

## АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОРТЯЩИМИСЯ ЗАПАСАМИ И РАЗНОТИПНЫМИ ЗАЯВКАМИ

### Введение

В классических моделях систем управления запасами предполагается, что время обслуживания заявок равно нулю (либо настолько мало, что им можно пренебречь). Вместе с тем существуют многие реальные системы, в которых это допущение неприменимо. Системы управления запасами, в которых время обслуживания заявок является положительной величиной, в современной англоязычной литературе получили название систем обслуживания-запасания (Queueing-Inventory Systems, QIS). Одними из первых работ в этом направлении были [1, 2]. Детальный обзор работ, посвященных изучению таких систем, можно найти в [3].

Основное допущение в моделях QIS состоит в том, что после обслуживания каждой заявки уровень запасов системы уменьшается. Вместе с тем в недавних работах [4, 5] изучены модели QIS, где это допущение не выполняется, т.е. там предложены и изучены модели, в которых уровень запасов не уменьшается после каждого обслуживания заявок. Указаны примеры таких систем: в некоторых реальных системах после беседы (обслуживания) с продавцом (сервером) некоторая часть покупателей (заявок) не приобретают товар (запас) и покидают систему. Следовательно, в таких случаях уровень запасов системы не уменьшается; если покупатель приобретает товар, то уровень запасов уменьшается. Еще одним примером является конкурс на замещение вакантных должностей (запасы), где после беседы (обслуживания) не каждый кандидат (заявка) принимается на работу, и, следовательно, не уменьшается количество вакантных должностей.

Мотивационным началом данного исследования явились результаты, полученные в работах [4, 5]. Здесь предложенные в [4, 5] модели несколько модифицируются. Во-первых, в отличие от [4, 5], изучаются модели QIS с портящимися запасами (Perishable Queueing-Inventory System, PQIS); во-вторых, предполагается, что поступившие заявки присоединяются к очереди даже при отсутствии запасов системы; в-третьих, допускается, что среднее время обслуживания разнотипных заявок (т.е. заявок, которые покупают запасы, и заявок, которые не покупают запасы) различно. Это допущение более адекватно описывает реальные ситуации, так как если заявка решила купить товар, то для нее начинаются дополнительные процедуры по оформлению товара. Таким образом, среднее время обслуживания таких заявок будет больше (иногда намного больше), чем заявок, которые отказываются приобрести товар. Кроме указанных выше отличий от моделей, изученных в [4, 5], здесь также используется альтернативный метод их математического анализа. А именно, для изучения предложенных моделей применяется метод укрупнения состояний двухмерных цепей Маркова (Two-Dimensional Markov Chain, 2-D MC) [6]. С помощью имитационного моделирования показана высокая точность предложенных приближенных формул.

Отметим также, что модели PQIS с положительным временем обслуживания заявок изучены в работах [7–13], в которых для нахождения стационарного распределения соответствующих многомерных цепей Маркова используются раз-

личные модификации матрично-аналитического метода Ньютона [14]. Краткий обзор этих работ можно найти также в [6, 15].

### Описание модели и постановка задачи

В изучаемую систему поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Если в момент поступления заявки уровень запасов положительный, то она с вероятностью 1 принимается на обслуживание, при условии что в этот момент сервер свободен; иначе заявки становятся в очередь. Здесь рассматриваются очереди ограниченной и неограниченной длины. В модели с ограниченной очередью, если в момент поступления очередной заявки в системе уже имеется  $N$  заявок (включая заявки в сервере), она теряется с вероятностью 1. В модели с неограниченной очередью все заявки могут присоединиться к очереди.

После обслуживания заявка, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью  $\sigma_1$  отказывается получить товар, либо с вероятностью  $\sigma_2$  получает товар,  $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ . При этом, если заявка отказывается получить товар, время ее обслуживания имеет экспоненциальное распределение со средним  $\mu_1^{-1}$ ; иначе время ее обслуживания также имеет экспоненциальное распределение, но со средним  $\mu_2^{-1}$ ,  $\mu_2 < \mu_1$ .

Заявки присоединяются к очереди даже тогда, когда уровень запасов равен нулю, и они некоторое время ожидают поступления запасов. При этом, находясь в очереди, они являются нетерпеливыми, т.е. каждая заявка независимо от остальных ожидает в очереди случайное время, которое имеет экспоненциальное распределение со средним  $\tau^{-1}$ .

Для простоты изложения предположим, что поступающие заявки требуют некоторый ресурс единичного размера, т.е. после обслуживания таких заявок уровень запасов на складе уменьшается на единицу.

Каждая единица запасов системы независимо от остальных становится непригодной для использования после случайного времени, которое имеет экспоненциальную функцию распределения (ф.р.) с параметром  $\gamma$ ,  $\gamma > 0$ . При этом предполагается, что запас, который уже находится на этапе отпуска по заявке, не может портиться. Это означает, что уровень запасов на складе системы уменьшается не только после их отпуска по заявкам, но и в результате их порчи.

Система имеет склад ограниченного объема  $S$ . Пополнение склада запасами осуществляется согласно политике  $(s, S)$ . Это означает, что когда уровень запасов системы опускается до некоторой пороговой величины  $s$ , отправляется заказ на вышестоящий склад на поставку запасов объема  $S - s$ . При этом требуется, чтобы после выполнения заказа уровень запасов на складе системы был не меньше указанной величины  $s$ . Следовательно, для предотвращения случаев многократных заказов необходимо выполнение соотношения  $s < S/2$ , иными словами, возможными значениями  $s$  являются числа  $s = 0, 1, \dots, \left[ \frac{S}{2} \right] - 1$ , где  $[a]$  обозначает целую часть  $a$ .

Время выполнения заказа является положительной случайной величиной, которая имеет экспоненциальное распределение со средним  $v^{-1}$ .

Задача состоит в определении совместного распределения уровня запасов системы и длины очереди заявок. Решение этой задачи позволит определить также усредненные характеристики изучаемой модели PQIS, которые оцениваются с помощью

следующих параметров: средний уровень запасов на складе ( $S_{av}$ ), средняя интенсивность порчи запасов системы ( $\Gamma_{av}$ ); средняя интенсивность заказов ( $RR$ ); вероятность потери заявок ( $PL$ ); средняя длина очереди заявок ( $L_{av}$ ). Определение указанных характеристик позволяет произвести стоимостный анализ системы.

### Методы расчета характеристик системы

Вначале рассмотрим модель системы с ограниченной очередью. Работа такой системы описывается 2-D МС с состояниями вида  $(m, n)$ , где  $m$  — уровень ресурсов на складе,  $n$  — число заявок в системе. Фазовое пространство состояний (ФПС) этой цепи определяется так:

$$E = \{(m, n) : m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots, N\}. \quad (1)$$

Определим элементы производящей матрицы ( $Q$ -матрицы) данной 2-D МС. Граф переходов между состояниями этой цепи показан на рис. 1. Интенсивность перехода из состояния  $(m_1, n_1) \in E$  в состояние  $(m_2, n_2) \in E$  обозначим  $q((m_1, n_1), (m_2, n_2))$ .

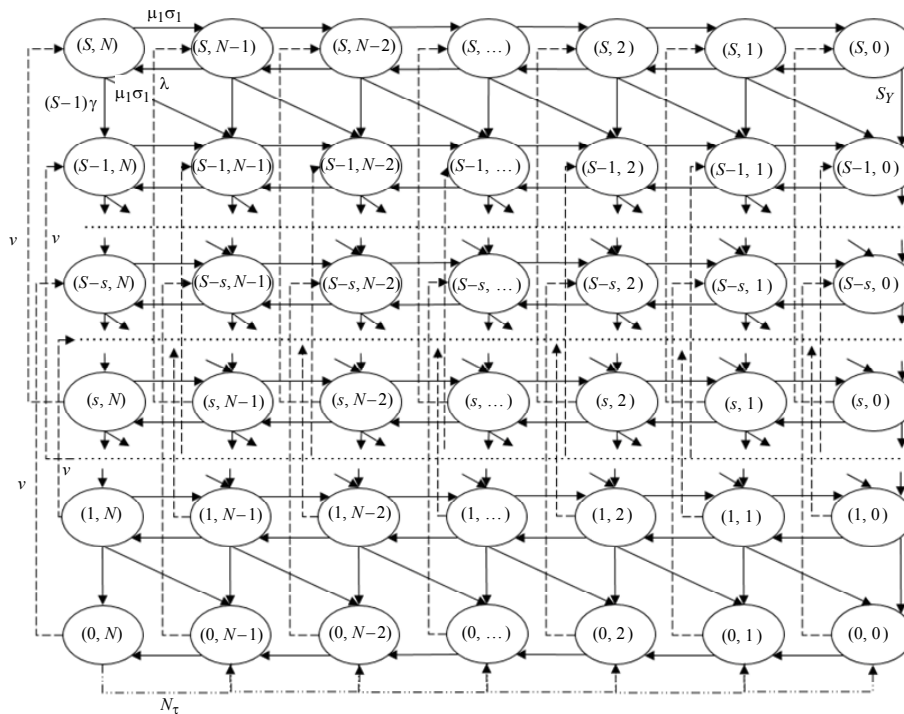


Рис. 1

Из описания изучаемой системы видно, что переходы между состояниями ФПС (1) связаны со следующими событиями: (i) поступление заявок, (ii) завершение обслуживания заявок, (iii) завершение времени жизни запасов, (iv) уход заявок из очереди из-за их нетерпеливости и (v) пополнение запасов. Исходя из принятой политики пополнения запасов и схемы ухода заявок из очереди, необходимо различать следующие три случая при определении исходного состояния  $(m_1, n_1) \in E$ : 1)  $m_1 > s$ ; 2)  $0 < m_1 \leq s$ ; 3)  $m_1 = 0$ .

Сначала рассмотрим случай  $m_1 > s$ . Выходы из данного состояния  $(m_1, n_1)$  из-за событий типа (iv) и (v) невозможны, так как в таких состояниях заявки терпеливы, и не происходит пополнения склада запасами. Остальные переходы определяются следующим образом.

- Если поступает заявка (события типа (i)) и число заявок в системе меньше  $N$ , то число заявок в системе увеличивается на единицу, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(m_1, n_1 + 1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\lambda$ .

- Если после обслуживания заявка отказывается получить товар (события типа (ii)), то число заявок в системе уменьшается на единицу, при этом уровень запасов системы не меняется, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(m_1, n_1 - 1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\mu_1 \sigma_1$ .

- Если после завершения обслуживания заявка получает товар (события типа (ii)), то число заявок в системе и уровень запасов системы одновременно уменьшаются на единицу, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(m_1 - 1, n_1 - 1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $\mu_2(1 - \sigma_1)$ .

- После завершения времени жизни запасов на складе (события типа (iii)) осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(m_1 - 1, n_1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $m_1 \gamma$ , если  $n_1 = 0$ , а в случаях  $n_1 > 0$  — интенсивность такого перехода равна  $(m_1 - 1) \gamma$ .

Следовательно, для случаев  $m_1 > s$  элементы  $Q$ -матрицы определяются так (см. рис. 1):

$$q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m_2 = m_1, n_2 = n_1 + 1, \\ \mu_1 \sigma_1, & \text{если } m_2 = m_1, n_2 = n_1 - 1, \\ \mu_2 \sigma_2, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 - 1, \\ m_1 \gamma, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_1 = n_2 = 0, \\ (m_1 - 1) \gamma, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_1 > 0, n_2 = n_1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2)$$

Если в исходном состоянии  $(m_1, n_1) \in E$  выполняется условие  $0 < m_1 \leq s$ , то выходы из данного состояния  $(m_1, n_1)$  из-за событий типа (iv) также невозможны, так как в таких состояниях заявки терпеливы. Кроме того, интенсивности переходов для указанных выше событий типа (i)–(iii) определяются аналогично соотношениям (2). Вместе с тем в момент поступления заказа объема  $S - s$  (события типа (v)) происходит переход из этого состояния в состояние  $(m_1 + S - s, n_1)$ ; интенсивность такого перехода равна  $v$ . Следовательно, для случаев  $0 < m_1 \leq s$  указанные выше элементы  $Q$ -матрицы определяются так (см. рис. 1):

$$q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m_2 = m_1, n_2 = n_1 + 1, \\ \mu_1 \sigma_1, & \text{если } m_2 = m_1, n_2 = n_1 - 1, \\ \mu_2 \sigma_2, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 - 1, \\ m_1 \gamma, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_2 = n_1 = 0, \\ (m_1 - 1) \gamma, & \text{если } m_2 = m_1 - 1, n_1 > 0, n_2 = n_1, \\ v, & \text{если } m_2 = m_1 + S, n_2 = n_1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

И наконец, пусть в исходном состоянии  $(m_1, n_1) \in E$  выполняется условие  $m_1 = 0$ . В этом случае выходы из данного состояния из-за событий типа (ii) и (iii) невозможны, так как в этих состояниях невозможно производить обслуживание заявок и склад системы является пустым. В этих состояниях интенсивности переходов для событий типа (i) и (v) определяются аналогично соотношениям (3). Интенсивности переходов из-за нетерпеливости заявок (события типа (iv)) определяются так: после ухода заявки из очереди из-за ее нетерпеливости число заявок в системе уменьшается на единицу, и при этом уровень запасов системы также не меняется, т.е. осуществляется переход из данного состояния в состояние  $(0, n_1 - 1) \in E$ ; интенсивность этого перехода равна  $n_1\tau$ . Следовательно, для случаев  $m_1 = 0$  элементы  $Q$ -матрицы определяются так (см. рис. 1):

$$q((0, n_1), (m_2, n_2)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m_2 = 0, n_2 = n_1 + 1, \\ n_1\tau, & \text{если } m_2 = 0, n_2 = n_1 - 1, \\ \nu, & \text{если } m_2 = S - s, n_2 = n_1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

Из формул (2)–(4) видно, что все состояния этой конечной 2-D МС являются сообщающимися. Следовательно, в этой системе существует стационарный режим (см. рис. 1). Иными словами, стационарные вероятности состояний  $p(m, n)$ ,  $(m, n) \in E$ , являются единственным решением системы уравнений равновесия (СУР), которая составляется на основе соотношений (2)–(4). Из-за громоздкости и очевидности ее составления явный вид этой СУР здесь не приводится.

Искомые усредненные характеристики исследуемой системы находятся через стационарные вероятности состояний следующим образом.

- Средний уровень ресурсов на складе ( $S_{av}$ )

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^N p(m, n). \quad (5)$$

- Средняя интенсивность порчи запасов системы ( $\Gamma_{av}$ )

$$\Gamma_{av} = \gamma \left( \sum_{m=1}^S \left( mp(m, 0) + \sum_{n=1}^N (m-1) p(m, n) \right) \right). \quad (6)$$

- Средняя интенсивность заказов ( $RR$ )

$$RR = \gamma(s+1) p(s+1, 0) + (\mu_2\sigma_2 + s\gamma) \sum_{n=1}^N p(s+1, n). \quad (7)$$

- Вероятность потери заявок ( $PL$ )

$$PL = \sum_{m=0}^S p(m, N) + \sum_{n=1}^{N-1} p(0, n) \frac{n\tau}{\lambda + n\tau}. \quad (8)$$

- Среднее число заявок в системе ( $L_{av}$ )

$$L_{av} = \sum_{n=1}^N n \sum_{m=0}^S p(m, n). \quad (9)$$

Из формул (5)–(9) видно, что для точного расчета характеристик изучаемой модели PQIS необходимо найти решение указанной выше СУР для стационарных вероятностей состояний. В связи с этим отметим, что из-за сложной структуры  $Q$ -матрицы не всегда удастся найти ее аналитическое решение. Потому для решения поставленной задачи необходимо использовать известные численные методы теории марковских цепей. Однако эти методы работоспособны лишь для цепей умеренной размерности и совершенно бесполезны для цепей большой размерности, которые зачастую являются моделями реальных PQIS.

Здесь для решения указанной проблемы используется приближенный метод [6], позволяющий осуществить асимптотический анализ характеристик данной модели PQIS при больших размерностях склада системы и буфера для ожидания заявок в очереди.

Этот метод можно корректно использовать для анализа систем, которые работают в условиях большой нагрузки; иными словами, предполагается, что интенсивность поступления заявок намного превосходит интенсивности порчи запасов и их пополнения, т.е.  $\lambda \gg \max\{\gamma, \nu\}$ . Отметим, что это допущение выполняется в реальных PQIS. Кроме того, выше было указано, что  $\mu_1 \gg \mu_2$ .

При выполнении указанных допущений рассмотрим следующее расщепление исходного ФПС (1):

$$E = \bigcup_{m=0}^S E_m, E_{m_1} \cap E_{m_2} = 0, m_1 \neq m_2, \quad (10)$$

где  $E_m = \{(m, n) \in E : n = 0, 1, \dots, N\}$ ,  $m = 0, 1, \dots, S$ .

Расщепление (10) означает, что класс состояний  $E_m$  содержит те состояния  $(m, n)$  из исходного ФПС (1), в которых уровень запасов равен  $m$  независимо от числа заявок в системе (т.е. осуществляется разбиение графа состояний, показанного на рис. 1, по строкам). В силу принятых выше допущений заключаем, что интенсивности переходов между состояниями внутри строк намного превосходят интенсивности переходов между состояниями из разных строк.

Далее на основе расщепления (10) в исходном ФПС (1) определяется следующая функция укрупнения:

$$U((m, n)) = \langle m \rangle, \quad (11)$$

где  $\langle m \rangle$  — укрупненное состояние, которое объединяет в себе класс состояний  $E_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, S$ . Обозначим  $\Omega = \{\langle m \rangle : m = 0, 1, \dots, S\}$ .

Стационарное распределение исходной модели приближенно определяется следующим образом (см. [6]):

$$p(m, n) \approx \rho_m(n) \pi(\langle m \rangle), \quad (12)$$

где  $\rho_m(n)$  — вероятность состояния  $(m, n)$  внутри расщепленной модели с пространством состояний  $E_m$ , а  $\pi(\langle m \rangle)$  — вероятность укрупненного состояния  $\langle m \rangle \in \Omega$ .

Из расщепления (10) видно, что во всех состояниях  $(m, n)$  внутри расщепленной модели с ФПС  $E_m$  первая компонента является постоянной, и потому все состояния из этого класса определяются лишь второй компонентой. Таким образом, при изучении расщепленных моделей с ФПС  $E_m$  состояние  $(m, n) \in E_m$  может быть задано лишь второй компонентой, т.е. для удобства изложения при изучении расщепленной модели с ФПС  $E_m$  ее состояние  $(m, n)$  просто обозначается как  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Из соотношений (2) и (3) получаем, что вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с ФПС  $E_m$ ,  $m = 1, \dots, S$ , совпадают с вероятностями состояний модели  $M/M/1/N$  с нагрузкой  $a = \lambda/\mu_1\sigma_1 \text{ erl.}$ , т.е.

$$\rho_m(n) = a^n \frac{1-a}{1-a^{N+1}}, \quad m = 1, \dots, S. \quad (13)$$

*Замечание 1.* Поскольку величины  $\rho_m(n)$  не зависят от индекса  $m$ ,  $m = 1, \dots, S$ , ниже этот индекс у этих величин опускается.

Из соотношений (4) получаем, что вероятности состояний внутри расщепленной модели с ФПС  $E_0$  совпадают с вероятностями состояний модели Эрланга  $M/M/N/0$  с нагрузкой  $b = \lambda/\tau \text{ erl.}$ , т.е.

$$\rho_0(n) = \frac{\theta(n)}{\sum_{j=0}^N \theta(j)}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (14)$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения:  $\theta(j) = \frac{(\lambda/\tau)^j}{j!}$ .

Интенсивность перехода из одного укрупненного состояния  $\langle m_1 \rangle$  в другое укрупненное состояние  $\langle m_2 \rangle$  обозначим  $q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle)$ ,  $\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle \in \Omega$ . Согласно [6] эти параметры определяются следующим образом:

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \sum_{\substack{(m_1, n_1) \in E_{m_1} \\ (m_2, n_2) \in E_{m_2}}} q((m_1, n_1), (m_2, n_2)) p(m_1, n_1). \quad (15)$$

С учетом (2)–(4) и (13)–(15) после определенных преобразований находим, что указанные интенсивности переходов вычисляются так (рис. 2):

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \begin{cases} \Lambda(m_1), & \text{если } m_2 = m_1 - 1, \\ v, & \text{если } m_1 \leq s, m_2 = m_1 + S - s, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (16)$$

где  $\Lambda(m_1) = m_1\gamma\rho(0) + (1 - \rho(0))(\mu_2\sigma_2 + (m_1 - 1)\gamma)$ ,  $m_1 = 1, 2, \dots, S$ .

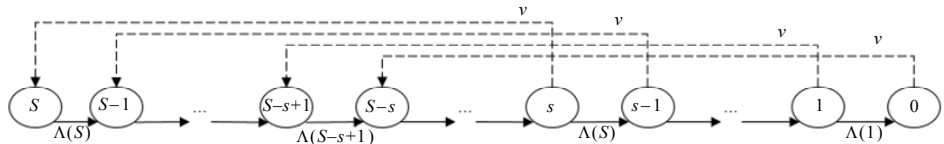


Рис. 2

Тогда из (16) имеем

$$\pi(\langle m \rangle) = \begin{cases} \alpha_m \pi(\langle s+1 \rangle), & \text{если } 0 \leq m \leq s, \\ \beta_m \pi(\langle s+1 \rangle), & \text{если } s+1 \leq m \leq S-s, \\ \chi_m \pi(\langle s+1 \rangle), & \text{если } S-s+1 \leq m \leq S. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения:

$$\alpha_m = \prod_{i=m+1}^{s+1} \frac{\Lambda(i)}{v + \Lambda(i-1)}; \quad \beta_m = \frac{\Lambda(s+1)}{\Lambda(m)}; \quad \chi_m = \frac{v}{\Lambda(m)} \sum_{i=m-S+s}^s \alpha_i.$$

Вероятность  $\pi(\langle s + 1 \rangle)$  находится из условия нормировки, т.е.

$$\pi(\langle s + 1 \rangle) = \left( \sum_{m=0}^s \alpha_m + \sum_{m=s+1}^{S-s} \beta_m + \sum_{m=S-s+1}^S \chi_m \right)^{-1}. \quad (18)$$

Далее с учетом соотношений (13)–(18) из (12) находится совместное распределение уровня запасов на складе системы и числа заявок в системе.

Следовательно, используя (5)–(9), получим следующие формулы для приближенного расчета характеристик изучаемой системы:

$$S_{av} \approx \sum_{m=1}^S m \pi(\langle m \rangle); \quad (19)$$

$$\Gamma_{av} \approx \gamma \sum_{m=1}^S \pi(\langle m \rangle) (m \rho(0) + (m-1)(1-\rho(0))); \quad (20)$$

$$RR \approx \pi(\langle s + 1 \rangle) (s + 1) \gamma \rho(0) + (s \gamma + \mu_2 \sigma_2) (1 - \rho(0)); \quad (21)$$

$$PL \approx \rho(N) (1 - \pi(\langle 0 \rangle)) + \pi(\langle 0 \rangle) \left( \rho_0(N) + \sum_{n=1}^{N-1} \rho_0(n) \frac{n\tau}{n\tau + \lambda} \right); \quad (22)$$

$$L_{av} \approx \pi(\langle 0 \rangle) \sum_{n=1}^N n \rho_0(n) + (1 - \pi(\langle 0 \rangle)) \sum_{n=1}^N n \rho(n). \quad (23)$$

Теперь рассмотрим модель PQIS с неограниченной очередью заявок. Работа данной системы также описывается 2-D МС, но в этом случае ФПС модели является бесконечномерным, т.е. ФПС этой модели задается так:

$$E = \{(m, n) : m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots\}. \quad (24)$$

*Замечание 2.* Здесь и в дальнейшем в целях упрощения изложения в обеих моделях используются одинаковые обозначения для их ФПС, стационарных распределений и характеристик. Однако из контекста будет ясно, о каких именно моделях идет речь.

Элементы  $Q$ -матрицы данной цепи Маркова (ЦМ) определяются аналогично (2)–(4). Характеристики системы определяются из соотношений (5)–(9), но при этом следует иметь в виду, что в этих формулах необходимо положить  $N = \infty$ . При определении вероятности потери заявок в данной модели отсутствует первое слагаемое в формуле (8), так как буфер для ожидания заявок имеет бесконечную размерность, и потери заявок происходят только из-за их нетерпеливости.

Для нахождения стационарного распределения соответствующей бесконечномерной 2-D МС не удастся использовать соответствующую СУР для стационарных вероятностей состояний, так как здесь также не удастся найти аналитические выражения для их вычисления. Использование метода двумерных производящих функций сопровождается известными трудностями. Потому для решения этой задачи используем описанный выше метод.

Здесь также рассматривается аналогичное (10) расщепление ФПС (24) и соответствующим образом строится функция укрупнения (см. (11)).



В данном случае вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с ФПС  $E_m$  вычисляются как вероятности состояний модели  $M/M/1/\infty$  с нагрузкой  $a = \lambda/\mu_1\sigma_1 \text{erl.}$ , т.е.

$$\rho(n) = a^n(1-a), \quad n = 0, 1, \dots \quad (25)$$

*Замечание 3.* Здесь предполагается, что выполняется условие эргодичности модели, т.е.  $a < 1$ .

Вероятности состояний внутри расщепленной модели с ФПС  $E_0$  вычисляются как вероятности состояний модели  $M/M/\infty$  с нагрузкой  $b = \lambda/\tau \text{erl.}$ , т.е.

$$\rho_0(n) = \frac{b^n}{n!} e^{-b}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Вероятности состояний укрупненной модели определяются аналогично (16), (17). Далее, используя соотношения (16), (18), (25) и (26), после определенных преобразований получим формулы для вычисления приближенных значений характеристик изучаемой модели PQIS с неограниченной очередью заявок. Средний уровень запасов, средняя интенсивность порчи запасов системы, средняя интенсивность заказов определяются по формулам (19)–(21) соответственно, при этом данные формулы еще больше упрощаются, так как  $1 - \rho(0) = a$ . Вероятность потери заявок и средняя длина очереди заявок в данной модели вычисляются так:

$$PL \approx \pi(\langle 0 \rangle) e^{-b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \frac{n\tau}{n\tau + \lambda}; \quad (27)$$

$$L_{av} \approx \pi(\langle 0 \rangle) b + (1 - \pi(\langle 0 \rangle)) \frac{a}{1-a}. \quad (28)$$

*Замечание 4.* В формулу (27) входит бесконечный ряд, для вычисления суммы которого не удастся найти явную формулу. Вместе с тем этот ряд сходится,

так как сходится соответствующий мажорантный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$ . Потому здесь используется метод отсечения хвоста ряда, т.е. верхняя граница суммы заменяется достаточно большой (конечной) величиной, далее она постепенно увеличивается, и эта процедура продолжается до тех пор, пока значение соответствующей суммы практически перестает меняться.

Отметим, что из данной работы в частном случае при  $\gamma^{-1} = \infty$  (т.е. при  $\gamma = 0$ ) могут быть получены результаты для модели QIS с бесконечным временем жизни запасов.

### Численные результаты

Проведенные численные эксперименты имели две цели: изучить, во-первых, точность вычисления вероятностей состояний исходной двухмерной цепи Маркова с помощью предложенных приближенных формул и, во-вторых, поведение характеристик исследуемых моделей PQIS относительно изменения выбранных параметров системы.

Относительно первой цели отметим, что, как было отмечено выше, точные значения вероятностей состояний исходной цепи определяются из соответствующей СУР, которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений размерности  $|E| = (S+1)(N+1)$ .

Зачастую точность вычисления приближенных значений неизвестных оценивается с помощью следующих норм подобия:

- максимум разностей:

$$\|N\|_1 = \max_{n \in E} |p(n) - \tilde{p}(n)|; \quad (29)$$

- норма Эвклида:

$$\|N\|_2 = \left( \sum_{n \in E} (p(n) - \tilde{p}(n))^2 \right)^{1/2}; \quad (30)$$

- подобия косинуса:

$$\|N\|_3 = \frac{\sum_{n \in E} p(n) \tilde{p}(n)}{\left( \sum_{n \in E} (p(n))^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n \in E} (\tilde{p}(n))^2 \right)^{1/2}}; \quad (31)$$

- коэффициент (Жаккара) Jaccard [16]

$$\|N\|_4 = \frac{\sum_{n \in E} \min \{p(n), \tilde{p}(n)\}}{\sum_{n \in E} \max \{p(n), \tilde{p}(n)\}}. \quad (32)$$

Здесь и далее  $\tilde{p}(n)$  обозначает приближенное значение вероятности состояния  $n \in E$ .

Поскольку для норм (29) и (30) имеет место соотношение  $\|N\|_1 \leq \|N\|_2 \leq \sqrt{|E|} \|N\|_1$ , они эквивалентны. Исходя из этого ниже предлагается вместо классической нормы Эвклида (30) использовать ее модификацию, которая оценивает погрешность, приходящуюся на долю одной (или каждой) переменной, т.е. здесь вместо (30) предлагается следующая норма:

$$\|N\|_5 = \frac{1}{|E|} \|N\|_2. \quad (33)$$

Введение нормы (33) объясняется тем, что предложенный подход предназначен, главным образом, для изучения моделей большой и сверхбольшой размерности, и поэтому интерес представляет изменение точности разработанных формул относительно увеличения размерности модели.

Изучение точности разработанных формул аналитическим путем не представляется возможным, поэтому используется способ сравнительного анализа результатов, полученных при численных экспериментах.

Некоторые результаты сравнительного анализа вычисления вероятностей состояний при точном и приближенном подходах показаны в табл. 1. Здесь и далее принимается, что фиксированные исходные данные модели выбраны следующим образом:  $\mu_1 = 6,0$ ,  $\mu_2 = 3,0$ ,  $\sigma_1 = 0,7$ ,  $\tau = 0,5$ ,  $\gamma = 2,0$ ,  $\nu = 1,0$ . Точные значения вероятностей состояний вычисляются из соответствующей СУР, при этом здесь использован пакет MATLAB. Время решения СУР существенным образом зависит от ее размера и составляет несколько часов при  $S \cdot N > 5000$  (так, например, при  $S = 50$  и  $N = 100$  на четырехъядерном процессоре Core i7 2.40 Ghz с оперативной памятью 8 Гбайт потребуется минимум 3-4 часа). Отметим, что на том же компьютере при использовании приближенного подхода для расчета характеристик модели с параметрами  $S = 100$  и  $N = 500$  потребуется 3-4 секунды.

Таблица 1

Входные параметры			Значения норм подобию			
$(s, S)$	$N$	$\lambda$	(29)	(33)	(31)	(32)
(6,20)	30	40	0,002330	0,000010	0,999803	0,961980
		60	0,001730	0,000007	0,999914	0,974577
	50	40	0,002330	0,000007	0,999699	0,955375
		60	0,001546	0,000004	0,999909	0,974099
	70	40	0,005211	0,000008	0,998790	0,923297
		60	0,001570	0,000003	0,999871	0,970748
	90	60	0,002401	0,000003	0,999696	0,958806
110	60	0,005392	0,000005	0,998894	0,929782	
(11,30)	30	40	0,001905	0,000006	0,999797	0,960883
		60	0,001414	0,000004	0,999911	0,973821
	50	40	0,001905	0,000004	0,999709	0,955487
		60	0,001263	0,000002	0,999907	0,973431
	70	40	0,004260	0,000005	0,998923	0,929186
		60	0,001263	0,000002	0,999875	0,970693
	90	60	0,001962	0,000002	0,999725	0,960921
110	60	0,004407	0,000003	0,999031	0,937082	
(16,40)	30	40	0,001658	0,000004	0,999794	0,960249
		60	0,001231	0,000003	0,999910	0,973384
	50	40	0,001658	0,000003	0,999715	0,955552
		60	0,001100	0,000002	0,999906	0,973044
	70	40	0,003709	0,000003	0,998997	0,932609
		60	0,001100	0,000001	0,999878	0,970661
	90	60	0,001709	0,000001	0,999742	0,962147
110	60	0,003837	0,000002	0,999105	0,941331	
(21,50)	30	40	0,001490	0,000003	0,999792	0,959817
		60	0,001106	0,000002	0,999909	0,973085
	50	40	0,001490	0,000002	0,999720	0,955597
		60	0,000989	0,000001	0,999906	0,972780
	70	40	0,003333	0,000002	0,999046	0,934952
		60	0,000989	0,000001	0,999880	0,970638
	90	60	0,001536	0,000001	0,999754	0,962984
110	40	0,004902	0,000004	0,992089	0,809082	
	60	0,003449	0,000001	0,999155	0,944241	

Из табл. 1 видно, что с ростом интенсивности потока заявок точность вычисления вероятностей состояний модели систематически увеличивается относительно всех норм, т.е. с ростом интенсивности потока заявок нормы (29) и (33) приближаются к нулю, в то время как нормы (31) и (32) — к единице. Эти результаты подтверждают известный факт из теории фазового укрупнения о том, что чем меньше интенсивности переходов между классами состояний в принятом расщеплении ФПС модели, тем больше точность вычисления вероятностей состояний исходной модели. Действительно, с ростом интенсивности потока заявок уменьшаются интенсивности переходов между классами состояний  $E_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, S$ , в расщеплении (10).

Для указанных выше исходных данных проведен также анализ точности вычисления характеристик системы. При этом характеристики разделены на два

класса — характеристики (5)–(7), которые касаются «системы управления запасами», и характеристики (8), (9), относящиеся к «системе обслуживания». Исходя из этого соответствующие результаты показаны в табл. 2 и 3.

Таблица 2

Входные параметры			$S_{av}$		$\Gamma_{av}$		$RR$	
(s, S)	N	$\lambda$	EV	AV	EV	AV	EV	AV
(6, 20)	5	20	5,145050	5,145192	8,572275	8,571888	0,667521	0,667515
		40	5,145315	5,145320	8,571551	8,571536	0,667510	0,667509
		60	5,145324	5,145324	8,571527	8,571525	0,667509	0,667509
	[10, 110]	[20,60]	5,145325	5,145325	8,571524	8,571523	0,667509	0,667509
(11, 30)	5	20	7,451137	7,451297	13,133213	13,132808	0,733121	0,733116
		40	7,451426	7,451432	13,132481	13,132465	0,733113	0,733113
		60	7,451435	7,451436	13,132457	13,132455	0,733113	0,733113
	[10, 110]	[20,60]	7,451437	7,451437	13,132453	13,132453	0,733113	0,733113
(16, 40)	5	20	9,706840	9,707010	17,614977	17,614560	0,767683	0,767680
		40	9,707141	9,707148	17,614237	17,614221	0,767677	0,767677
		60	9,707151	9,707152	17,614212	17,614210	0,767677	0,767677
	[10, 110]	[20,60]	9,707153	9,707153	17,614209	17,614209	0,767677	0,767677
(21, 50)	5	20	11,943660	11,943836	22,068385	22,067959	0,789204	0,789201
		40	11,943968	11,943975	22,067638	22,067622	0,789199	0,789199
		60	11,943978	11,943979	22,067614	22,067612	0,789199	0,789199
	[10, 110]	[20,60]	11,943980	11,943980	22,067610	22,067610	0,789199	0,789199

Таблица 3

Входные параметры			$PL$		$L_{av}$	
(s, S)	N	$\lambda$	EV	AV	EV	AV
(6,20)	30	40	0,852828	0,871632	29,794393	29,819734
		60	0,899260	0,911801	29,874305	29,889809
	50	40	0,836633	0,856304	49,677087	49,696265
		60	0,886070	0,898686	49,824199	49,839496
	70	40	0,823054	0,845784	69,414579	69,360907
		60	0,875395	0,888430	69,742761	69,754609
90	60	0,866240	0,880326	89,596804	89,588466	
110	60	0,857604	0,874144	109,310586	109,188014	
(11,30)	30	40	0,856421	0,875899	29,805254	29,831230
		60	0,902135	0,915125	29,880295	29,896187
	50	40	0,843183	0,863371	49,709371	49,730309
		60	0,891353	0,904405	49,839339	49,855062
	70	40	0,832084	0,854772	69,494804	69,456196
		60	0,882628	0,896022	69,772774	69,785677
90	60	0,875145	0,889398	89,653472	89,649876	
110	60	0,868086	0,884344	109,419524	109,322556	
(16,40)	30	40	0,858499	0,878368	29,811538	29,837880
		60	0,903798	0,917048	29,883760	29,899877

	50	40	0,846973	0,867459	49,728049	49,750005
		60	0,894410	0,907713	49,848098	49,864067
	70	40	0,837308	0,859972	69,541218	69,511324
		60	0,886812	0,900414	69,790137	69,803652
	90	60	0,880297	0,894646	89,686257	89,685404
	110	60	0,874150	0,890246	109,482550	109,400394
(21,50)	30	40	0,859918	0,880053	29,815827	29,842419
		60	0,904933	0,918360	29,886125	29,902395
	50	40	0,849559	0,870250	49,740796	49,763447
		60	0,896496	0,909971	49,854077	49,870213
	70	40	0,840873	0,863521	69,572893	69,548948
		60	0,889668	0,903411	69,801988	69,815919
	90	60	0,883813	0,898228	89,708632	89,709651
	110	40	0,821048	0,859383	108,509893	107,196679
		60	0,878289	0,894274	109,525563	109,453517

Важно отметить, что значения характеристик (5)–(7) почти полностью совпадают при использовании точного и приближенного подходов (см. табл. 2). Небольшие относительные погрешности (меньше 3 %), которые приемлемы в инженерных расчетах (см. табл. 3), наблюдаются при вычислении характеристики (8). Заметим, что в широком диапазоне изменения интенсивностей потока заявок характеристики (5)–(7) не зависят от размера буфера для ожидания заявок в очереди. Этот факт объясняется тем, что при выбранных исходных данных вероятность того, что в системе отсутствуют заявки, почти равна нулю, т.е. в системе всегда имеются заявки для обслуживания, и потому указанные характеристики не зависят от размера буфера.

Поскольку разработанные приближенные формулы имеют достаточно высокую точность, поведение характеристик исследуемых моделей PQIS относительно изменения выбранного параметра системы изучается с помощью приближенных процедур, так как время их выполнения составляет несколько секунд. При этом для конкретности изложения здесь изучается поведение указанных характеристик относительно изменения критического уровня запасов ( $s$ ).

Параметры модели выбраны следующим образом (значения остальных параметров указаны выше):  $S = 40$ ,  $N = 150$ ,  $\lambda = 30,0$ . Для конкретности изложения здесь рассматриваются два варианта экспериментов: принимается, что 1)  $\gamma = 2,0$  и 2)  $\gamma = 4,0$ . Приведенный ниже анализ основан исключительно на этих данных.

Результаты численных экспериментов для модели с конечной очередью показаны на рис. 3 и 4, где обозначения о и × на кривых относятся к результатам для вариантов 1) и 2) соответственно.

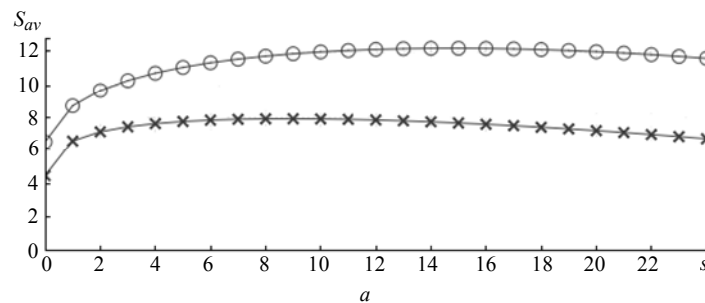
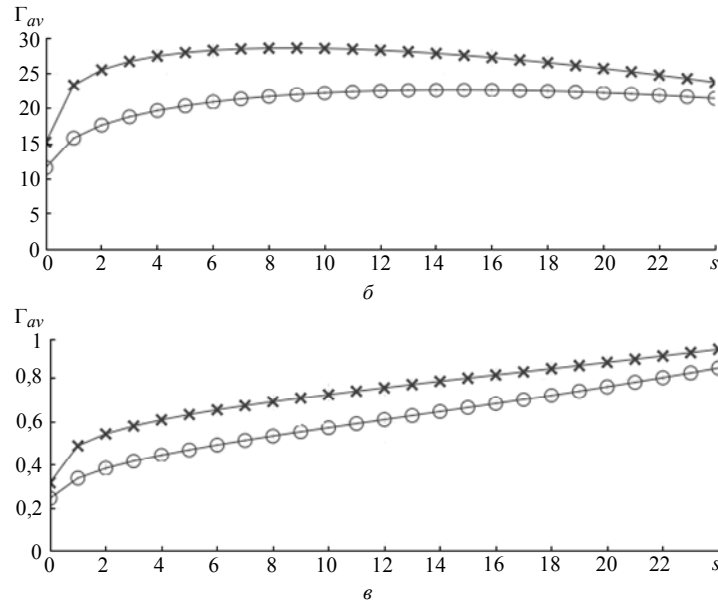


Рис. 3



Из рис. 3, а, видно, что с ростом параметра  $s$  функция  $S_{av}$  также сначала растет, но далее начинает уменьшаться с малой скоростью, при этом в первом варианте значения функции  $S_{av}$  оказываются бóльшими, чем во втором. Последний факт вполне ожидаем, так как увеличение времени жизни запасов приводит к увеличению среднего уровня запасов системы. Поведение функции  $\Gamma_{av}$  соответствует поведению функции  $S_{av}$  (рис. 3, б), при этом интуитивно предполагаемое соотношение  $\Gamma_{av}(s) \approx \gamma S_{av}(s)$  (см. также формулы (5) и (6)) оказывается справедливым. При этом с ростом параметра  $s$  растет точность этого соотношения. Функция  $RR$  является возрастающей относительно параметра  $s$ , при этом уменьшение времени жизни запасов приводит к увеличению частоты заказов запасов (рис. 3, в).

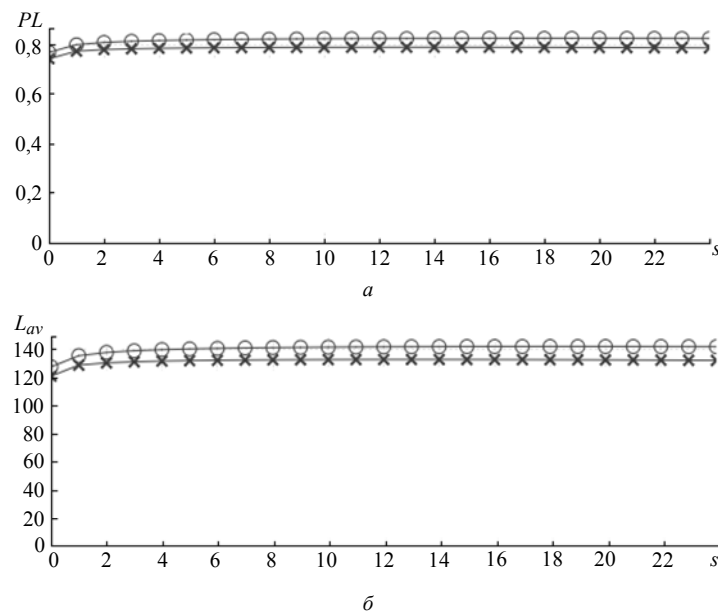


Рис. 4

С ростом параметра  $s$  функция  $PL$  также растет с очень малой скоростью, при этом в первом варианте значения функции  $PL$  оказываются большими, чем во втором варианте (рис. 4, *a*); аналогичное поведение наблюдается у функции  $L_{av}$  (рис. 4, *б*).

Теперь рассмотрим результаты численных экспериментов для модели с бесконечной очередью ( $N = \infty$ ). Часть из них показана на рис. 5 и 6, где обозначения  $\circ$  и  $\times$  на кривых относятся к результатам, полученным с помощью разработанных приближенных формул и имитационного моделирования соответственно. Здесь исходные данные выбраны так:  $S = 60, \lambda = 3,0, \mu_1 = 6,0, \mu_2 = 3,0, \sigma_1 = 0,7, \tau = 0,5, \gamma = 2,0, \nu = 1,0$ .

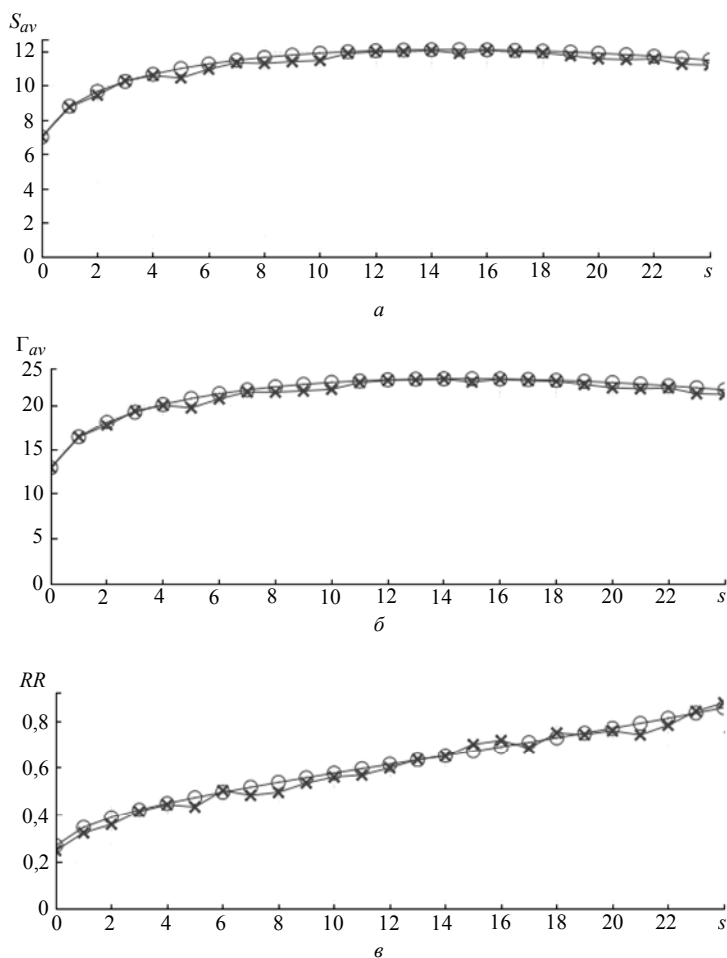


Рис. 5

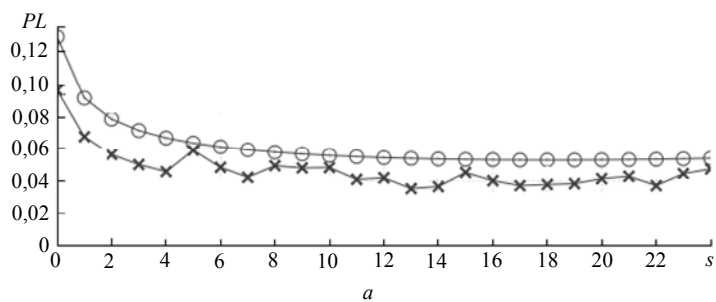
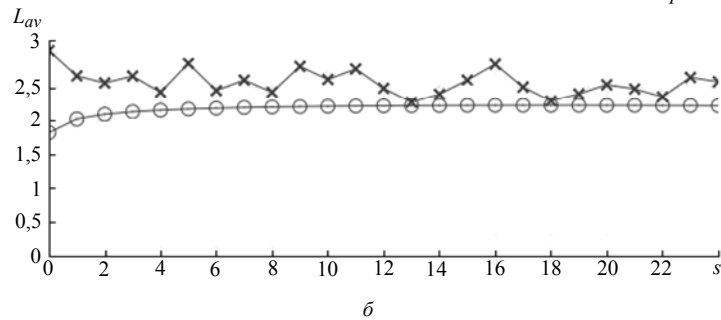


Рис. 6



В отличие от модели с конечной очередью в данном случае точные значения вероятностей состояний не могут быть вычислены из соответствующей СУР, поэтому здесь используется метод имитационного моделирования. Из рис. 5, а–в видно, что, как и в модели с конечной очередью, значения характеристик (5)–(7) почти полностью совпадают при использовании приближенного и имитационного подходов. Небольшие погрешности, которые приемлемы в инженерных расчетах, наблюдаются при вычислении характеристик (8) и (9) (рис. 6, а, б).

Отметим, что при использовании имитационного подхода для получения достоверных результатов (с 5 % доверительным интервалом) потребуется несколько десятков часов времени на компьютере с указанными выше характеристиками.

Полученные формулы позволяют также решать некоторые задачи оптимизации данной системы. Из-за ограниченности объема работы здесь рассматривается лишь одна задача подобного типа — задача минимизации суммарных штрафов (Total Cost, TC), связанных с функционированием системы.

Пусть все структурные и нагрузочные параметры системы — фиксированные величины, а единственно регулируемым параметром (т.е. параметром оптимизации) является точка заказа.

В стационарном режиме указанные выше штрафы определяются так:

$$TC(s) = c_r RR + c_h S_{av} + c_{ps} \Gamma_{av} + c_l \lambda PL + c_w L_{av}, \quad (34)$$

где  $c_r$  — цена одного заказа запасов;  $c_h$  — цена хранения единицы объема запасов за единицу времени;  $c_{ps}$  — цена порчи единицы запаса;  $c_l$  — штрафы за потери одной заявки;  $c_w$  — цена за единицу времени ожидания в очереди одной заявки.

*Замечание 5.* Здесь и далее в задаче оптимизации в выражении функционала и левой части ограничений в скобках указан оптимизируемый параметр  $s$ .

Пусть заданы ограничения на средний уровень запасов системы и вероятность потери заявок, т.е. требуется выполнение следующих ограничений:

$$S_{av}(s) \leq \bar{S}, \quad (35)$$

$$PL(s) \leq \overline{PL}. \quad (36)$$

Задача оптимизации заключается в нахождении таких значений параметра  $s$ , чтобы минимизировать суммарные штрафы (34) при выполнении ограничений (35) и (36).

При любых значениях входных параметров задача (34)–(36) имеет решение, так как множество возможных решений является дискретным и конечным. Для решения этой задачи может быть использован стандартный метод поиска минимума функции от дискретного аргумента.

Отметим, что решением задачи (34)–(36) для модели с конечной очередью при указанных выше исходных данных, если оно существует, всегда является  $s = 0$ . Это объясняется тем, что для выбранных исходных данных все составляющие функционала (34) имеют минимальное значение в точке  $s = 0$  (см. рис. 3 и 4).



В табл. 4 приводятся некоторые результаты решения задачи (34)–(36) для модели с бесконечной очередью с указанными выше исходными данными, где символ  $\emptyset$  означает, что задача не имеет решения. Коэффициенты в выражении функционала (34) выбирались так [17]:  $c_r = 15$ ,  $c_h = 0,3$ ,  $c_l = 5$ ,  $c_w = 3$ ,  $c_{ps} = 0,3$ .

Таблица 4

$\bar{S}$	6	9	10	10	11	11	12	12	12	13	13	13
$\overline{PL}$	0,04	0,08	0,08	0,06	0,08	0,04	0,08	0,06	0,04	0,08	0,06	0,04
$S^*$	$\emptyset$	$\emptyset$	2	$\emptyset$	2	$\emptyset$	2	7	$\emptyset$	2	7	$\emptyset$
$TC^*$	$\emptyset$	$\emptyset$	21,63	$\emptyset$	21,63	$\emptyset$	21,63	25,20	$\emptyset$	21,63	25,20	$\emptyset$

Анализ задачи (34)–(36) показывает, что ее оптимальное решение инвариантно в достаточно большом диапазоне изменения интенсивности входящего потока заявок, что очень важно с практической точки зрения. Эта инвариантность объясняется достаточно плавным изменением характеристик системы (5)–(9) относительно интенсивности входящего потока заявок.

### Заключение

Предложены модели систем обслуживания с портящимися запасами, в которых часть заявок после завершения обслуживания не покупает запасов системы. Заявки могут образовывать очереди конечной или бесконечной длины. В случае отсутствия запасов системы заявки, находящиеся в очереди, являются нетерпеливыми. Время выполнения заказов системы для пополнения запасов, а также время жизни запасов системы являются случайными величинами, имеющими экспоненциальные распределения с конечными средними. Политика пополнения запасов принадлежит классу политик двух уровней. Разработаны точный и приближенный методы определения характеристик изучаемых моделей. Точный метод эффективен для систем с умеренными значениями объема склада системы и размера буфера для ожидания заявок. Приближенный подход основан на алгоритмах фазового укрупнения состояний двумерных цепей Маркова и может быть применен для систем любой размерности. С помощью имитационного моделирования показана высокая точность полученных формул.

*A.Z. Melikov, L.A. Ponomarenko, M.O. Shahmaliyev*

### АНАЛІЗ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ ІЗ ЗАПАСАМИ, ЩО ПСУЮТЬСЯ, І РІЗНОТИПНИМИ ВИМОГАМИ

Запропоновано моделі систем обслуговування із запасами, що псуються, за наявності різнотипних вимог. Передбачається, що деякі вимоги після завершення їх обслуговування не купують запасів. Час обслуговування вимог і час поповнення запасів — додатні випадкові величини. Політика поповнення належить до класу двох рівнів. Розроблено точний і наближений методи розрахунку основних характеристик запропонованих моделей. Висока точність наведених формул показана за допомогою числових експериментів.

*A.Z. Melikov, L.A. Ponomarenko, M.O. Shahmaliyev*

### ANALYSIS OF PERISHABLE QUEUEING-INVENTORY SYSTEM WITH DIFFERENT TYPES OF CUSTOMERS

Models of perishable queueing-inventory systems with different types of customers are proposed. It is assumed that part of customers may not be served on completion

of service. Both service time of customers and replenishment lead time have exponential distributions. Lead policy is two-level one. Both exact and approximate methods to calculate the main characteristics of the proposed models are developed. The high accuracy of proposed approximate formulas are shown by results of numerical experiments.

1. *Sigman K., Simchi-Levi D.* Light traffic heuristic for an M/G/1 queue with limited inventory // *Annals of Operations Research*. — 1992. — **40**. — P. 371–380.
2. *Melikov A.Z., Molchanov A.A.* Stock optimization in transport/storage systems // *Cybernetics*. — 1992. — **27**, N 3. — P. 484–487.
3. *Krishnamoorthy A., Lakshmy B., Manikandan R.* A survey on inventory models with positive service time // *OPSEARCH*. — 2011. — **48**, N 2. — P. 153–169.
4. *Krishnamoorthy A., Manikandan R., Lakshmy B.* Revisit to queueing-inventory system with positive service time // *Annals of Operations Research*. — 2015. — **233**. — P. 221–236.
5. *Krishnamoorthy A., Manikandan R., Shajin D.* Analysis of a multi-server queueing-inventory system // *Advances in Operations Research (Hindawi Publishing Corporation)*. — 2015. — Article ID 747328. — 16 p.
6. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Shahmaliyev M.O.* Models of perishable queueing-inventory system with repeated customers // *Journal of Automation and Information Sciences*. — 2016. — **48**, N 6. — P. 22–38.
7. *Sivakumar B., Arivarignan G.* A perishable inventory system with service facilities and negative customers // *Advance Modeling and Optimization*. — 2006. — **7**, N 2. — P. 193–210.
8. *Manuel P., Sivakumar B., Arivarignan G.* A perishable inventory system with service facilities, MAP arrivals and PH-service times // *Journal of Systems Science and Systems Engineering*. — 2007. — **16**, N 1. — P. 62–73.
9. *Manuel P., Sivakumar B., Arivarignan G.* A perishable inventory system with service facilities and retrial customers // *Computers and Industrial Engineering*. — 2008. — **54**. — P. 484–501.
10. *Amirthakodi M., Radhamami V., Sivakumar B.* A perishable inventory system with service facility and feedback customers // *Annals of Operations Research*. — 2015. — **233**. — P. 25–55.
11. *Al Hamadi H.M., Sangeetha N., Sivakumar B.* Optimal control of service parameter for a perishable inventory system maintained at service facility with impatient customers // *Ibid.* — 2015. — **233**. — P. 3–23.
12. *Berman O., Sapna K.P.* Optimal service rate of service facility with perishable inventory items // *Naval Research Logistics*. — 2002. — **49**. — P. 464–482.
13. *Laxmi P.V., Soujanya M.L.* Perishable inventory systems with service interruptions, retrial demands and negative customers // *Applied Mathematics and Computation*. — 2015. — **262**. — P. 102–110.
14. *Neuts M.F.* Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. — Baltimore: John Hopkins University Press, 1981. — 332 p.
15. *Nahmias S.* Perishable inventory theory. — Heidelberg; Dordrecht; London; New York : Springer, 2011. — 80 p.
16. *Jaccard P.* Étude comparative de la distribution florale dans une portion des Alpes et des Jura // *Bulletin del la Société Vaudoise des Sciences Naturelles*. — 1901. — **37**. — P. 547–579.
17. *Jajaraman B., Sivakumar B., Arivarignan G.* A perishable inventory system with postponed demands and multiple server vacations // *Modelling and Simulation in Engineering (Hindawi Publishing Corporation)*. — 2012. — Article ID 620960. — 17 p.

Получено 23.03.2017

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины А.А. Чикрием.