УДК 517.977.56

М.М. Копец

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ПОДВЕШЕННОЙ НИТИ

Введение

Колебанием считается движение, которое повторяется полностью или частично с течением времени. Колебания составляют значительную часть всех движений, которые существуют в природе. Несмотря на их многообразие (акустические, механические, электрические), для их описания используется почти одинаковая математическая модель. Существуют так называемые физические аналогии. Исторически сложилась такая ситуация, что наиболее полно исследованы механические колебания. Основным инструментом для изучения механических колебаний упругих систем служат дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического типа. Существенный вклад в становление теории колебаний внесли известные математики Ж.Л. Даламбер, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, Б. Тейлор, Ж.Б. Фурье. В последующем эта теория получила широкое развитие в трудах А.А. Андронова [1], А.Н. Крылова [2], Стрэтта (лорда Рэлея) Дж. В.[3], С.П. Тимошенко [4] и др. Более подробные библиографические данные по теории колебаний можно найти в [5, 6]. Бурное развитие теории колебаний в свою очередь способствовало становлению теории оптимального управления этими процессами [7–12]. Исследованию оптимизации процесса колебаний подвешенной нити посвящена настоящая статья. Для рассматриваемой задачи автор получил необходимые условия оптимальности, доказал единственность оптимального управления, также предложил вывод системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати с частными производными. Получена аналитическая формула для вычисления оптимального управления.

Постановка задачи

В области $\Omega = \{(t, x) : t \in [t_0, t_1], x \in [0, l]\}$, рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial z(t, x)}{\partial x} \right) + u(t, x), \tag{1}$$

где $a^2 = g$ — ускорение силы тяжести, действительные числа $l \succ 0$, $t_0 \geq 0$, $t_1 \succ t_0$ известны. Уравнение (1) описывает процесс вынужденных колебаний подвешенной нити [13, с. 180]. Для уравнения (1) заданы начальные условия

$$z(t_0, x) = f(x), \quad \frac{\partial z(t_0, x)}{\partial t} = g(x), \tag{2}$$

где известные функции $f(x)$ и $g(x)$ подчинены соответственно ограничениям $f(x)\in W_2^{1,0}(0,l)$ и $g(x)\in L_2(0,l)$. Поскольку верхний конец нити закреплен, то краевое условие для уравнения (1) имеет вид

$$z(t,l)=0. \tag{3}$$

Допустимое управление $u(t,x)$ — любая функция $u(t,x)$, удовлетворяющая ограничению $u(t,x)\in L_2(\Omega)$. Если выбрано конкретное допустимое управление $u(t,x)$, то решением $z(t,x)$ задачи (1)–(3) называем ее обобщенное решение $z(t,x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$. Качество процесса колебаний оценивается функционалом

$$I(u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[z^2(t,x)+u^2(t,x)]\,dx. \tag{4}$$

Требуется найти допустимое управление $u(t,x)\in L_2(\Omega)$ и соответствующее ему решение $z(t,x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$ задачи (1)–(3), на которых функционал (4) принимает наименьшее возможное значение. В этом состоит сущность задачи оптимального управления (1)–(4).

Необходимые условия оптимальности

Учитывая вид функционала (4), рассмотрим следующий вспомогательный функционал:

$$J(p,u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2 dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[z^2(t,x)+u^2(t,x)]\,dx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\left[a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}\right)+u(t,x)-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt. \tag{5}$$

Здесь $p(t,x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$ — неизвестная функция (множитель Лагранжа). Такой прием позволяет вместо задачи на условный экстремум (1)–(4) исследовать эквивалентную задачу минимизации функционала (5) с учетом условий (2) и (3). Чтобы найти решение последней задачи, необходимо получить выражение ΔJ для приращения функционала (5). Оно равно

$$\Delta J=J(p+\varepsilon\delta p,\,u+\varepsilon\delta u,\,z+\varepsilon\delta z)-J(p,u,z)$$

или в развернутом виде

$$\Delta J=\varepsilon\int_0^l z(t_1,x)\,\delta z(t_1,x)\,dx+\varepsilon\int_0^l\frac{\partial z(t_1,z)}{\partial t}\,\frac{\partial\,\delta z(t_1,z)}{\partial t}\,dx+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[z(t,x)\delta z(t,x)+u(t,x)\delta u(t,x)]dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\left[a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}\right)+\delta u(t,x)-\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}\right)+u(t,x)-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt+$$

$$+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}\right)+\delta u(t,x)-\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l[\delta z(t_1,x)]^2dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]\,dxdt. \qquad (6)$$

Дальше следует преобразовать соотношение (6). Не вызывет сомнений равенство

$$a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}\right)+\delta u(t,x)-\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}=0. \qquad (7)$$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial t^2}dxdt=-\int_0^l p(t_1,x)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx+\int_0^l p(t_0,x)\frac{\partial\delta z(t_0,x)}{\partial t}dx+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial t}dxdt=-\int_0^l p(t_1,x)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial t}dxdt=$$

$$=-\int_0^l p(t_1,x)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx+\int_0^l\frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}\delta z(t_1,x)\,dx-\int_0^l\frac{\partial p(t_0,x)}{\partial t}\delta z(t_0,x)\,dx-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}\delta z(t,x)\,dxdt=-\int_0^l p(t_1,x)\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}dx+$$

$$+\int_0^l\frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}\delta z(t,x)\,dx-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}\delta z(t,x)\,dxdt. \qquad (8)$$

Поскольку

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}\right)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)a^2\left(\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}+x\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial x^2}\right)dxdt, \qquad (9)$$

то, предполагая выполнение краевого условия

$$p(t,l)=0, \qquad (10)$$

последовательно находим

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)a^2\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}dxdt=\int_{t_0}^{t_1}p(t,l)a^2\delta z(t,l)dt-\int_{t_0}^{t_1}p(t,0)a^2\delta z(t,0)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}a^2\delta z(t,x)\,dxdt=-\int_{t_0}^{t_1}p(t,0)a^2\delta z(t,0)dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}a^2\delta z(t,x)\,dxdt,\quad(11)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)a^2x\frac{\partial^2\delta z(t,x)}{\partial x^2}dxdt=\int_{t_0}^{t_1}p(t,l)a^2x\frac{\partial\delta z(t,l)}{\partial x}dt-\int_{t_0}^{t_1}p(t,0)a^2\cdot 0\cdot\frac{\partial\delta z(t,0)}{\partial x}dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{\partial}{\partial x}(xp(t,x))a^2\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}dxdt=-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left(p(t,x)+x\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)a^2\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}dxdt=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,l)+l\frac{\partial p(t,l)}{\partial x}\right)a^2\delta z(t,l)dt+\int_{t_0}^{t_1}\left(p(t,0)+0\cdot\frac{\partial p(t,0)}{\partial x}\right)a^2\delta z(t,0)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left(2\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}+x\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\right)a^2\delta z(t,x)\,dxdt=\int_{t_0}^{t_1}p(t,0)a^2\delta z(t,0)dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left(2\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}+x\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}\right)a^2\delta z(t,x)\,dxdt,\quad(12)$$

так как $\delta z(t,l)=0.$ С учетом равенств (9)–(12) окончательно имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l p(t,x)a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\delta z(t,x)}{\partial x}\right)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)\delta z(t,x)\,dxdt.\quad(13)$$

Затем, используя равенства (7), (8) и (13), соотношение (6) перепишем следующим образом:

$$\Delta J=\varepsilon\int_0^l\left[z(t_1,x)+\frac{\partial p(t_1,z)}{\partial t}\right]\delta\, z(t_1,x)\,dx+$$

$$+\varepsilon\int_0^l\left[\frac{\partial\, z(t_1,z)}{\partial t}-p(t_1,x)\right]\frac{\partial\,\delta\, z(t_1,z)}{\partial t}dx+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)+z(t,x)-\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}\right]\delta z(t,x)dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[u(t,x)+p(t,x)]\delta u(t,x)\,dxdt+$$

$$+\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \delta p(t,x)\left[a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}\right)+u(t,x)-\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}\right]dxdt+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l[\delta z(t_1,x)]^2dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]dxdt. \quad (14)$$

На основании выражения (14) приходим к такому выводу.

Теорема 1. Единственное оптимальное управление $u(t,x)$ можно найти из системы соотношений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial z(t,x)}{\partial x}\right)+u(t,x),\\ z(t_0,x)=f(x),\dfrac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x),\;\; z(t,l)=0,\\ \dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial x}\right)+z(t,x),\\ p(t_1,x)=\dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t},\dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t}=-z(t_1,x),\\ p(t,l)=0,u(t,x)=-p(t,x).\end{cases} \quad (15)$$

Доказательство. В случае выполнения системы соотношений (15) равна нулю первая вариация функционала (5), что является необходимым условием экстремума этого функционала. Если имеют место соотношения (15), то выражение (14) будет иметь вид

$$\Delta J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l[\delta z(t_1,x)]^2dx+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial\delta z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[[\delta z(t,x)]^2+[\delta u(t,x)]^2]dxdt. \quad (16)$$

Из соотношения (16) следует, что: во-первых, на управлении $u(t,x)$ реализуется минимум функционала (4); во-вторых, оптимальное управление $u(t,x)$ единственно, что и завершает доказательство теоремы 1.

Вывод системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати

Для вывода первого уравнения из системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати и условий трансверсальности требуется использование дельта-функции Дирака. Поэтому те равенства, в которых встречается дельта-функция Дирака, подразумеваются как равенства в смысле теории обобщенных функций. Следуя идее, предложенной в [14], рассмотрим формулы

$$\frac{\partial p(t,z)}{\partial t}=-\int_0^l P_{11}(t,x,y)z(t,y)dy-\int_0^l P_{12}(t,x,y)\frac{\partial p(t,z)}{\partial t}dy, \quad (17)$$

$$p(t,x)=\int_0^l P_{21}(t,x,y)z(t,y)dy+\int_0^l P_{22}(t,x,y)\frac{\partial z(t,y)}{\partial t}dy, \quad (18)$$

в которых функции $P_{ij}(t, x, y), i = 1, 2; j = 1, 2,$ неизвестны. Предполагая выполнение краевых условий

$$R_{12}(t, x, l) = 0, \quad R_{22}(t, x, l) = 0, \tag{19}$$

и выполняя преобразования, подобные использованным при выводе формулы (13), получаем такую систему интегро-дифференциальных уравнений Риккати:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{11}(t, x, y)}{\partial t} + a^2 \left[\dfrac{\partial}{\partial y} \left(y \dfrac{\partial P_{12}(t, x, y)}{\partial y} \right) + \dfrac{\partial}{\partial x} \left(x \dfrac{\partial P_{21}(t, x, y)}{\partial x} \right) \right] - \\ - \displaystyle\int_0^l P_{12}(t, x, s) R_{21}(t, s, y)\, ds + \delta(x - y) = 0, \\ \dfrac{\partial P_{12}(t, x, y)}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial}{\partial x} \left(x \dfrac{\partial P_{22}(t, x, y)}{\partial x} \right) + \\ + P_{11}(t, x, y) - \displaystyle\int_0^l P_{12}(t, x, s) P_{22}(t, s, y)\, ds = 0, \\ \dfrac{\partial P_{21}(t, x, y)}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial}{\partial y} \left(y \dfrac{\partial P_{22}(t, x, y)}{\partial y} \right) + \\ + P_{11}(t, x, y) - \displaystyle\int_0^l P_{22}(t, x, sP_{21}(t, s, y)\, ds = 0, \\ \dfrac{\partial P_{22}(t, x, y)}{\partial t} + P_{12}(t, x, y) + P_{21}(t, x, y) - \\ - \displaystyle\int_0^l P_{22}(t, x, s) P_{22}(t, s, y) ds = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь символ $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Сопоставление формул (17), (18) и равенств

$$\frac{\partial p(t_1, x)}{\partial t} = -z(t_1, x), \quad p(t_1, x) = \frac{\partial z(t_1, x)}{\partial t}$$

приводит к следующим условиям трансверсальности:

$$\begin{cases} P_{11}(t_1, x, 0) = \delta(x - y), \; P_{12}(t_1, x, 0) = 0, \\ P_{21}(t_1, x, 0) = 0, \; P_{22}(t_1, x, 0) = \delta(x - y). \end{cases} \tag{21}$$

Вышеприведенные рассуждения позволяют сформулировать такое утверждение.

Теорема 2. Функции $P_{11}(t, x, y)$, $P_{12}(t, x, y)$, $P_{21}(t, x, y)$, $P_{22}(t, x, y)$ удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений (20), условиям трансверсальности (21) и краевым условиям (19).

Некоторые свойства функции Бесселя первого рода нулевого порядка

Для дальнейшего исследования системы интегро-дифференциальных уравнений (20) потребуется несколько нетривиальных свойств функции Бесселя первого рода нулевого порядка. Пусть λ и μ — произвольные действительные положительные числа. Рассмотрим функцию Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0\left(\lambda\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)$. Легко проверяется соотношение

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_0\left(\lambda\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{dx}\right)=-\frac{\lambda^2}{4l}J_0\left(\lambda\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \qquad (22)$$

Если $\lambda\neq\mu,$ то с помощью вычисления находим

$$\int_0^l J_0\left(\lambda\sqrt{\frac{x}{l}}\right)J_0\left(\mu\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx=\frac{2l(\lambda J_0(\mu)J_1(\lambda)-\mu J_0(\lambda)J_1(\mu))}{\lambda^2-\mu^2}. \qquad (23)$$

Переходя к пределу при $\mu\to\lambda$ в обеих частях равенства (23), получаем

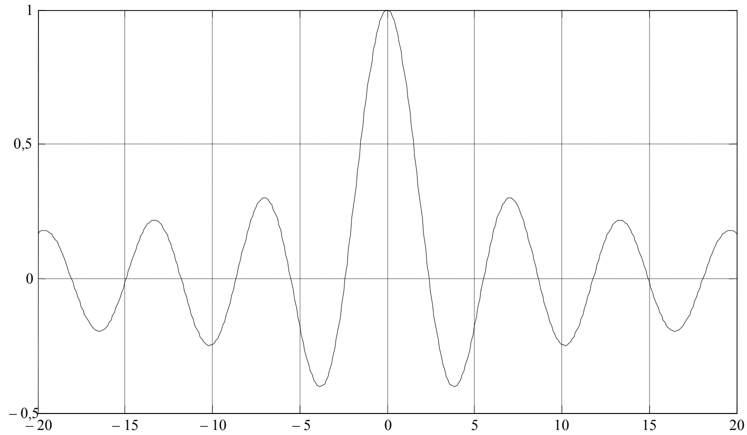
$$\int_0^l J_0^2\left(\lambda\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx=\lim_{\mu\to\lambda}\frac{2l(\lambda J_0(\mu)J_1(\lambda)-\mu J_0(\lambda)J_1(\mu))}{\lambda^2-\mu^2}=$$

$$=l\left[J_1^2(\lambda)+J_0(\lambda)\left(\frac{2J_1(\lambda)}{\lambda}-J_2(\lambda)\right)\right]=l[J_0^2(\lambda)+J_1^2(\lambda)]. \qquad (24)$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$J_0(\lambda)=0. \qquad (25)$$

На рисунке показан график функции $y=J_0(\lambda)$.



Из графика видно, что корни уравнения (25) действительные и различные. Если λ — корень уравнения (25), то λ также является корнем уравнения (25). Пусть λ_n и μ_n — различные корни уравнения (25). Тогда соотношение (23) примет вид

$$\int_0^l J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx=0. \qquad (26)$$

Аналогично вместо соотношения (24) получим равенство

$$\int_0^l J_0^2\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx=lJ_1^2(\lambda_n). \qquad (27)$$

 ISSN 0572-2691

Теперь любую функцию $f(x) \in W_2^{1,0}(0,l)$ можно представить в виде ряда Фурье–Бесселя

$$f(x) = \sum_{n-1}^{\infty} f_n J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

где коэффициенты f_n равны

$$f_n = \frac{1}{lJ_1^2(\lambda_n)} \int_0^l f(y) J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{y}{l}}\right) dy.$$

На основании двух последних соотношений имеем

$$f(x) = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{lJ_1^2(\lambda_n)} J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{y}{l}}\right) f(y) dy. \tag{28}$$

Полагая в этом равенстве $f(x) \equiv 1$, находим

$$1 = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{lJ_1^2(\lambda_n)} J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{y}{l}}\right) dy. \tag{29}$$

С другой стороны, для дельта-функции Дирака $\delta(x)$ справедлива формула $\int_0^l \delta(x-y)\, dy = 1,$ поэтому из соотношения (29) непосредственно следует равенство

$$\delta(x-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{lJ_1^2(\lambda_n)} J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{y}{l}}\right). \tag{30}$$

Основной результат

Учитывая формулу (30), ищем функции $P_{ij}(t, x, y)$ в таком виде:

$$P_{ij}(t,x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{nij}(t)}{lJ_1^2(\lambda_n)} J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{y}{l}}\right). \tag{31}$$

Тогда из равенства (22) следуют соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial P_{ij}(t,x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \frac{\partial P_{ij}(t,x,y)}{\partial y}\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{4l} \frac{p_{nij}(t)}{lJ_1^2(\lambda_n)} J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{y}{l}}\right). \tag{32}$$

Из формулы (31) также получим

$$\frac{\partial P_{ij}(t,x,y)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dp_{nij}(t)}{dt} \frac{1}{lJ_1^2(\lambda_n)} J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right) J_0\left(\lambda_n \sqrt{\frac{y}{l}}\right), \tag{33}$$

$$\int_0^l P_{ij}(t,x,s)P_{km}(t,s,y)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{nij}(t)p_{nkm}(t)}{lJ_1^2(\lambda_n)}J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{y}{l}}\right), \qquad (34)$$

поскольку имеют место соотношения (26) и (27). Равенства (30)–(34) позволяют из системы интегро-дифференциальных уравнений (20) получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{n11}(t)}{dt} - \left(\dfrac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2 [p_{n12}(t) + p_{n21}(t)] - p_{n12}(t)p_{n21}(t) + 1 = 0, \\ \dfrac{dp_{n12}(t)}{dt} - \left(\dfrac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2 p_{n22}(t) + p_{n11}(t) - p_{n12}(t)p_{n21}(t) = 0, \\ \dfrac{dp_{n21}(t)}{dt} - \left(\dfrac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2 p_{n22}(t) + p_{n11}(t) - p_{n22}(t)p_{n21}(t) = 0 \\ \dfrac{dp_{n22}(t)}{dt} + p_{n12}(t) + p_{n21}(t) - p_{n22}^2(t) = 0. \end{cases} \qquad (35)$$

Условия трансверсальности при этом будут выглядеть так:

$$p_{n11}(t_1) = p_{n22}(t_1) = 1, \quad p_{n12}(t_1) = p_{n21}(t_1) = 0. \qquad (36)$$

Затем рассмотрим следующие четыре матрицы второго порядка:

$$\mathrm{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\dfrac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A}_n^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\dfrac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (37)$$

Тогда систему дифференциальных уравнений (35) можно записать как одно матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathrm{P}_n(t)}{dt} + \mathrm{P}_n(t)\mathrm{A}_n + \mathrm{A}_n^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_n(t) - \mathrm{P}_n(t)\mathrm{F}\mathrm{P}_n(t) + \mathrm{Q} = 0, \qquad (38)$$

где матрицы $\mathbf{P}_n(t)$ и $\mathbf{0}$ соответственно имеют вид

$$\mathrm{P}_n(t) = \begin{bmatrix} p_{n11}(t) & p_{n12}(t) \\ p_{n21}(t) & p_{n22}(t) \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие трансверсальности (36) для уравнения (38) будут представлены следующим образом:

$$\mathrm{P}_n(t_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (39)$$

Решение задачи (38)–(39) будем строить с помощью блочной матрицы H_n, которая имеет вид

$$\mathrm{H}_n = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_n & -\mathrm{F} \\ -\mathrm{Q} & -\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

или в развернутом виде

$$\mathrm{H}_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \left(\frac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (40)$$

Матрица (40) имеет такие собственные числа:

$$\lambda_{n1}=-\alpha_n-i\beta_n,\ \lambda_{n2}=-\alpha_n+i\beta_n,\ \lambda_{n3}=\alpha_n-i\beta_n,\ \lambda_{n4}=\alpha_n+i\beta_n,$$

где $i^2=-1$ и

$$\alpha_n=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^4+1}-\left(\frac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2}{2}},\ \beta_n=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^4+1}+\left(\frac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2}{2}}.$$

В [14] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Матрица $\exp(\mathbf{H}_n t)$ имеет вид

$$\exp(\mathrm{H}_n t)=\mathrm{S}_n(t)=\begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) & s_{nk3}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{nk22}(t) & s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \\ s_{n31}(t) & s_{n32}(t) & s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) & s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{cases} s_{n11}(t)=\cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), s_{n21}(t)=\alpha_n\sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)-\beta_n\cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), \\ s_{n31}(t)=-\alpha_n\cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)-\beta_n\sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), s_{n41}(t)=\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), \\ s_{n12}(t)=\dfrac{\alpha_n\sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)+\beta_n\cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2+\beta_n^2}, s_{n22}(t)=\cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), \\ s_{n32}(t)=-\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), s_{n42}(t)=\dfrac{\alpha_n\cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)-\beta_n\sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2+\beta_n^2}, \\ s_{n13}(t)=\dfrac{\alpha_n\cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)-\beta_n\sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2+\beta_n^2}, s_{n23}(t)=\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), \\ s_{n33}(t)=\cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), s_{n43}(t)=-\dfrac{\alpha_n\sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)+\beta_n\cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2+\beta_n^2}, \\ s_{n14}(t)=-\sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), s_{n24}(t)=-\alpha_n\cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)-\beta_n\sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), \\ s_{n34}(t)=-\alpha_n\sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)+\beta_n\cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), s_{n44}(t)=\cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t). \end{cases} \qquad (41)$$

В [15, с. 311] для вычисления матрицы $\mathrm{P}_n(t)$ получена формула

$$\mathrm{P}_n(t)=[\mathrm{F}_{n22}(t_1-t)-\mathrm{F}_{n12}(t_1-t)]^{-1}[\mathrm{F}_{n11}(t_1-t)-\mathrm{F}_{n21}(t_1-t)], \qquad (42)$$

где использованы обозначения

$$\mathrm{F}_{n11}(t)=\begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathrm{F}_{n12}(t)=\begin{bmatrix} s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{F}_{n21}(t)=\begin{bmatrix} s_{n31}(t) & s_{n32}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathrm{F}_{n22}(t)=\begin{bmatrix} s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix}.$$

В данном случае для вычисления элементов матрицы (42) имеем следующие формулы:

$$p_{n11}(t)=\frac{q_{n11}(t_1-t)}{\sigma_n(t_1-t)}, \quad p_{n12}(t)=p_{n21}(t)=\frac{q_{n12}(t_1-t)}{\sigma_n(t_1-t)}, \quad p_{n22}(t)=\frac{q_{n22}(t_1-t)}{\sigma_n(t_1-t)}, \tag{43}$$

где использованы обозначения

$$q_{n11}(t)=(\alpha_n^2+\beta_n^2)[(\alpha_n^2+\beta_n^2-1)\cos(2\beta_n t)-$$

$$-(\alpha_n^2+\beta_n^2+1)\cos h(2\alpha_n t)]-2\alpha_n\sin(2\beta_n t)-2\beta_n\sin h(2\alpha_n t),$$

$$q_{n12}(t)=2\alpha_n\beta_n[\cos h(2\alpha_n t)-\cos(2\beta_n t)]-$$

$$-\beta_n(\alpha_n^2+\beta_n^2-1)\sin(2\beta_n t)+\alpha_n(\alpha_n^2+\beta_n^2+1)\sin h(2\alpha_n t)$$

$$q_{n22}(t)=(\alpha_n^2+\beta_n^2-1)\cos(2\beta_n t)+(\alpha_n^2+\beta_n^2+1)\cos h(2\alpha_n t)-$$

$$-2\alpha_n\sin(2\beta_n t)+2\beta_n\sin h(2\alpha_n t),$$

$$\sigma_n(t)=2\beta_n^2\cos h(2\alpha_n t)+2\alpha_n^2\cos(2\beta_n t)+$$

$$+\beta_n(\alpha_n^2+\beta_n^2+1)\sin h(2\alpha_n t)+\alpha_n(\alpha_n^2+\beta_n^2-1)\sin(2\beta_n t).$$

Теорема 4. Элементы матрицы (42) можно найти по формулам (43). Для вычисления оптимального управления имеем выражение

$$u_n(t)=-p_{n21}(t)z_n(t)-p_{n22}(t)\frac{dz_n(t)}{dt},$$

где функция $z_n(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d^2z_n(t)}{dt^2}+p_{n22}(t)\frac{dz_n(t)}{dt}+\left[\left(\frac{a\lambda_n}{2\sqrt{l}}\right)^2+p_{n21}(t)\right]z_n(t)=0, \quad z_n(t_0)=f_n, \quad \frac{dz_n(t_0)}{dt}=g_n,$$

$$f_n=\frac{1}{lJ_1^2(\lambda_n)}\int_0^l f(x)J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx, \quad g_n=\frac{1}{lJ_1^2(\lambda_n)}\int_0^l g(x)J_0\left(\lambda_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx.$$

Заключение

В настоящей статье исследуется линейно-квадратическая задача оптимального управления процессом колебаний подвешенной нити. Поскольку такая задача рассматривается впервые, то актуальность данного исследования более чем очевидна. Для нахождения решения сформулированной в статье задачи использован метод множителей Лагранжа, с помощью которого получены необходимые условия оптимальности и доказана единственность оптимального управления. Также предложен вывод системы интегро-дифференциальных уравнений Риккати. С привлечением определенных свойств функции Бесселя первого рода нулевого порядка решение этой системы имеет аналитический вид. В свою очередь, такой прием позволил получить явную формулу для вычисления оптимального управления. Заслуживает внимания более детальное исследование функций (43). Также интересно рассмотреть аналогичную задачу с учетом случайных параметров.

М.М. Копець

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ КОЛИВАННЯМИ ПІДВІШЕНОЇ НИТКИ

Розглянуто лінійно-квадратичну задачу оптимального керування процесом коливань підвішеної нитки. Для даної задачі отримано необхідні умови оптимальності та доведено єдиність оптимального керування. Аналіз цих умов дав можливість вивести систему інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті, розв'язок якої подано в замкненій формі.

M.M. Kopets

OPTIMAL CONTROL OF THE VIBRATIONS OF A SUSPENDED THREAD

The paper is devoted to the linear-quadratic optimal control problem by the process of the vibrations of a suspended thread. For a considered optimization problem the necessary conditions of optimality are obtained and the uniqueness of the optimal control is proved. The analysis of these conditions enabled one to deduce the system of Riccati integro-differential equations which solution is presented in closed form.

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — М. : Физматгиз, 1959. — 916 с.
2. *Крылов А.Н.* Собрание трудов. Т. 3. Математика, ч. 2. — М. : Изд. АН СССР, 1949. — 481 с.
3. *Стрэтт (лорд Рэлей) Дж.В.* Теория звука. Т. 1. — М. : Гостехиздат, 1940. — 499 с.
4. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. — М. : Машиностроение, 1985. — 472 с.
5. *Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г.* Волновые гидравлические модели распространения возмущений. — Киев : Наук. думка, 2015. — 172 с.
6. *Яблонский А.А., Норейко С.С.* Курс теории колебаний. — СПб. : Изд-во «Лань», 2003. — 256 с.
7. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1975. — 568 с.
8. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. — М. : Физматлит, 2004. — 176 с.
9. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. — М. : Мир, 1975. — 160 с.
10. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М. : Наука, 1975. — 478 с.
11. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация системам с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1977. — 498 с.
12. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // Прикладная математика и механика. — 1992. — **56**, № 5. — С. 810–826
13. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.
14. *Копец М.М.* Оптимальное управление процессом колебаний тонкого прямоугольного стержня // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 3. — С. 42–55.
15. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. — М. : Наука, 1978. — 552 с.

Получено 21.04.2016