

# КОСМИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

---

УДК 629.7; 681.5

*В.В. Волосов, В.Н. Шевченко*

## СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕНИЙ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

### Введение

Задача управления ориентацией КА представляет собой непреходящую актуальность для космической техники, начиная с ее зарождения. Первые КА имели ориентацию только одной оси, совпадающей с направлением на центр Земли или Солнца, получившее название планетоцентрических и солнцезцентрических систем ориентации. Отклонение оси КА от направления на центр Земли (местной вертикали) определялось специальным прибором — инфракрасной вертикалью (ИКВ). При этом одна из осей КА при его движении по орбите была направлена на центр Земли (с точностью до ошибок системы ориентации). Вращение КА вокруг этой оси было непредсказуемо произвольным. Иными словами, при этом было произвольным или неуправляемым положение двух других его осей связанной системы координат, расположенных в плоскости, ортогональной текущей местной вертикали. Настоящим прорывом стало создание системы ориентации, обеспечивающей трехосную стабилизацию, получившей наименование гироорбиты [1,2], представляющей собой космический аналог морского гирокомпаса [3]. При этом функцию суточного вращения Земли для гирокомпаса в гироорбите выполняло орбитальное вращение КА, реализуемое с помощью ИКВ постоянным отслеживанием осью КА направления на центр Земли. Другая из упомянутых осей, определяемая расположением гироскопа в корпусе КА, из произвольного начального направления приходила к установившемуся направлению, перпендикулярному плоскости орбиты. Естественно третья ось, образующая с двумя названными правую систему координат (СК), располагалась в плоскости орбиты. Интересная интерпретация принципа построения данной гироскопической системы ориентации как реализации алгоритма наблюдателя состояния динамических систем изложена в [4].

С тех пор системы ориентации прошли большой путь развития, реализовавшийся как за счет использования новых измерительных и исполнительных устройств, так и программно-математического обеспечения (ПМО), основанного на последних достижениях теории управления. Не приводя конкретных цифр, отметим, что если на первых спутниках точность ориентации характеризовалась десятками угловых минут и даже несколькими градусами, то в настоящее время она характеризуется угловыми секундами. В ПМО современных систем управления в качестве параметров ориентации в большинстве случаев используются кватернионы. Их преимущества по сравнению с углами Крылова–Эйлера подробно изложено в монографии [5], сыгравшей, как справедливо отмечается в [6], большую роль в популяризации идеи применения кватернионов в практических задачах на-

© В.В. ВОЛОСОВ, В.Н. ШЕВЧЕНКО, 2017

вигации и управления движением подвижных объектов различного назначения. Так, например, решения задач навигации и управления ориентацией аэрокосмических объектов рассмотрены в частности в монографиях [5, 7, 8].

Применению кватернионов в различных задачах управления посвящено практически необозримое и постоянно возрастающее количество работ. Кроме названных выше, отметим здесь лишь работы, все содержание которых или фрагменты из него посвящены исследованию устойчивости систем управления ориентацией и наиболее близки к содержанию данной статьи [9–13].

Исследование задач управления угловым движением твердого тела при его описании дифференциальными уравнениями, вектор состояния которых составлен из компонентов кватернионов, имеет следующие особенности. Первая из них состоит в том, что одной и той же его ориентации соответствует два кватерниона и соответственно два вектора состояния (ВС). Учет этой особенности частично рассмотрен в [9,10]. Вторая особенность — наличие у дифференциальных уравнений интеграла движения — сохранения нормы ВС. Вследствие этого никакие решения уравнений не могут быть асимптотически устойчивыми по Ляпунову. Они могут иметь форму устойчивости, называемую условной асимптотической устойчивостью или устойчивостью на многообразиях [14–17]. Обе эти особенности отмечались в [17]. Настоящая работа является ее дальнейшим развитием.

### Постановка задачи исследования

Для формулировки постановки задачи и ее последующего решения будем использовать следующие правые ортогональные системы координат — связанную систему координат (ССК)  $Oxyz$  и орбитальную ОСК  $Ox_0y_0z_0$  с началом в точке  $O$  — центре масс КА. Следуя [1], примем, что ось  $Oy_0$  направлена по текущему радиус-вектору с началом в центре Земли (местной вертикали). Ось  $Ox_0$  расположена в плоскости орбиты с положительным направлением в сторону движения КА. Предполагается, что орбита КА круговая. При этом ОСК вращается относительно инерциального пространства (инерциальной системы координат (ИСК)) с постоянной угловой скоростью  $\omega_*$  (орбитальной угловой скоростью), проекции которой на ее же оси имеют вид  $\omega_* = (0, 0, \omega_{*3})^T$ ,  $\omega_{*3} = -\sqrt{\mu/R^3}$  [18], где  $\mu$  — гравитационная постоянная Земли  $\mu = 398600,4 \text{ км}^3/\text{с}^2$ ,  $R$  — радиус орбиты КА. Символ  $T$  здесь и далее обозначает операцию транспонирования. В качестве ИСК можно, например, выбрать ОСК, «остановленную» в некоторый момент времени  $t = t_*$ .

Под ориентацией КА понимается ориентация ССК относительно ОСК и, в частности, относительно ИСК. В качестве параметров ориентации здесь используются компоненты кватернионов, состоящие из параметров Родрига–Гамильтона [5].

Математическая модель управляемого углового движения КА согласно [5,17, 19, 20] может быть записана в виде

$$2\dot{\Lambda} = B(\Lambda)\tilde{\omega}, \tilde{\omega} = \omega - S(\Lambda)\omega_*, S(\Lambda) = I_3 - 2\lambda_0\tilde{\lambda} + 2\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}^T, \quad (1)$$

$$J\dot{\omega} = M_C + M_g - \tilde{\omega}J\omega. \quad (2)$$

В уравнении (1) под символом  $\Lambda$  понимается элемент четырехмерного евклидова векторного пространства  $R^4$ ,  $\Lambda \in R^4$ . Рассматривается случай, когда вектор  $\Lambda^T = (\lambda_0, \lambda^T)$ ,  $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  состоит из компонентов нормированного кватерниона (параметров Родрига–Гамильтона). При этом  $\lambda_0 = \cos \frac{\vartheta}{2}$ ,  $\lambda_i = \gamma_i \sin \frac{\vartheta}{2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $\gamma_i$  — направляющие косинусы мгновенной оси вращения ССК  $Oxyz$  относительно ОСК  $Ox_0y_0z_0$  с их координатными осями  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ ,

$\|\Lambda\|^2 = 1$  [7, 21],  $\vartheta$  — угол поворота ССК относительно ОСК вокруг этой оси;  $S(\Lambda)$  — ортогональная матрица  $S^{-1}(\Lambda) = S^T(\Lambda)$  направляющих косинусов осей ССК с осями ОСК,  $Z_1 = S(\Lambda)Z_0$ , где  $Z_0$  и  $Z_1$  — векторы проекций произвольного вектора  $Z$  на оси ОСК и ССК соответственно. С учетом [5, 22] матрица  $S(\Lambda)$  приводится к виду

$$S(\Lambda) = \{s_1(\Lambda), s_2(\Lambda), s_3(\Lambda)\} = I_3 - 2\lambda_0\tilde{\lambda} + 2\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}, \quad (3)$$

где  $I_3$  — единичная матрица и под символом  $\tilde{\lambda}$  понимается кососимметричная  $\tilde{\lambda}^T = -\tilde{\lambda}$  матрица:

$$\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } \tilde{\lambda} = 2\forall\|\lambda\| \neq 0,$$

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  — вектор угловой скорости КА (ССК) относительно ИСК, заданный проекциями  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , на оси ССК,  $\tilde{\omega} = \omega - S(\Lambda)\omega_\bullet$  — вектор угловой скорости КА относительно ОСК в проекциях на ССК;  $J$  — симметрическая положительно определенная матрица  $J = J^T \succ 0$  представления тензора инерции КА относительно центра масс  $O$  в ССК, удовлетворяющая условиям физической реализуемости [23];  $M_C$  и  $M_g$  — искомый момент управления и гравитационный момент с проекциями на оси ССК соответственно. Согласно [1, 24] формулу для вычисления гравитационного момента можно представить в виде

$$M_g = 3 \frac{\mu}{R^3} \tilde{s}_2(\Lambda) J s_2(\Lambda) = 3\omega_{*3}^2 \tilde{s}_2(\Lambda) J s_2(\Lambda), \quad (5)$$

где  $\tilde{s}_2(\Lambda)$  — кососимметричная матрица вектора-столбца  $s_2(\Lambda)$  матрицы  $S(\Lambda)$ .

Обозначению  $B(\Lambda)$  соответствует  $4 \times 3$ -матрица полного ранга

$$B(\Lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda^T \\ \lambda_0 I_3 + \tilde{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \text{rank } B(\Lambda) = 3\forall\|\Lambda\| \neq 0. \quad (6)$$

Заметим, что кинематическое уравнение углового движения КА наряду с видом (1) может быть представлено в следующем виде:

$$\dot{\Lambda} = 0,5A(\omega, \omega_\bullet)\Lambda, \quad (7)$$

где  $A(\omega, \omega_\bullet)$  — кососимметрическая матрица

$$A(\omega, \omega_\bullet) = -A^T(\omega, \omega_\bullet) = \begin{pmatrix} 0 & -(\omega - \omega_\bullet)^T \\ (\omega - \omega_\bullet) & -(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_\bullet) \end{pmatrix}.$$

Сделаем необходимое для последующего изложения замечание об одном свойстве решений уравнения (1) [17]. Вычисляя производную функции  $\Lambda^T \Lambda = \|\Lambda\|^2$  в силу уравнения (1) убеждаемся, что она тождественно равна нулю. Поэтому уравнение (1) имеет первый интеграл  $\|\Lambda(t)\| \equiv c$ , где  $c$  — произвольное положительное число  $c \neq 0$ . Ему соответствует семейство концентрических сфер с центром в  $\Lambda = 0$ , радиусы которых определяются нормой  $\|\Lambda(t_0)\|$  начальных условий решений уравнения (1) и не зависят от угловых скоростей  $\omega$ , а следовательно, и от управлений  $M_C$  в уравнении (2). Из семейства сфер параметрам Родрига–Гамильтона  $\lambda_j(t)$ ,  $j = \overline{0,3}$ , соответствует только сфера единичного радиуса  $\|\Lambda\| = 1$ .

Из формулы (3) непосредственно видно, что заданием вектора параметров Родрига–Гамильтона  $\Lambda = \Lambda_S$  полностью определяется матрица направляющих косинусов  $S(\Lambda_S)$ , т.е. ориентация КА относительно ОСК. При этом одной и той же матрице  $S(\Lambda_S)$ , а следовательно, одной и той же ориентации КА соответствует два значения вектора параметров ориентации  $\Lambda = \pm \Lambda_S$ . Случаю совмещения осей ССК с осями ОСК  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = 360^\circ$ , при котором  $S(\Lambda_S) = I_3$ , соответствуют векторы  $\Lambda_S = (\pm 1, 0, 0, 0)$ .

Уравнения (1), (2) математической модели углового движения КА при заданном моменте управления  $M_C$  полностью определяют эволюцию его ориентации относительно опорной системы координат, а именно ОСК или, в частности, ИСК, если в них формально положить  $\omega_* = 0$ .

Поставим задачу синтеза управления  $M(\Lambda, \omega, \Lambda_S)$  такого, что при произвольном начальном состоянии  $\Lambda_0 = \Lambda(t_0)$ ,  $\|\Lambda_0\| = 1$ ,  $\omega_0 = \omega(t_0)$  реализуется достижение и стабилизация произвольной заданной ориентации  $S(\Lambda_S)$ , т.е.  $\|S(\Lambda(t)) - S(\Lambda_S)\| \rightarrow 0$ ,  $\|\omega(t) - \omega_S\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Под символом  $\omega_S$  понимается установившееся значение угловой скорости КА, соответствующее его постоянной ориентации  $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S$ , при которой в уравнении (1)  $\dot{\Lambda}(t) = 0$ . При этом для отыскания значения  $\omega_S$  получаем систему уравнений  $B(\Lambda_S)[\omega_S - S(\Lambda_S)\omega_*] = 0$ . Так как  $B(\Lambda)$  — матрица полного ранга, то эта переопределенная система четырех уравнений относительно вектора  $\omega_S$  совместная и имеет единственное решение  $\omega_S = S(\Lambda_S)\omega_*$ .

Заметим, что в постановке задачи речь идет не об асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений в смысле классических определений [25, 26]. В отличие от этих определений в постановке задачи рассматриваются не произвольные начальные условия  $\Lambda_0 \in R^4$ , а начальные условия  $\Lambda_0$ , расположенных на сфере единичного радиуса  $\|\Lambda\| = 1$ . Для характеристики свойств решений дифференциальных уравнений при начальных условиях, расположенных на некоторых многообразиях их фазовых пространств, в [14–16] используется понятие условной асимптотической устойчивости. В соответствии с этим понятием в дальнейшем без дополнительных упоминаний под устойчивостью подразумевается условная асимптотическая устойчивость, т.е. устойчивость на многообразии  $\|\Lambda\| = 1$ .

### Решение задачи

Найдем алгоритмы управления, реализующие достижение произвольной установившейся ориентации КА  $\Lambda_S$  относительно ИСК при его произвольном начальном состоянии  $\|\Lambda(t_0)\|=1$ ,  $\omega(t_0) \in R^3$ . Предварительно напомним, что одной и той же ориентации КА соответствуют кватернионы  $\pm\Lambda_S$ , так как  $S(\Lambda_S) = S(-\Lambda_S)$ .

Введем в фазовом пространстве системы уравнений (1), (2) при  $\omega_* = 0$  множество

$$\Omega_1 = \{\Lambda, \omega : \Lambda = \Lambda_S, \Lambda = -\Lambda_S, \|\Lambda_S\|=1, \omega = \omega_S = 0\}, \quad (8)$$

соответствующее установившейся произвольно заданной ориентации КА относительно ИСК и выберем функцию Ляпунова (ФЛ) в виде

$$V_1(\Lambda, \omega) = \alpha[ (\|\Lambda_S^T P_S \Lambda - 1\|)^2 + \Lambda^T (I - P_S) \Lambda ] + 0,5\omega^T J \omega, \quad (9)$$

где  $\alpha > 0$  и  $P_S = \Lambda_S (\Lambda_S^T \Lambda_S)^{-1} \Lambda_S^T = \Lambda_S \Lambda_S^T$  — оператор ортогонального проектирования векторов  $\Lambda$  на подпространство (прямую), порожденное вектором  $\Lambda_S$  [27, 28]. Эта функция положительно определена относительно множества  $\Omega_1$ :  $V_1(\Lambda, \omega) = 0$  при  $\Lambda, \omega \in \Omega_1$  и  $V_1(\Lambda, \omega) > 0$  при  $\Lambda, \omega \notin \Omega_1$ . Нетрудно убедиться, что выражение в квадратных скобках в (9) представляет собой квадрат наименьшего расстояния от произвольной точки  $\Lambda$  до точек  $\pm\Lambda_S$ . Сама же функция  $V_1(\Lambda, \omega)$  при  $\alpha = 1$  и  $J = 2I$  является квадратом расстояния от произвольной точки  $\Lambda, \omega$  фазового пространства системы (1), (2) до множества  $\Omega_1$ . Отметим также, что ФЛ (9) — негладкая функция по переменной  $\Lambda$ . Негладкие ФЛ использовались в [29] для исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений. Там же приведено обобщение понятия производных для таких функций. В частности, для обобщенной производной от  $|x(t)|$  приводится формула

$$\frac{d|x(t)|}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \text{sign } x, \quad (10)$$

в которой условимся считать, что  $\text{sign } x = 1$  при  $x \geq 0$  и  $\text{sign } x = -1$  при  $x < 0$ .

Негладкая ФЛ, содержащая  $|\lambda_0|$ , использовалась для синтеза алгоритма управления ориентацией КА относительно ИСК в [9], являющегося частным случаем  $\Lambda_S = (\pm 1, 0, 0, 0)$  рассматриваемой здесь общей постановки задачи

$\Lambda_S^T \Lambda_S = 1$ . Краткая библиография работ, в которых используются негладкие ФЛ, содержится в [30].

Производная по [29] от ФЛ (9), вычисленная согласно уравнениям (1), (2) с использованием формулы (10), имеет вид

$$\dot{V}_1(\Lambda, \omega) = \omega^T [-\alpha B^T(\Lambda) \Lambda_S \text{sign}(\Lambda_S^T \Lambda) + M_C + M_g - \check{\omega} J \omega]. \quad (11)$$

Выберем момент управления

$$M_C = \alpha B^T(\Lambda) \Lambda_S \text{sign}(\Lambda_S^T \Lambda) - M_g + \rho \check{\omega} J \omega - K \omega, \quad (12)$$

где  $\rho$  — коэффициент компенсации гироскопического момента  $\check{\omega} J \omega$ ,  $\rho \in [0, 1]$ ;

$K$  — симметричная положительно-определенная матрица  $K = K^T \succ 0$ . При этом

$\dot{V}_1(\Lambda, \omega) = -\omega^T K \omega$  — отрицательная знакопостоянная функция переменных  $\Lambda, \omega$ , причем множество  $N = \{\omega, \Lambda : \omega = 0, \Lambda \neq \pm \Lambda_S\}$ , на котором  $\dot{V}_1(\Lambda, \omega) = 0$  не содержит целых траекторий системы уравнений (1), (2), так как при этом  $J\omega = \alpha B^T(\Lambda) \Lambda_S \text{sign} \Lambda_S^T \Lambda \neq 0$ . Поэтому из дополнения Барбашина–Красовского к теореме об асимптотической устойчивости [26] следует, что множество  $\Omega_1$  устойчиво асимптотически устойчиво.

Заметим, что в алгоритме управления вместо постоянной матрицы  $K$  может использоваться симметричная матрица  $K(\Lambda, \omega)$ , удовлетворяющая условию  $\omega^T [K(\Lambda, \omega) - K] \omega \geq 0 \forall \Lambda, \omega$ .

Сопоставим свойства полученного алгоритма управления ориентацией (12) и свойства алгоритма из [11], основанного на непосредственном использовании прямого метода Ляпунова исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений. Для полноты и наглядности сопоставления кратко воспроизведем соответствующий фрагмент из [11], где рассматривалась задача синтеза алгоритма управления ориентацией КА относительно ИСК при заданной ориентации  $\Lambda_S = (1, 0, 0, 0)$  (в используемых тут обозначениях). В [11] выбиралась ФЛ вида

$$V_0(\Lambda, \omega) = \alpha(\Lambda - \Lambda_S)^T (\Lambda - \Lambda_S) + 0,5\omega^T J\omega, \quad \Lambda_S = (1, 0, 0, 0). \quad (13)$$

В отличие от ФЛ  $V_1(\Lambda, \omega)$ , положительно-определенной относительно множества  $\Omega_1$  из (8), ФЛ  $V_0(\Lambda, \omega)$  положительно определена относительно решения  $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S, \omega(t) \equiv 0$  системы уравнений (1), (2), т.е. «одноточечного» множества  $\Lambda = \Lambda_S, \omega = 0$  ее фазового пространства. Прделав выкладки, аналогичные для ФЛ  $V_1(\Lambda, \omega)$ , получим для рассматриваемого в [11] значения  $\Lambda_S = (1, 0, 0, 0)$  управление

$$M_C = -\alpha\lambda - M_g + \rho\tilde{\omega}J\omega - K\omega. \quad (14)$$

Полученные результаты сформулируем в следующем утверждении.

**Утверждение 1.** При произвольных начальных условиях  $\Lambda_0 = \Lambda(t_0), \omega_0 = \omega(t_0), \|\Lambda_0\| = 1$ , и произвольных  $\Lambda_S, \|\Lambda_S\| = 1$ , управление  $M_C$  в виде (12) обеспечивает получение заданных свойств устойчивости решений уравнений (1), (2)  $\|S(\Lambda(t)) - S(\Lambda_S)\| \rightarrow 0, \|\omega(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е. достижение и стабилизацию произвольной заданной ориентации  $S(\Lambda_S)$  КА относительно ИСК.

Для решения задачи синтеза управления ориентацией КА относительно ОСК проведем по аналогии с [5, 31] ее декомпозицию на кинематическую и динамическую задачи. При этом в кинематической задаче угловая скорость  $\omega$  в уравнении (1) рассматривается как управление.

Введем в рассмотрение множество

$$\Omega_2 = \{\Lambda : \Lambda = \Lambda_S, \Lambda = -\Lambda_S, \|\Lambda_S\| = 1\} \quad (15)$$

и выберем «кинематическую» ФЛ

$$V_C(\Lambda) = \Lambda^T (I - P_S) \Lambda. \quad (16)$$

Функция  $V_C(\Lambda) = 0$  при  $\Lambda = \pm \Lambda_S, V_C(\Lambda) > 0$  при  $\Lambda \neq \pm \Lambda_S$ , т.е. является положительно-определенной относительно множества  $\Omega_2$ . Производная ФЛ (16) в силу уравнения (1)

$$\dot{V}_C = (\omega - S(\Lambda)\omega_*)^T B^T(\Lambda)(\Lambda - P_S\Lambda) = -(\omega - S(\Lambda)\omega_*)^T B^T(\Lambda)P_S\Lambda. \quad (17)$$

Полагая в (17) «управление»  $\omega_C$  в виде

$$\omega_C = S(\Lambda)\omega_* + B^T(\Lambda)P_S\Lambda, \quad (18)$$

получим

$$\dot{V}_C(\Lambda) = -\Lambda^T P_S B(\Lambda) B^T(\Lambda) P_S \Lambda = -\Lambda^T P_S (I_4 - P_\Lambda) P_S \Lambda, \quad (19)$$

где  $P_\Lambda = \Lambda(\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T = \Lambda \Lambda^T$  — оператор проектирования на подпространство, образованное вектором  $\Lambda$ , а  $(I_4 - P_\Lambda)$  — оператор проектирования на подпространство, ортогональное вектору  $\Lambda$  [27, 28]. Нетрудно убедиться, что производная ФЛ  $\dot{V}_C(\Lambda) = 0$  при  $\Lambda = \pm \Lambda_S$  и  $\dot{V}_C(\Lambda) < 0 \forall \Lambda \neq \pm \Lambda_S$ , т.е. является функцией, отрицательно определенной относительно множества  $\Omega_2$ . Поэтому ФЛ  $V_C(\Lambda)$  монотонно убывает  $\forall \Lambda \notin \Omega_2$ ,  $\|\Lambda\| = 1$  и множество  $\Omega_2$  системы (1) при «управлении» (18) условно асимптотически устойчиво [25, 32].

Соотношением (18) в фазовом пространстве  $\Lambda, \omega$  системы (1), (2) определяется многомерная поверхность [33]  $\omega = \omega_C(\Lambda)$ , двигаясь по которой изображающая точка в асимптотике придет к требуемому положению  $\omega_S = S(\Lambda_S)\omega_*$ ,  $\Lambda = \Lambda_S$  или  $\Lambda = -\Lambda_S$ , т.е. к требуемой ориентации, однозначно определяемой матрицей  $S(\Lambda_S)$ .

Найдем теперь управляющий момент  $M_C$ , при котором может реализоваться «управление» (18), для этого выберем «динамическую» ФЛ

$$V_d(\omega, \Lambda) = 0,5(\omega - \omega_C)^T J(\omega - \omega_C), \quad (20)$$

где  $\omega_C$  определяется формулой (18). Дифференцируя ФЛ в силу системы (1), (2), находим

$$\dot{V}_d(\omega, \Lambda) = (\omega - \omega_C)^T (M_C + M_G - \check{\omega}J\omega - J\dot{\omega}_C). \quad (21)$$

Полагая в (21) управляющий момент

$$M_C = -M_G + \check{\omega}J\omega + J\dot{\omega}_C - \tau^{-1}J(\omega - \omega_C), \quad (22)$$

получим

$$\dot{V}_d = -\tau^{-1}(\omega - \omega_C)^T J(\omega - \omega_C) = -\tau^{-1}V_d, \quad (23)$$

$$\tau \dot{V}_d + V_d = 0. \quad (24)$$

Из (24) с учетом (23) непосредственно следует, что  $\|\omega - \omega_C\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а следовательно, убывает и ФЛ (16).

Этот же результат можно получить и иначе. Подставив значение  $M_C$  из (22) в уравнение (2), получим  $\tau\dot{\sigma} + \sigma = 0$ ,  $\sigma = \omega - \omega_C$ , из которого также следует, что  $\|\omega - \omega_C\| \rightarrow 0$ . Заметим, что пренебрегая в алгоритме (22) слагаемым  $J\dot{\omega}_C$ , отсюда непосредственно получим  $\tau\dot{\omega} + \omega = \omega_C$ . Это уравнение с точностью до принятых здесь предположений и обозначений совпадает с уравнением (5) из работы [34], в которой исследуются алгоритмы управления ориентаций орбитального комплекса «Мир».

Для завершения решения задачи нужно найти значение производной  $\dot{\omega}_C$ , входящей в (22). Формула (18) может быть представлена в виде

$$\omega_C = S(\Lambda)\omega_* + B^T(\Lambda)\Lambda_S\Lambda_S^T\Lambda. \quad (25)$$

Из (25) последовательно получаем

$$\dot{\omega}_C = [-\dot{\omega}S(\Lambda) + S(\Lambda)\dot{\omega}_*]\omega_* - B^T(\Lambda_S)[\dot{\Lambda}\Lambda_S^T\Lambda + \Lambda\Lambda_S^T\dot{\Lambda}], \quad \dot{\omega}_C = f(\omega, \Lambda), \quad (26)$$

где  $f(\omega, \Lambda) = -\dot{\omega}S(\Lambda)\omega_* - 0,5 B^T(\Lambda_S)[B(\Lambda)\tilde{\omega}\Lambda_S^T\Lambda + \Lambda\Lambda_S^TB(\Lambda)\tilde{\omega}]$ ,  $\tilde{\omega} = \omega - S(\Lambda)\omega_*$ .

При получении формулы (26) использовалось непосредственно проверяемое равенство  $B^T(\Lambda)\Lambda_S = -B^T(\Lambda_S)\Lambda$  и известное обобщенное уравнение Пуассона для производной матрицы направляющих косинусов  $\dot{S}(\Lambda) = -\dot{\omega}S(\Lambda) + S(\Lambda)\dot{\omega}_*$  [35].

В результате получаем следующий результат.

**Утверждение 2.** При произвольных начальных условиях  $\Lambda_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\|\Lambda_0\| = 1$  и  $\Lambda_S$ ,  $\|\Lambda_S\| = 1$  управление  $M_C$  в виде (22) с учетом (18), (26) обеспечивает достижение и стабилизацию заданной ориентации КА относительно ОСК, однозначно определяемой матрицей  $S(\Lambda_S)$ .

Очевидно, что при  $\omega_* = 0$  в уравнениях (1), (2) управление (22) обеспечивает достижение и стабилизацию заданной ориентации КА относительно ИСК.

Техническая реализация предложенных алгоритмов формирования управляющих моментов  $M_C$  может быть осуществлена с помощью произвольных гиросиловых систем с непосредственным использованием способов, предложенных, например, в [36].

### Вычислительные эксперименты

Эффективность полученных алгоритмов управления иллюстрируется результатами компьютерного моделирования процессов ориентации. Матрица инерции полагалась равной  $J = \text{diag}\{40, 20, 40\}$ . Интегрирование уравнений (1), (2) выполнялось методом Рунге–Кутты с шагом  $\Delta t = 0,05$  с.

Был выполнен эксперимент по сопоставлению предложенного алгоритма (12) с алгоритмом (14) из работы [11] при параметрах алгоритмов  $\alpha = 5$ ,  $K = \text{diag}\{30, 30, 30\}$ ,  $\rho = 1$  и начальных условиях при  $t_0 = 0$   $\omega^T(t_0) = (0, 0, 0)$ ,  $\Lambda^T(t_0) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ . Начальное условие  $\Lambda^T(t_0)$  соответствует совпадению осей  $Oz$  и  $Oz_0$  ССК и ИСК и отклонению оси  $Ox$  от  $Ox_0$  на угол  $\vartheta(t_0) = 300^\circ$ ,  $(\lambda_0(t_0) = \cos \frac{\vartheta(t_0)}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\lambda_3(t_0) = \sin \frac{\vartheta(t_0)}{2} = \frac{1}{2})$ . Рассматривался случай совмещения осей ССК с осями ИСК. При этом установившаяся ориентация КА для алгоритма (14) определялась вектором  $\Lambda_S^T = (1, 0, 0, 0)$ , а для алгоритма (12) — матрицей  $S(\Lambda_S) = I_3$ . На рис. 1 и рис. 2 показаны переходные процессы установления ориентации по углам  $\vartheta(t)$  и угловым скоростям  $\omega(t)$ . При этом текущие значения  $\vartheta(t)$  определялись по полученным значениям  $\lambda_0(t) = \cos 0,5 \vartheta(t)$ ,  $\lambda_3(t) = \sin 0,5 \vartheta(t)$  с использованием обратных тригонометрических функций.



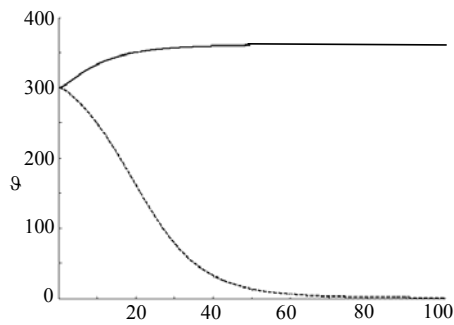


Рис. 1

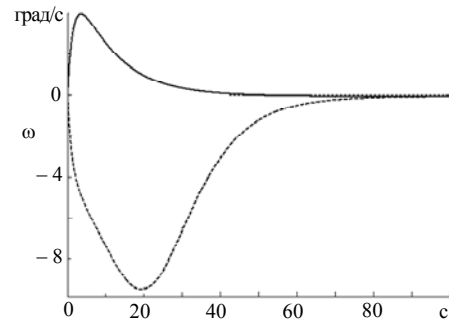


Рис. 2

Алгоритму (12) соответствуют сплошные линии, алгоритму (14) — пунктирные. Из рисунков видно, что предложенный алгоритм (12) реализует установление заданной ориентации, т.е. совмещение ССК с ИСК по кратчайшему пути — поворот от  $300^\circ$  на  $60^\circ$  до  $\vartheta = 360^\circ$ ,  $\Lambda^T = (-1, 0, 0, 0)$ . Алгоритм (14) выполняет поворот на  $300^\circ$  до  $\vartheta = 0$ ,  $\Lambda^T = (1, 0, 0, 0)$ . Напомним, что одной и той же ориентации соответствуют кватернионы  $\Lambda$  и  $-\Lambda$ .

Выполнен дополнительный вычислительный эксперимент для иллюстрации работоспособности алгоритма (12). Требуемая ориентация  $\Lambda_S$  задавалась следующими значениями углов Крылова–Эйлера:  $\vartheta_S = 90^\circ$ ,  $\gamma_S = 60^\circ$ ,  $\psi_S = 120^\circ$ , где  $\vartheta, \gamma, \psi$  — углы тангажа, крена и рыскания. Пересчет в соответствующие значения компонентов кватерниона  $\Lambda_S^T = (\lambda_{0S}, \lambda_{1S}^T)$ ,  $\lambda_{1S}^T = (\lambda_{1S}, \lambda_{2S}, \lambda_{3S})$  выполнялся по формулам

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \lambda_3 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

полученным по аналогии с [5, 7] для последовательности поворотов при переходе от ОСК к ССК  $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  ( $\vartheta \rightarrow \gamma \rightarrow \psi$ ). При этом  $\Lambda_S^T = \frac{1}{4}(0, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{6})$ ,  $\|\Lambda_S\| = 1$ . Начальные значения для системы (1), (2) при  $t_0 = 0$  полагались равными  $\omega(t_0) = 0$ ,  $\Lambda^T(t_0) = (1, 0, 0, 0)$ .

На рис. 3 показаны переходные процессы установления ориентации по компонентам кватерниона  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{0,3}$ , при параметрах  $\alpha = 3$ ,  $K = \text{diag}\{30, 30, 30\}$ ,  $\rho = 1$  алгоритма (12). Соответствующие переходные процессы по угловым скоростям  $\omega_j(t) \rightarrow 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , показаны на рис. 4.

Выполнен вычислительный эксперимент по проверке эффективности алгоритма (22), (26) управления ориентацией относительно ОСК при  $\tau = 40$  с и радиусе орбиты  $R = 7070$  км. Рассматривался вариант  $S(\Lambda_S) = I_3$ , т.е. совмещение в установившемся режиме ССК с ОСК. Начальные условия полагались следующими:  $\omega^T(t_0) = (0, 0, 0)$ ,  $\vartheta(t_0) = 90^\circ$ ,  $\gamma(t_0) = -90^\circ$ ,  $\psi(t_0) = 120^\circ$ , где  $\vartheta, \gamma, \psi$  — углы тангажа, крена и рыскания. Пересчет начальных условий, заданных в углах Эйлера–Крылова, в начальные условия в компонентах кватерниона выполнялся по формулам (27).

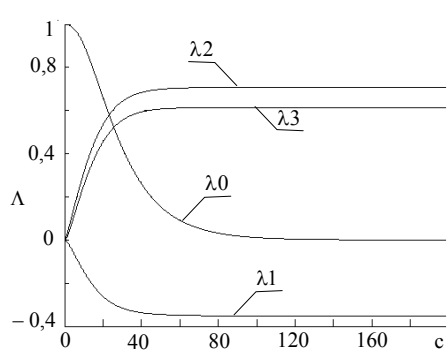


Рис. 3

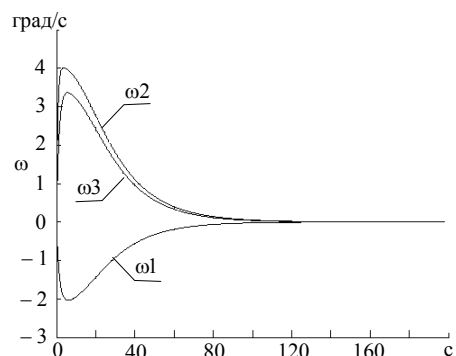


Рис. 4

Переходные процессы установления ориентации  $\lambda_j(t)$ ,  $j = \overline{0,3}$ , и  $\omega_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , показаны на рис. 5 и рис. 6.

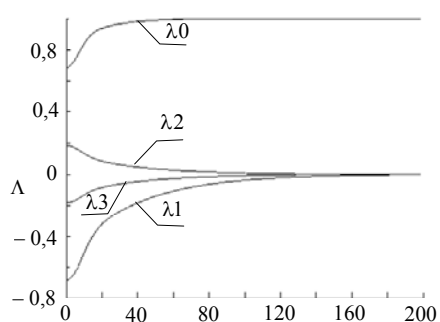


Рис. 5

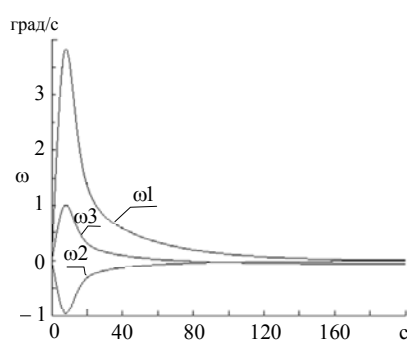


Рис. 6

Рисунки иллюстрируют процесс устойчивого совмещения ССК с ОСК:  $\lambda_0(t) \rightarrow 1$ ,  $\lambda_j(t) \rightarrow 0$ ,  $j = \overline{1,3}$ ;  $\omega_1(t) \rightarrow 0$ ,  $\omega_2(t) \rightarrow 0$ ,  $\omega_3(t) \rightarrow \omega_{*3} = -\sqrt{\mu/R^3} \approx -0,061/\text{с}$ .

Выполненные вычислительные эксперименты иллюстрируют эффективность использования предложенных алгоритмов управления для получения и стабилизации требуемой ориентации КА относительно инерциальной и орбитальной систем координат.

При компьютерном моделировании динамики системы управления с использованием предложенных алгоритмов процессы ориентации характеризуются текущими значениями компонентов кватернионов. При необходимости получения соответствующих углов Эйлера–Крылова можно воспользоваться, например, алгоритмами [6, 37, 38].

### Заключение

С использованием единого методологического подхода, основанного на известных обобщениях прямого метода Ляпунова на исследование устойчивости инвариантных множеств динамических систем, получены следующие результаты.

Обобщены алгоритмы управления ориентацией КА относительно ИСК, обеспечивающие совмещение ССК с ИСК, на достижение и стабилизацию произвольно заданной ориентации ССК.

Получены новые алгоритмы управления, обеспечивающие достижение и стабилизацию произвольно заданной ориентации ССК относительно ОСК.

Компьютерное моделирование проиллюстрировало эффективность полученных алгоритмов управления ориентацией.

*В.В. Волосов, В.М. Шевченко*

## СИНТЕЗ АЛГОРИТМІВ КЕРУВАННЯ ОРІЄНТАЦІЄЮ КОСМІЧНОГО АПАРАТА НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНЬ ПРЯМОГО МЕТОДУ ЛЯПУНОВА

Відомі узагальнення прямого методу Ляпунова на дослідження стійкості інваріантних множин динамічних систем застосовано до розв'язку задачі синтезу керування орієнтацією космічних апаратів (КА). Отримано узагальнення існуючих алгоритмів керування орієнтацією й стабілізації КА відносно інерціальної системи координат (СК). Запропоновано нові алгоритми керування орієнтацією й стабілізації КА щодо обертової (орбітальної) СК. Окремим випадком цих алгоритмів є відповідні алгоритми для інерціальної СК. Ефективність алгоритмів проілюстровано комп'ютерним моделюванням динаміки систем керування орієнтацією КА.

*V.V. Volosov, V.N. Shevchenko*

## SYNTHESIS OF ALGORITHMS FOR SPACECRAFT ATTITUDE CONTROL BASED ON GENERALIZATIONS OF THE DIRECT LYAPUNOV METHOD

Well-known generalizations of the direct Lyapunov method to investigation of the stability of invariant sets of dynamic systems are applied to the problem of synthesis of spacecraft attitude control. Generalizations of the existing algorithms of spacecraft attitude control and stabilization with respect to an inertial coordinate system are obtained. New algorithms of spacecraft attitude control and stabilization with respect to a rotating (orbital) coordinate system are proposed. Particular cases of these algorithms are the corresponding algorithms for an inertial coordinate system. The efficiency of the algorithms is illustrated by computer modelling of the dynamics of spacecraft attitude control systems.

1. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974. — 600 с.
2. Бернгардт Э.Г. Интервью Раушенбаха. — <http://www.skizzenzumschicksal.narod.ru/>
3. Ишинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. — М.: Наука, 1976. — 672 с.
4. Егоров С.Н., Дюмин А.Ф., Суринский Д.М. Исследование задачи орбитального гироскопирования методами теории линейных систем наблюдения // Космические исследования. — 1989. — 27, вып. 4. — С. 502–508.
5. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973. — 320 с.
6. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. — (Препр. / ИПМ им. М.В. Келдыша). — М., 2013. — № 39. — 23 с.
7. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. — М.: Наука, 1992. — 280 с.
8. Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. — М.: Физматлит, 2011. — 560 с.
9. Лебедев Д.В. Керування орієнтацією твердого тіла з використанням параметрів Родрига–Гамільтона // Автоматика. — 1974. — № 4. — С. 29–32.
10. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И., Штена Ю.П. Магнитная система управления угловым движением микроспутника // Космична наука і технологія. — 1996. — 2, № 5–6. — С. 17–25.
11. Ви Б., Уэйс Х., Эрнстасис Э. Управление поворотом космического аппарата вокруг собственной оси с обратной связью по компонентам кватерниона // Аэрокосмическая техника. — 1990. — № 3. — С. 3–11.

12. *Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т.* Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 5–15.
13. *Онищенко С.М.* Оптимальная стабилизация искусственного спутника Земли избыточной системой маховиков // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 6. — С. 133–143.
14. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М. : Наука, 1967. — 472 с.
15. *Рябова А.В., Тertyчный-Даури В.Ю.* Элементы теории устойчивости. — С.-Пб : Изд-во ИТМО, 2015. — 208 с.
16. *Крыжевич С.Г.* Обобщение теоремы Ляпунова об условной устойчивости на случай неаналитичности // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 1998. — № 3. — С. 43–55.
17. *Волосов В.В., Тютюнник Л.И.* Синтез законов управления ориентацией космического аппарата с использованием кватернионов // Космічна наука та технологія. — 1999. — 5, № 4. — С. 61–69.
18. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике* : Изд. 2-е / В.К. Абалякин, Е.П. Аксенов, Е.А. Гребенников и др. — М. : Наука, 1971. — 584 с.
19. *Волосов В.В., Куценко И.А., Селиванов Ю.А.* Разработка и исследование робастных алгоритмов эллипсоидального оценивания инерционных характеристик космического аппарата, управляемого силовыми гироскопами // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 4. — С.124–139.
20. *Волосов В.В., Хлебников М.В., Шевченко В.Н.* Алгоритм прецизионного управления ориентацией космического аппарата при действии неконтролируемого возмущения // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 2. — С. 114–121.
21. *Бужгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч.2. — М.: Наука, 1969. — 332 с.
22. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1990. — 292 с.
23. *Бутенин Н.В., Лунц Ю.Я., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Т.2. — М. : Наука, 1979. — 544 с.
24. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М. : Изд. МГУ им. М.В.Ломоносова, 1975. — 308 с.
25. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. — М. : Высшая школа, 1973. — 272 с.
26. *Красовский Н.Н., Малкин И.Г.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова // Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — С. 463–467.
27. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
28. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
29. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М. : Наука, 1985. — 224 с.
30. *Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б.* Негладкий анализ и синтез систем регулирования на основе прямого метода Ляпунова // Приборостроение. — 1994. — 37, № 7–8. — С. 5–15.
31. *Волосов В.В.* Об управлении ориентацией космического аппарата в орбитальной системе координат с использованием эллипсоидальных оценок его вектора состояния // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 5. — С. 31–41.
32. *Ла-Салль Ж., Левшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
33. *Ефимов Н.В., Розендорн Е.А.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М. : Наука, 1970. — 528 с.
34. *Математическое моделирование эйлеровых разворотов орбитального комплекса «Мир» гиродинами* / В.А. Сарычев, М.Ю. Беляев, С.Г. Зайков, В.В. Сазонов, Б.П. Тесленко // Космические исследования. — 1991. — 29, вып. 4. — С. 532–543.
35. *Кузовков Н.Т. Салычев О.С.* Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. — М. : Машиностроение, 1982. — 216 с.
36. *Волосов В.В., Куценко И.А., Попадинец В.И.* Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гиродинами и маховиков и задачи управления их ориентацией. Ч. I, II // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 101–116; № 3. — С. 109–116.
37. *Филиппов Ю.И.* Эффективный алгоритм преобразования кватерниона в систему углов Эйлера-Крылова // Полет. — 2009. — № 6. — С. 32–35.
38. *Гордеев В.Н.* Кватернионы и трехмерная геометрия. — Киев : Сталь, 2012. — 316 с.

Получено 06.06.2017