенном смысле

Результаты экспериментальных исследований на больших интервалах наблюдения реальных процессов разной физической природы показывают, что реальные оценки не проявляют тенденции стремления ни к определенным конечным пределам, ни к бесконечности. При увеличении объема выборки они флуктуируют в определенных пределах. Для описания таких оценок потребовалась разработка специального математического аппарата.

**Обобщенный предел.** Согласно классическим представлениям числовая последовательность $x_1, x_2, ...$ считается сходящейся, если существует необходимо единственный предел $a = \lim_{n \to \infty} x_n$. Последовательность, не имеющая предела, считается расходящейся.

Из любой бесконечной последовательности можно сформировать множество частичных последовательностей (подпоследовательностей), получаемых из исходной последовательности путем отбрасывания части ее членов при сохранении порядка следования оставшихся ее членов. Некоторые из этих подпоследовательностей могут сходиться к определенным пределам $a_m$, $m = 1, 2, \ldots$ (предельным точкам). Множество всех предельных точек последовательности $x_1, x_2, \ldots$, называемых частичными пределами, образует спектр предельных точек $\tilde{S}_x = \operatorname*{LIM}_{n \to \infty} x_n$, где, в отличие от обычного предела $\lim_{n\to\infty}$, используется символ обобщенного предела $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty}$. Этот спектр представляет собой обобщение понятия предела на случай любой последовательности, в том числе расходящейся. Выражение $\tilde{S}_x = \operatorname*{LIM}_{n \to \infty} x_n$ можно трактовать как сходимость последовательности к спектру предельных точек (в частном случае к интервалу).

Расходящуюся последовательность можно охарактеризовать не только спектром предельных точек, но и множеством (в общем случае) мер, описываемым многозначной (в общем случае) функцией распределения предельных точек $\tilde{F}_x(x) = \operatorname*{LIM}_{n\to\infty}(m_n(x)/n)$, где $m_n(x)$ — количество членов последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, меньших $x$.

Если последовательность сходится в обычном смысле к числу $a$, то функция распределения предельных точек описывается однозначной функцией распределения $F_x(x)$ в виде функции единичного скачка (см. рис. 6, *а*). Если же эта последовательность расходится (сходится к множеству чисел), то функция распределения представляет собой или однозначную неубывающую функцию $F_x(x)$, отличную от функции единичного скачка (рис. 6, *б*), или многозначную функцию $\tilde{F}_x(x)$ (в общем случае изображенную на рис. 6, *в*, а в частном случае — на рис. 6, *г*).

Пользуясь терминологией теории гиперслучайных явлений, можно сказать, что спектр предельных точек числовой последовательности может быть числом (см. рис. 6, *а*), случайной величиной (рис. 6, *б*) или гиперслучайной величиной (рис. 6, *в*) (в вырожденном случае интервальной величиной (рис. 6, *г*)).

**Сходимость последовательностей гиперслучайных величин и функций.** По аналогии со сходимостью последовательностей случайных величин и функций в теории гиперслучайных явлений введено понятие сходимости в обобщенном смысле последовательностей гиперслучайных величин и функций по функции распределения, в среднеквадратическом, почти наверное (с вероятностью единица) и по вероятности (по мере). Для примера рассмотрим сходимость в обобщенном смысле последовательности гиперслучайных величин по вероятности.

Пусть имеется последовательность гиперслучайных величин $\mathrm{X} = \{X_1, \ldots, X_N\}$ и гиперслучайная величина *X*, где члены последовательности $X_n = \{X_{ng} \mid g \in G\}$ ($n = \overline{1, N}$) и $X = \{X_g \mid g \in G\}$. Для всех $X_1, \ldots, X_N$ и $X$ определены функции распределения $\tilde{F}_{x_1}(x) = \{F_{x_1/g}(x) \mid g \in G\}, \ldots, \tilde{F}_{x_N}(x) = \{F_{x_N/g}(x) \mid g \in G\}$ и $\tilde{F}_x(x) = \{F_{x/g}(x) \mid g \in G\}$. Тогда последовательность $\mathrm{X}$ сходится к гиперслучайной величине $X$ в обобщенном смысле по вероятности ($(P(|X_N - X| > \varepsilon) \to 0)$) при $N \to \infty$, если для всех $g \in G$ случайная последовательность $X_{1g}, \ldots, X_{Ng}$ сходится по вероятности к случайной величине $X_g$.

Последовательность детерминированных, случайных и гиперслучайных величин может сходиться к числу (детерминированной величине), к случайной или гиперслучайной величине, а детерминированных случайных и гиперслучайных функций — к детермированной, случайной или гиперслучайной функции.

### 7. Обобщенный закон больших чисел и обобщенная центральная теорема

**Обобщенный закон больших чисел.** Одним из основных законов теории вероятностей является закон больших чисел. Он имеет множество вариантов. П.Л. Чебышев доказал, например, следующий вариант.

**Теорема Чебышева**. Пусть $X_1, \ldots, X_N$ — последовательность попарно независимых случайных величин с математическими ожиданиями $m_{x_1}, \ldots, m_{x_N}$ и ограниченными дисперсиями. Тогда при $N \to \infty$ среднее выборочных значений $m^*_{xN} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ стремится по вероятности к среднему математических ожиданий $m_{xN} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n}$ .

В типичной для теории вероятностей интерпретации эта теорема трактуется следующим образом: случайное выборочное среднее $m^*_{xN}$ стремится по вероятности к некоторому числу $m_x$, представляющему собой обычный предел среднего $m_{xN}$ .

Анализ доказательства этого утверждения показывает, что при доказательстве не используется предположение о том, что выборочное среднее $m^*_{xN}$ и среднее математических ожиданий $m_{xN}$ имеют обычные пределы. Это обстоятельство позволило сформулировать обобщенный закон больших чисел, суть которого в том, что выборочное среднее $m^*_{xN}$ и среднее математических ожиданий $m_{xN}$ могут не сходиться к числам, но при этом их разность сходится по вероятности (в обычном смысле) к нулю.

Более глубокое понимание обобщенного закона больших чисел дает обобщенная центральная предельная теорема.

**Обобщенная центральная предельная теорема.** В теории вероятностей известна центральная предельная теорема, которую в упрощенном виде можно сформулировать следующим образом. При выполнении определенных не очень жестких условий (условий Линдеберга) функция распределения $F_{m^*_{xN}}(x)$ среднего $m^*_{xN}$ последовательности $X_1, \ldots, X_N$ независимых случайных величин, имеющих математические ожидания $m_{x_1}, \ldots, m_{x_N}$ и дисперсии $D_{x_1}, \ldots, D_{x_N}$, сходится равномерно к гауссовской функции распределения $F(x / m_{xN}, D_{xN})$, характеризуемой математическим ожиданием $m_{xN} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n}$ и дисперсией $D_{xN} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} D_{x_n}$ .

В рамках теории гиперслучайных явлений установлено, что имеет место более общее утверждение: разность между функцией распределения $F_{m^*_{xN}}(x)$ и гауссовской функцией распределения $F(x / m_{xN}, D_{xN})$ равномерно сходится к нулю, т.е. $\lim_{N\to\infty} [F_{m^*_{xN}}(x) - F(x / m_{xN}, D_{xN})] = 0$. Это означает, что функции $F_{m^*_{xN}}(x)$ и $F(x / m_{xN}, D_{xN})$ могут не иметь обычных пределов. Но, несмотря на это, $F_{m^*_{xN}}(x)$ сходится к многозначной функции распределения $\tilde{F}_{m_x}(x) = \tilde{F}(x / \tilde{m}_x, \tilde{D}_x)$, определяемой многозначными математическим ожиданием $\tilde{m}_x$ и дисперсией $\tilde{D}_x$.

**Экспериментальные исследования выборочных средних реальных физических процессов.** Экспериментальные исследования выборочных средних различных реальных физических процессов на больших интервалах наблюдения подтверждают действие обобщенного закона больших чисел и обобщенной центральной предельной теоремы. Для примера на рис. 7 приведены оценки функций распределения напряжения электросети $F_g^*(x)$ на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения (*а*) и оценки функции распределения выборочного среднего напряжения $F^*_{m_x^* N}(x)$ при различном объеме выборки $N = 2^r$ ($r$ = 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20) (*б*) (толщина линий возрастает с увеличением значения параметра *r*). Эти оценки рассчитаны на основе данных, представленных на рис. 2, *а*. Как следует из рис. 7, *а*, исследуемый процесс явно нестационарный. На рис. 7, *б* хорошо видно, что при небольшом объеме данных $(r = 8, 10)$ наблюдается тенденция стремления выборочного среднего $m^*_{xN}$ к определенному предельному значению и тенденция стремления соответствующей функции распределения $F^*_{m^*_{xN}}(x)$ к некоторой предельной функции распределения. Однако при большом интервале наблюдения $(r > 10)$ эти тенденции не фиксируются.

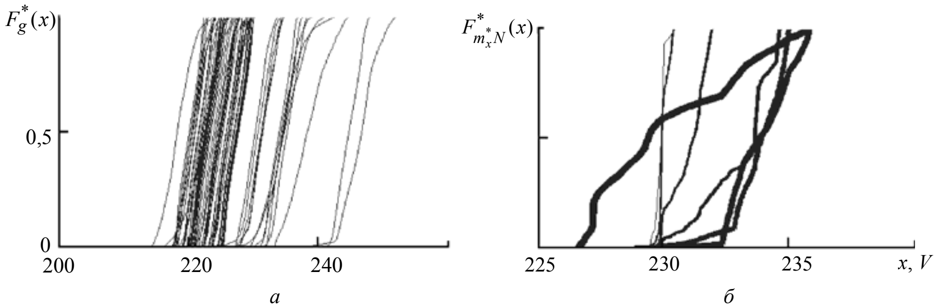


Рис. 7

## 8. Применение теории гиперслучайных явлений

Области целесообразного применения теории гиперслучайных явлений охватывают широкий круг теоретических и прикладных задач, в которых проявляется нарушение сходимости.

В настоящее время прикладные вопросы теории гиперслучайных явлений наиболее детально проработаны применительно к задаче измерения физических величин в непрогнозируемо изменяющихся статистического условиях. Установлено, что при определенных предположениях погрешность измерения можно разделить на систематическую, случайную и интервальную (статистически непрогнозируемую) составляющие. При увеличении объема выборки случайная составляющая погрешности уменьшается, а систематическая и интервальная составляющие не изменяются. Наличие статистически непрогнозируемой составляющей приводит к ограничению потенциальной точности реальных измерений.

## Заключение

Теория вероятностей базируется на физической гипотезе идеальной статистической устойчивости (сходимости статистик), а теория гиперслучайных явлений — на гипотезе ограниченной статистической устойчивости (отсутствия сходимости статистик). В этом состоит принципиальное различие этих теорий.

Результаты многочисленных экспериментальных исследований показывают, что на больших интервалах наблюдения гипотеза идеальной статистической устойчивости не подтверждается. Следствием этого является то, что вероятность — математическая абстракция, не имеющая физической интерпретации.

Теория гиперслучайных явлений — физико-математическая теория, объектом исследования которой является физический феномен статистической устойчивости, а предметом исследования — способы адекватного его описания с помощью гиперслучайных моделей (гиперслучайных явлений), учитывающих нарушения статистической устойчивости.

Для описания гиперслучайных явлений используются различные параметры и характеристики, основные из них: условные функции распределения, условные моменты, границы распределения и их моменты, а также границы моментов. Гиперслучайные величины и функции являются обобщением детерминированных, случайных и интервальных величин и функций.

Экспериментальные исследования феномена статистической устойчивости указывают на то, что, по всей видимости, физический мир базируется на гиперслучайных принципах и подчиняется трем видам закономерностей: детерминированным, статистически прогнозируемым (случайным, стохастическим или, иначе, вероятностным) и статистически непрогнозируемым. Наличие статистически непрогнозируемых закономерностей приводит к ограничению потенциальной точности реальных измерений.

Области целесообразного применения теории гиперслучайных явлений охватывают широкий круг теоретических и прикладных задач, в которых проявляется нарушение сходимости. Первоочередная область использования этой теории связана со статистической обработкой различных физических процессов большой длительности, высокоточными измерениями и прогнозированием развития событий на основе статистической обработки больших массивов данных, моделированием и исследованием сложных систем.

Ограниченный характер статистической устойчивости указывает на необходимость пересмотра положений физических дисциплин, в которых понятия вероятности и сходимости играют ключевую роль: в первую очередь это статистическая механика, статистическая физика и квантовая механика.

*І.І. Горбань*

## ЩО ТАКЕ ТЕОРІЯ ГІПЕРВИПАДКОВИХ ЯВИЩ

В оглядовій статті представлено нову фізико-математичну теорію гіпервипадкових явищ, що описує масові фізичні явища з урахуванням порушень статистичної стійкості. Наведено методику та результати дослідження порушень статистичної стійкості, математичні основи опису фізичних явищ гіпервипадковими моделями, принципи математичної статистики, узагальнений закон великих чисел, узагальнену центральну граничну теорему та області доцільного використання теорії.

*I.I. Gorban*

## WHAT IS THE THEORY OF HYPER–RANDOM PHENOMENA

In the survey article a new physical-mathematical theory of hyper-random phenomena that describes mass physical phenomena with taking into account a violation of

 ISSN 0572-2691

statistical stability is presented. An investigation technique and research results of statistical stability violations, the basis of mathematical description of physical phenomena by hyper-random models, principles of mathematical statistics, the generalized law of large numbers, the generalized central limit theorem, and areas of rational application of the theory are considered.

1. *Горбань И.И.* Гиперслучайные явления и их описание // Акустический вестник. — 2005. — **8**, № 1—2. — С. 16–27.
2. *Горбань И.И.* Теория гиперслучайных явлений. — Киев : ИПММС НАН Украины, 2007. — 184 с.
3. *Горбань И.И.* Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы. — Киев : Наук. думка, 2011. — 318 с.
4. *Горбань И.И.* Феномен статистической устойчивости. — Киев : Наук. думка, 2014. — 444 с.
5. *Горбань И.И.* Случайность и гиперслучайность. — Киев : Наук. думка, 2016. — 288 с.
6. *Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф.* Проектування та оптимізація механостійких конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками. — Луганськ: ЛНПУ, 2011. — 180 с.
7. *Уваров Б.М., Зіньковський Ю.Ф.* Оптимізація стійкості до теплових впливів конструкцій радіоелектронних засобів з гіпервипадковими характеристиками. — Луганськ: ЛНПУ, 2011. — 212 с.
8. *Gorban I.I.* The statistical stability phenomenon. — Springer, 2017. — 362 p.
9. *Gorban I.I.* Randomness and hyper-randomness. — Springer, 2017. — 262 p.
10. *Graunt J.* Natural and political observations made upon the bills of mortality (1662). — Baltimore, 1939.
11. *Майстров Л.Е.* Развитие понятия вероятности. — М. : Наука, 1980. — 269 с.
12. *Шейнин О.Б.* Теория вероятностей. Исторический очерк. — http://www.sheynin.de, 2009.
13. *Чайковский Ю.В.* О природе случайности. — М.: Центр системных исследований — Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. — 280 с.
14. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 448 с.
15. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1965. — **1**. — 260 с.
16. *Рожков В.А.* Теория вероятностей случайных событий, величин и функций с гидрометеорологическими примерами. — М.: Прогресс-погода, 1996. — Кн. 1. — 154 с.; Кн. 2. — 406 с.
17. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: ОНТИ, 1974. — 119 с.
18. *Марков А.А.* Исчисление вероятностей. — М., 1924.
19. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решения. — Киев : Наук. думка, 1990. — 135 с.
20. *Борель Э.* Вероятность и достоверность. — М.: Наука, 1961. — 120 с.
21. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1972. — 230 с.

*Получено 24.04.2017*