УДК 629.783

М.Ю. Ракушев

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПО СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Введение. Прогнозирование движения космических аппаратов (КА) является основой решения практически всех баллистических задач, связанных с орбитальным полетом КА. К таким задачам относятся планирование целевого применения КА; расчет сеансов связи, навигации наземных (воздушных, морских) объектов; определение параметров движения КА по траекторным измерениям; оценивание общей космической обстановки; выявление опасных сближений КА и т.п. [1, 2]. Прогнозирование движения КА проводится на базе специализированной процедуры на ЭВМ, которая реализует интегрирование дифференциального уравнения движения КА. Основные требования, выдвигаемые к процедурам прогнозирования движения КА [1], — высокая точность, абсолютная достоверность, оперативность; максимальная отработка используемых методов и возможность автоматизации решения вторичных по отношению к прогнозированию движения КА задач; соответствие методов, алгоритмов и программ техническим характеристикам ЭВМ. Следует добавить требования по стоимости разработки таких процедур, их унификации, а также гибкости при их усовершенствовании или изменении [3]. При разработке процедур прогнозирования движения КА для наземных ЭВМ, как правило, исходят из условия минимизации машинного времени на их работу (ограничение на вычислительную сложность) при обеспечении заданной точности прогнозирования. К процедурам для бортовых ЭВМ выдвигаются еще и требования по уменьшению максимального объема задействованной памяти (оперативной и постоянной).

Анализ последних исследований. Прогнозирование движения КА при воздействии случайных факторов и возмущений требует использования стохастической модели движения КА. Наиболее общая форма такой модели — стохастическое дифференциальное уравнение, имеющее в своей структуре случайные функции и величины, описывающие соответственно случайные факторы и начальные условия [4]. Решением такого уравнения является нахождение вероятностных характеристик описываемого случайного процесса [5]. Формально стохастическая модель движения КА отличается от детерминированной модели только описанием входящих в нее переменных и функций. Однако с математической точки зрения обыкновенное стохастическое дифференциальное уравнение — уже другой математический объект, для решения которого необходимо использовать специализированные методы [4]. Вместе с тем такие методы применяются в комплексе с методами для решения детерминированных моделей движения КА.

Общее свойство описанных моделей движения КА заключается в том, что они являются векторными нелинейными дифференциальными уравнениями. Все методы, используемые для интегрирования таких уравнений, можно разделить на численные, аналитические и численно-аналитические (комбинированные). Выбор конкретного метода зависит от выдвигаемых требований к прогнозу, таких как необходимая точность, оперативность, величина временного интервала его проведения (краткосрочный или долгосрочный прогноз), а также от параметров орбиты КА [1]. На сегодня наивысшую точность при решении баллистических задач полетов КА обеспечивают численные (в основном, конечно-разностные) методы интегрирования. Однако их основным недостатком является повышенная вычислительная сложность, что в полном объеме сказывается на характеристиках программных процедур прогнозирования [1].

Если рассмотреть последние исследования по внедрению новых методов интегрирования в практику решения баллистических задач полетов КА, то можно отметить, что одними из перспективных являются методы на основе дифференциально-тейлоровских (ДТ) преобразований. Так, в [6] предложен метод интегрирования стохастического дифференциального уравнения на основе ДТ-преобразований. Однако этот метод рассматривает стохастическое уравнение в форме уравнения Ланжевена, что не позволяет применять его для всех видов моделей движения КА (например, для моделей в системе оскулирующих элементов орбиты). Еще одним недостатком рассматриваемого метода является отсутствие рекомендаций по реализации в нем адаптации по шагу и порядку [7], что значительно снижает вычислительную эффективность прогнозирования.

Формулирование цели статьи. Проведенный анализ показывает, что известный метод интегрирования стохастического дифференциального уравнения на основе ДТ-преобразований для решения задачи прогнозирования движения КА по стохастической модели не обладает универсальностью (в отношении принятой системы координат) и высокой вычислительной эффективностью (невозможность адаптации по шагу и порядку). Таким образом, цель статьи — разработка подхода к решению задачи прогнозирования движения КА по стохастической динамической модели движения на основе ДТ-преобразований.

Изложение основного материала. Порядок получения детерминированных моделей движения КА детально описан в специализированной литературе по баллистике КА и сводится к выбору системы координат и учету основных сил, влияющих на движение КА [1, 8]. Стохастические модели движения КА получаются из соответствующих детерминированных путем учета вероятностных характеристик параметров и функций, которые в исходной модели являются детерминированными. Описанная операция проводится формальным учетом в детерминированной модели вероятностных характеристик ее параметров и функций [4, 8]. Наиболее характерным примером такой операции является учет вероятностных характеристик: параметров — начальных условий движения КА, и функции — вариаций плотности атмосферы (для прогнозирования движения КА ближнего космоса необходим учет аэродинамического сопротивления атмосферы, которое исходя из объективной стохастичности процессов, влияющих на плотность атмосферы Земли (активности Солнца), имеет явно выраженный стохастический характер [4]).

В общем виде задача прогнозирования движения КА по стохастической модели сводится к расчету статистических характеристик случайного процесса, описываемого системой обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений [4, 8]:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \xi),\ t > t_0,\ x(t_0) \in \{M_{x0}, K_{x0}\},\ \xi \in \{M_\xi(t, x), N_\xi(t, x)\delta_D(t-\tau)\}, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — векторный случайный процесс с искомыми статистическими характеристиками (траектория полета КА) размером n; t, t_0 — независимые переменные и их начальные значения; $x(t_0)$ — начальные условия с заданными характеристиками моментов (вектором математического ожидания M_{x0} и корреляционной матрицей K_{x0}); $f(t, x, \xi)$ — вектор-функция размером n; $\xi = \xi(t)$ —

непрерывный нормальный векторный нестационарный случайный процесс (шум) с заданными характеристиками (математическим ожиданием $M_\xi(t, x)$ и корреляционной функцией $N_\xi(t, x)\delta_D(t-\tau)$; $M_\xi(t, x)$ — вектор математического ожидания шума размером m; $N_\xi(t, x)$ — матрица интенсивности шума размером $m \times m$; $\delta_D(t-\tau)$ — дельта-функция Дирака, в которой t и τ — рассматриваемые моменты времени.

Стохастические модели вида (1), как правило, имеют правые части, являющиеся гладкими нелинейностями, допускающими получение производных до второго порядка включительно [4]. Для таких моделей можно провести линеаризацию правых частей дифференциальных уравнений в окрестности математического ожидания параметров движения и математических ожиданий случайных возмущений (реализовать метод линеаризации относительно среднего движения) [4, 5]. Далее для полученной линеаризованной системы применяется метод корреляционных преобразований [4, 5]. В большинстве практических задач такой подход обеспечивает удовлетворительную точность при допустимой вычислительной сложности расчетов.

Таким образом, прогнозирование движения КА по стохастической модели движения сводится к расчету статистических характеристик динамической модели (1), который методом линеаризации относительно среднего движения и корреляционных преобразований имеет вид [4, 5, 8]:

$$\frac{dM_x}{dt} = f(t, M_x, M_\xi), \ t > t_0, \ M_x(t_0) = M_{x0}, \tag{2}$$

$$\frac{dK_x}{dt} = g(t, M_x, M_\xi) K_x + K_x g^{\mathrm{T}}(t, M_x, M_\xi) + \\ + q(t, M_x, M_\xi) N_\xi(t, M_x) q^{\mathrm{T}}(t, M_x, M_\xi), \tag{3}$$

$$K_x(t_0) = K_{x_0}, \ g(t, M_x, M_\xi) = \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial x}, \ q(t, M_x, M_\xi) = \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial \xi},$$

где $M_x = M_x(t)$ — искомая вектор-функция (математическое ожидание траектории движения КА) размером n; M_{x0} — вектор начальных условий (для математического ожидания) движения КА; $f(t, M_x, M_\xi)$ — вектор-функция размером n (правая часть уравнения (1) при $x = M_x$ и $\xi = M_\xi$); $K_x = K_x(t)$ — искомая матричная функция (корреляционная матрица ошибок прогнозирования траектории движения КА) размером $n \times n$; K_{x0} — матрица начальных условий (для корреляционной матрицы) движения КА; $M_\xi(t)$ — вектор-функция математического ожидания шума размером m; $N_\xi(t, M_x)$ — матричная функция интенсивности шума размером $m \times m$; $g(t, M_x, M_\xi)$ — матричная функция, получаемая дифференцированием правой части (1) по вектору x, размером $n \times n$; $q(t, M_x, M_\xi)$ — матричная функция, получаемая дифференцированием правой части (1) по вектору ξ, размером $n \times m$; Т — оператор транспонирования матрицы.

Реализация метода (2)–(3) сводится к совместному решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для ее решения используются численные методы интегрирования таких уравнений.

 ISSN 0572-2691

Основной трудностью решения (1) на основе (2)–(3) при сложной правой части $f(t, x, \xi)$ является методическая сложность получения в аналитическом виде матриц частных производных (вариационных членов) — $g(t, x, \xi)$ и $q(t, x, \xi)$ при $x = M_x$ и $\xi = M_\xi$. В [6] предложен метод расчета статистических характеристик модели (1) проведением интегрирования (2)–(3) на основе двухмерных ДТ-преобразований, который лишен недостатка методической сложности реализации. Однако в нем рассматривается стохастическое уравнение в форме уравнения Ланжевена (в которой матрица $q(t, x)$ задана и не зависит от ξ) и реализуется получение только матрицы g, а на получение матрицы q метод не распространяется. Описанное объясняется тем, что g и q состоят из частных производных функции $f(t, x, \xi)$ по функциям $x(t)$ и $\xi(t)$ соответственно, а в [6] порядок получения g основан на предварительном получении матрицы частных производных функции $x(t)$ по параметрам x_0 (матрицы Якоби для (1) по начальным условиям задачи Коши). При этом для случайного процесса $\xi(t)$ такой матрицы Якоби не существует.

Двухмерными ДТ-преобразованиями называют функциональные преобразования [9]:

$$Z(k, k_w) = \frac{h^k h_w^{k_w}}{k! k_w!} \frac{\partial^{k+k_w} z(t_*, w_*)}{\partial t^k \partial w^{k_w}},$$
$$z(t, w) = \sum_{k_w=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k} \frac{(w-w_*)^{k_w}}{h_w^{k_w}} Z(k, k_w) \right), \quad (4)$$

где $z(t, w)$ — скалярная функция, имеющая производные необходимого порядка по t и w; t, w — скалярные аргументы; t_*, w_* — значения аргументов, при которых проводится преобразование; h, h_w — отрезки аргументов, на которых $z(t, w)$ представляется рядом Тейлора по t и w соответственно; k, k_w — целочисленные аргументы 0, 1,…; $Z(k, k_w)$ — дискретная функция по аргументам k, k_w.

В (4) первое выражение задает прямое ДТ-преобразование, а второе — обратное. Прямое преобразование позволяет по оригиналу $z(t, w)$ найти изображение $Z(k, k_w)$, обратное — восстанавливает оригинал $z(t, w)$ в виде отрезка двухмерного ряда Тейлора. ДТ-изображение $Z(k, k_w)$ называют Т-спектром, а значение функции $Z(k, k_w)$ — Т-дискретами [9].

Основным свойством ДТ-преобразований является реализация рекуррентного, методически простого (численно-аналитического) определения членов ряда Тейлора любого порядка при отсутствии методических ошибок. При этом для определения (расчета) Т-спектра сложной функции необходимо в соответствии с ее внутренней структурой определить (задать) Т-спектры всех ее аргументов, и мерность Т-спектров аргументов должна совпадать с необходимой мерностью определяемого Т-спектра сложной функции (вид Т-спектров аргументов определяет Т-спектр сложной функции) [8, 9].

Запишем метод линеаризации относительно среднего движения для (1) [4, 5]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \xi) \Rightarrow \frac{d}{dt}(M_x + \overset{\circ}{x}) = f(t, M_x + \overset{\circ}{x}, M_\xi + \overset{\circ}{\xi}) \Rightarrow \frac{dM_x}{dt} + \frac{d\overset{\circ}{x}}{dt} =$$

$$= f(t, M_x, M_\xi) + \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial x}\overset{\circ}{x} + \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial \xi}\overset{\circ}{\xi} + O(\|\overset{\circ}{x}\|^2) +$$

$$+ O(\|\overset{\circ}{\xi}\|^2) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dM_x}{dt} \approx f(t, M_x, M_\xi), \\ \dfrac{d}{dt}\overset{\circ}{x} \approx \dfrac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial x}\overset{\circ}{x} + \dfrac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial \xi}\overset{\circ}{\xi}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dM_x}{dt} = f(t, M_x, M_\xi), \\ \dfrac{d}{dt}\overset{\circ}{x} = g(t, M_x, M_\xi)\overset{\circ}{x} + q(t, M_x, M_\xi)\overset{\circ}{\xi}, \end{cases} \tag{5}$$

где M_x, M_ξ — математические ожидания случайных процессов; $\overset{\circ}{x}$, $\overset{\circ}{\xi}$ — центрированные случайные процессы; $O(\ldots)$ — величина соответствующего порядка малости.

Уравнение (2) и первое уравнение в (5), а также матрицы g, q в (3) и (5) совпадают. Применим ДТ-преобразование при $k = 0, 1, \ldots$ и $k_w = 0$ к первому дифференциальному уравнению в (5) при значении независимого переменного уравнения $t = t_i$. Такая операция является одномерным ДТ-преобразованием:

$$\begin{cases} M_x(0, 0) = M_x(t_i),\ M_\xi(k, 0) = M_\xi(T(k, 0), M_x(k, 0)), \\ T(k, 0) = t_i \delta_T(k, k_w) + h\delta_T(k-1, k_w), \\ F(k, 0) = F(T(k, 0), M_x(k, 0), M_\xi(k, 0)), \\ M_x(k+1, 0) = \dfrac{h}{k+1} F(k, 0):\ \{(k = \overline{0, \infty}) \wedge (k_w = 0)\}, \end{cases} \tag{6}$$

$$M_x(t_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t - t_i)^k}{h^k} M_x(k, 0),$$

где $M_x(k, k_w)$, $F(k, k_w)$, $T(k, k_w)$, $M_\xi(k, k_w)$ — Т-спектры $M_x(t)$ правой части $f(t, x, \xi)$ при $x = M_x$ и $\xi = M_\xi$, переменного t, математического ожидания шума $M_\xi(t, M_x)$ соответственно; h — отрезок аргумента t; $\delta_T(k, k_w)$ — двухмерная «теда» [9]

$$\delta_T(k - a, k_w - b) = \begin{cases} 1,\ \{(k = a) \wedge (k_w = b)\}, \\ 0,\ \{(k \neq a) \vee (k_w \neq b)\}. \end{cases} \tag{7}$$

Рассмотрим матрицу $g(t, M_x, M_\xi)$ в (5). При ее определении в соответствии с порядком получения частных производных сложной функции (функции многих переменных) x является переменным, а t и ξ — постоянными. Таким образом, выполняется

$$g(t, M_x, M_\xi) = \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(t, M_x, M_\xi) = \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial x} \text{ при } \frac{\partial x}{\partial x} = E_{n\times n},\ \frac{\partial t}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0_{m\times n}, \tag{8}$$

где $E_{n\times n}$, $0_{m\times n}$ — единичная и нулевая матрицы соответственно.

Для определения Т-спектра функции $f(t, x, \xi)$ расширим прямое ДТ-преобразование (6) при $k = 0, 1, \ldots$ и $k_w = 1$ по элементам вектора x. При этом Т-спектры функций x, ξ и переменного t зададим из (8). Описанная операция с учетом свойств ДТ-преобразований имеет вид:

$$\begin{cases} M_x(k, 1) = E_{n\times n}\delta_T(k, k_w - 1)h_x,\ M_\xi(k, 1) = 0_{m\times n},\ T(k, 1) = 0, \\ F(k, 1) = F(T(k, k_w),\ M_x(k, k_w),\ M_\xi(k, k_w)) : \{(k = \overline{0,\infty}) \wedge (k_w = 1)\}, \end{cases} \tag{9}$$

где h_x — отрезок аргумента (вариация функции) $M_x(t)$; $\delta_T(k, k_w)$ — «теда» (7).

В соответствии со свойствами ДТ-преобразований для рассчитанного в (6), (9) Т-спектра функции $f(t, x, \xi)$ выполняется [8, 9] (для соблюдения правил матричных операций деление показано поэлементно, при этом запись без индекса обозначает соответствующую матрицу или вектор, а наличие индексов $j_1 = \overline{1, n}$ (строка), $j_2 = \overline{1, n}$ (столбец) указывает на скалярную (поэлементную) запись):

$$g(t, M_x, M_\xi)_{j_1 j_2} = \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)_{j_1}}{\partial x_{j_2}} \Rightarrow G(k, k_w)_{j_1 j_2} = D_{k_w}\{F(k, k_w)_{j_1 j_2}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(k, k_w)_{j_1 j_2} = \frac{k_w + 1}{h_{x\,j_2}} F(k, k_w + 1)_{j_1 j_2} \Rightarrow G(k, 0)_{j_1 j_2} = \frac{1}{h_{x\,j_2}} F(k, 1)_{j_1 j_2} \tag{10}$$

$$\text{при } M_x(k, 1) = E_{n\times n}\delta_T(k, k_w - 1)\, h_x,\ \ M_\xi(k, 1) = 0_{m\times n},$$

где $G(k, k_w)$ — двухмерный Т-спектр матрицы $g(t, M_x, M_\xi)$; $D_{k_w}\{\}$ — операция дифференцирования в области Т-спектров [8, 9].

Из (10) видно, что введенный (для задания Т-спектра $M_x(k, 1)$) при прямом ДТ-преобразовании отрезок аргумента h_x при дифференцировании по k_w (для вычисления $G(k, 0)$) сокращается. Следовательно, можно задать

$$h_{x\,j_2} = 1,\ j_2 = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Рассмотрим матрицу $q(t, M_x, M_\xi)$ в (5). В соответствии с порядком получения частных производных сложной функции при ее определении ξ является переменным, а t и x — постоянными. Таким образом, выполняется

$$q(t, M_x, M_\xi) = \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(t, M_x, M_\xi) = \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)}{\partial \xi} \text{ при } \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0_{n\times m},\ \frac{\partial t}{\partial \xi} = 0,\ \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = E_{m\times m}, \tag{12}$$

где $0_{n\times m}, E_{m\times m}$ — нулевая и единичная матрицы соответственно.

Расширим ДТ-преобразование (6) при $k = 0, 1, \ldots$ и $k_w = 1$ по элементам вектора ξ для определения Т-спектра функции $f(t, x, \xi)$. При этом Т-спектры функций x, ξ и переменного t зададим исходя из (12):

$$\begin{cases} M_x(k, 1) = 0_{n\times m},\ M_\xi(k, 1) = E_{m\times m}\delta_T(k, k_w - 1)\, h_\xi,\ \ T(k, 1) = 0, \\ F(k, 1) = F(T(k, k_w),\ M_x(k, k_w),\ M_\xi(k, k_w)) : \{(k = \overline{0, \infty}) \wedge (k_w = 1)\}, \end{cases} \tag{13}$$

где h_ξ — отрезок аргумента (вариация функции) $M_\xi(t)$; $\delta_T(k, k_w)$ — «теда» (7).

Для рассчитанного в (6), (13) Т-спектра функции $f(t, x, \xi)$ выполняется [8, 9] (запись без индекса обозначает матрицу или вектор, а наличие индексов $j_1 = \overline{1, n}$ (строка), $j_2 = \overline{1, m}$ (столбец) указывает на скалярные величины):

$$q(t, M_x, M_\xi)_{j_1 j_2} = \frac{\partial f(t, M_x, M_\xi)_{j_1}}{\partial \xi_{j_2}} \Rightarrow Q(k, k_w)_{j_1 j_2} =$$

$$= \frac{k_w + 1}{h_{\xi_{j_2}}} F(k, k_w + 1)_{j_1 j_2} \Rightarrow Q(k, 0)_{j_1 j_2} = \frac{1}{h_{\xi_{j_2}}} F(k, 1)_{j_1 j_2} \tag{14}$$

при $M_x(k, 1) = 0_{n \times m}$, $M_\xi(k, 1) = E_{m \times m} \delta_T(k, k_w - 1) h_\xi$,

где $Q(k, k_w)$ — двухмерный Т-спектр матрицы $q(t, M_x, M_\xi)$.

Из (14) видно, что введенный (для задания Т-спектра $M_\xi(k, 1)$) отрезок аргумента h_ξ для вычисления $Q(k, 0)$ сокращается. Таким образом, можно задать

$$h_{\xi_{j_2}} = 1, \ j_2 = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Из сравнения прямого ДТ-преобразования (9) для расчета (10) и ДТ-преобразования (13) для расчета (14) видно, что они отличаются только Т-спектрами $M_x(k, 1)$ и $M_\xi(k, 1)$. Для их совместного использования введем блочные матрицы, что с учетом (11), (15) имеет вид

$$M_x(k, 1) = (E_{n \times n} \ 0_{n \times m}) \delta_T(k, k_w - 1), \ M_\xi(k, 1) = (0_{m \times n} \ E_{m \times m}) \delta_T(k, k_w - 1). \tag{16}$$

После определения в (10), (14) на основе двухмерного ДТ-преобразования уравнения (2) Т-спектров матриц частных производных $g(t, M_x, M_\xi)$ и $q(t, M_x, M_\xi)$, входящих в (3), запишем на базе (6), (9), (13) и (16) явную вычислительную схему прогнозирования движения КА (интегрирования (2)–(3)) на основе ДТ-преобразований. При этом учтем, что $G(k, 0)$, $Q(k, 0)$ определяются для $k_w = 0$, и поэтому они являются одномерными Т-спектрами (только по независимому переменному t системы (2)–(3)), и для них второй аргумент можно опустить.

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \ T(k, k_w) = t_i \delta_T(k, k_w) + h_i \delta_T(k - 1, k_w), \\ M_x(0, 0) = M_x(t_i), \ M_x(k, 1) = (E_{n \times n} \ 0_{n \times m}) \delta_T(k, k_w - 1), \\ M_\xi(k, 0) = M_\xi(T(k, 0), \ M_x(k, 0)), \ M_\xi(k, 1) = (0_{m \times n} \ E_{m \times m}) \delta_T(k, k_w - 1), \\ F(k, k_w) = F(T(k, k_w), M_x(k, k_w), M_\xi(k, k_w)): \\ \{(k = \overline{0, k_{\max} - 1}) \wedge (k_w = 0)\} \vee \{(k = \overline{0, k_{\max \partial} - 1}) \wedge (k_w = 1)\}, \\ M_x(k + 1, 0) = \dfrac{h}{k + 1} F(k, 0): \{(k = \overline{0, k_{\max} - 1}) \wedge (k_w = 0)\}, \\ G(k) = F(k, 1): \{(M_x(k, 1) = E_{n \times n} \delta_T(k, k_w - 1)) \wedge (M_\xi(k, 1) = 0_{m \times n})\}, \\ Q(k) = F(k, 1): \{(M_x(k, 1) = 0_{n \times m}) \wedge (M_\xi(k, 1) = E_{m \times m} \delta_T(k, k_w - 1))\}, \end{cases} \tag{17}$$

 ISSN 0572-2691

$$
\begin{cases}
K_x(0) = K_x(t_i), \;\; N_\xi(k) = N_\xi(T(k,0), M_x(k,0)), \\
K_x(k+1) = \dfrac{h}{k+1}(G(k) * K_x(k) + K_x(k) * G^{\mathrm{T}}(k) + \\
+ Q(k) * N_\xi(k) * Q^{\mathrm{T}}(k)) : \{k = \overline{0, k_{\max} - 1}\},
\end{cases}
\tag{18}
$$

$$
M_x(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} M_x(k,0), \;\; K_x(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} K_x(k),
\tag{19}
$$

где $M_x(t_i)$, $K_x(t_i)$ — искомые сеточные функции, принимаемые за решение (2), (3); i — узел вычислительной сетки; h — шаг интегрирования; $M_x(k, k_w)$, $M_\xi(k, k_w)$, $F(k, k_w)$, $T(k, k_w)$, $\delta_T(k, k_w)$ — Т-спектры $M_x(t)$, $M_\xi(t)$, f, t и «теды» (7) соответственно; $k_{\max}$ — порядок точности интегрирования при расчете M_{xi} и K_{xi}; $k_{\max\partial}$ — максимальный номер Т-дискреты при расчете $G(k)$ и $Q(k)$; $K_x(k)$, $G(k)$, $Q(k)$, $N_\xi(k)$ — одномерные Т-спектры матриц $K_x(t)$, g, q и $N_\xi(t)$ соответственно; $*$ — операция «обрезанной» одномерной алгебраической свертки в виде [8]:

$$
G(k) * K_x(k) = \sum_{p=0}^{\min(k, k_{\max\partial})} G(p) K_x(k-p).
\tag{20}
$$

Исходя из свойств ДТ-преобразований, при проведении прямого преобразования необходимо выполнить условие

$$
k_{\max\partial} \le k_{\max}.
\tag{21}
$$

Получение Т-изображений правой части исходного дифференциального уравнения $F(k, k_w)$, математического ожидания шума $M_\xi(k, k_w)$ и его интенсивности $N_\xi(k)$ в прямом ДТ-преобразовании проводится (методически просто) в следующем порядке [8, 9]:

- исходные функции $f(t, x, \xi)$, $M_\xi(t, x)$, $N_\xi(t, x)$ разделяются на базовые математические операции (сумма, разность, умножение, деление, тригонометрические функции, возведение в степень и т.п.), которые определяют оригиналы;
- каждая такая операция (по отдельности) вместе с оригиналом заменяется на взятое из стандартного перечня [8, 9] соответствующее изображение.

Прямое ДТ-преобразование (17)–(18) проводится в такой последовательности:

1. В (17) при $k_w = 0$ для $k = \overline{0, k_{\max} - 1}$ рассчитываются Т-спектры $F(k, 0)$ и $M_x(k, 0)$;

2. В (17) при $k_w = 1$ для $k = \overline{0, k_{\max\partial} - 1}$ рассчитывается Т-спектр $F(k, 1)$ для определения $G(k)$ и $Q(k)$ (при $G(k)$, $Q(k)$ значения $k_{\max\partial}$ можно задавать различными);

3. В (18) при $k_w = 1$ для $k = \overline{0, k_{\max} - 1}$ рассчитывается Т-спектр $K_x(k)$.

Т-спектр матриц частных производных (вариационных членов) g и q рассчитывается по столбцам. Для этого в п. 1 Т-спектр $F(k, 0)$ рассчитывается однократно, а в п. 2 Т-спектр $F(k, 1)$ пересчитывается $n + m$ раз для каждого столбца g и q при различных начальных условиях — столбцах из $M_x(k,1)=(E_{n\times n}\ 0_{n\times m})\,\delta_T(k,0)$ и $M_\xi(k,1)=(0_{m\times n}\ E_{m\times m})\,\delta_T(k,0)$. Описанная постолбчатая процедура подобна порядку определения производных методом конечных разностей относительно последовательного использования одних и тех же формул при различных начальных условиях, что обеспечивает методическую простоту разработанному подходу.

Для уменьшения вычислительной сложности прогнозирования в (17)–(19), можно дополнительно опускать (отбрасывать) малозначимые члены в матрицах частных производных g и q, при условии что такие члены не включают «единолично» элементы векторов x и ξ в функции $f(t,x,\xi)$ [1, 5, 8]. Например, если в модели движения КА учитываются возмущения от несферичности Земли и аномалий силы ее притяжения, влияние притяжения Луны и Солнца, а также аэродинамическое сопротивление атмосферы, то при расчете математического ожидания траектории КА для Т-спектра $F(k,0)$ учет возмущений обязательный, а при расчете матриц частных производных для Т-спектра $F(k,1)$ их можно опустить (задать нулевыми):

• для Т-спектра $G(k)$ матрицы g не учитывать возмущения от тессеральных гармоник, влияние притяжения Луны, Солнца и сопротивления атмосферы;

• для Т-спектра $Q(k)$ матрицы q — возмущения от тессеральных гармоник, влияние притяжения Луны и Солнца.

Далее рассмотрим разработку адаптивных вычислительных схем прогнозирования движения КА на базе (17)–(19). В целом наилучшие вычислительные характеристики обеспечивают адаптивные вычислительные схемы, в которых реализуется априорно на одном шаге (без использования пробных шагов) автоматический выбор величины шага интегрирования и порядка схемы [7]. Для реализации такой адаптации необходимо иметь явную одношаговую схему интегрирования, в которой для априорной адаптации по шагу получена аналитическая оценка ошибки аппроксимации схемы и имеется возможность численно-аналитически изменять шаг интегрирования; для адаптации по порядку получена аналитическая оценка вычислительной сложности схемы и имеется возможность изменять порядок в одной схеме (смена порядка без изменения алгоритма).

Для вычислительной схемы (17)–(19) выполняется все перечисленное выше.

Величина адаптивного шага интегрирования по рассчитанному Т-спектру (прямому ДТ-преобразованию, без пробных шагов) для (17)–(18) определяется в виде [7, 8]:

$$h_i = h\left(\frac{\delta_x}{\|M_x(k_{\max},0)\|/\|M_x(t_i)\|+\|K_x(k_{\max})\|/\|K_x(t_i)\|}\right)^{\frac{1}{k_{\max}}},$$

$$\frac{\|M_x(k_{\max},0)\|}{\|M_x(t_i)\|}=\sum_{j_1=1}^{n}\left|\frac{M_{x\,j_1}(k_{\max},0)}{M_x(t_i)_{j_1}}\right|,\ \frac{\|K_x(k_{\max})\|}{\|K_x(t_i)\|}=\sum_{j_2=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{j_2}\left|\frac{K_{x\,j_1 j_2}(k_{\max})}{K_x(t_i)_{j_1 j_2}}\right|, \quad (22)$$

где h_i — адаптивный шаг интегрирования; δ_x — заданное значение относительной ошибки интегрирования на шаге; $\|\ldots\|$ — норма матрицы; j_1, j_2 — индекс элемента матрицы, вектора.

Исходя из свойств ДТ-преобразований, используя рассчитанный в (22) шаг, можно пересчитать Т-дискреты для обратного ДТ-преобразования (19) в виде [9]:

$$M_x(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{h_i}{h}\right)^k M_x(k,0),\ \ K_x(t_{i+1})=\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{h_i}{h}\right)^k K_x(k). \quad (23)$$

В целом, адаптивная по шагу вычислительная схема прогнозирования движения КА (интегрирования (2), (3)) на основе ДТ-преобразований имеет вид (17), (18), (22), (23).

Оценка вычислительной сложности ДТ-схемы (17)–(19) на одном шаге интегрирования, выраженная в количестве вычислений правой части дифференциального уравнения (1) — $f(t, x, \xi)$, определяется в виде [7, 8]:

$$S(k_{\max}, k_{\max\delta}) = \frac{1}{2} k_{\max}(k_{\max} + 1) + (n + m) k_{\max\delta}(k_{\max\delta} + 1), \tag{24}$$

где $k_{\max}$, $k_{\max\partial}$ — максимальные номера Т-дискрет, учитываемых при расчете Т-спектра $F(k, k_w)$ для $k_w = 0$ и $k_w = 1$ соответственно; n, m — размер векторов x и ξ соответственно.

Из (24) видно, что выполнение (21) в виде строгого неравенства $k_{\max\partial} < k_{\max}$ приводит к уменьшению вычислительной сложности прогнозирования. Выбор конкретных значений для такого условия $k_{\max\partial} = k_{\max\partial}(k_{\max})$ проводится исходя из оценки влияния малости отбрасываемых Т-дискрет. Для задачи прогноза движения КА допускается положить [8]

$$k_{\max\partial} = k_{\max\partial}(k_{\max}) = \mathrm{round}(0{,}5 k_{\max}), \tag{25}$$

где $\mathrm{round}(\ldots)$ — операция округления.

С помощью оценки (24) можно реализовать адаптацию по порядку априорно на следующем шаге в адаптивной по шагу вычислительной схеме интегрирования (17), (18), (22), (23) в таком виде: порядок схемы на следующем шаге определяется путем сравнения вычислительной эффективности (по показателю количества вычислительных затрат (24) на единицу шага (22)) на текущем шаге для двух адаптивных схем с $k_{\max i}$ и $k_{\max i} - 1$. Если более эффективна схема с $k_{\max i}$, то на следующем шаге целесообразно увеличить порядок — $k_{\max i+1} = k_{\max i} + 1$, а если нет — уменьшить $(k_{\max i+1} = k_{\max i} - 1)$. Описанный подход имеет такой вид:

адаптивная по шагу схема (17), (18), (22), (23) с $k_{\max} = k_{\max i}$,

$$k_{\max i+1} = \begin{cases} k_{\max i} + 1, & \dfrac{S(k_{\max i}, k_{\max\partial}(k_{\max i}))}{h_i(k_{\max i})} \le \dfrac{S(k_{\max i} - 1, k_{\max\partial}(k_{\max i} - 1))}{h_i(k_{\max i} - 1)}, \\ k_{\max i} - 1, & \dfrac{S(k_{\max i}, k_{\max\partial}(k_{\max i}))}{h_i(k_{\max i})} > \dfrac{S(k_{\max i} - 1, k_{\max\partial}(k_{\max i} - 1))}{h_i(k_{\max i} - 1)}, \end{cases} \tag{26}$$

где $k_{\max i}$ — адаптивный порядок интегрирования; $k_{\max\partial}(k_{\max i})$, $k_{\max\partial}(k_{\max i} - 1)$ — принятые значения $k_{\max\partial}$ (25) для заданных значений $k_{\max i}$ и $k_{\max i} - 1$ соответственно; $S(\ldots)$ — вычислительная сложность (24) для соответствующих значений $k_{\max}$ и $k_{\max\partial}$; $h_i(k_{\max i})$, $h_i(k_{\max i} - 1)$ — адаптивные шаги интегрирования (22) для $k_{\max i}$ и $k_{\max i} - 1$ соответственно.

В целом, адаптивная по шагу и порядку вычислительная схема прогнозирования движения КА (интегрирования (2)–(3)) на основе ДТ-преобразований имеет вид (17), (18), (22), (23), (26).

Рассмотрим порядок программирования (17), (18), (22), (23), (26) — разработку программ (процедур) прогнозирования движения КА по стохастической модели на основе ДТ-преобразований и последовательность (порядок) оценки характеристик таких процедур.

Алгоритм программы прогнозирования на основе (17), (18), (22), (23), (26) использует для хранения и расчета Т-спектров массивы и включает четыре вложенных цикла [8]:

1) внешний цикл по приращению независимого переменного t (по узлам вычислительной сетки i) от $i=0$ до $i_{\max}$. Для цикла начальными данными являются $M_x(t_0)$ и $K_x(t_0)$, а выходными — $M_x(t_{\max})$ и $K_x(t_{\max})$;

2) цикл (вложенный в первый цикл) для расчета по столбцам многомерных Т-спектров (по аргументу k_w) от $j_w=0$ (для $k_w=0$) до $j_w=n+m$ (для $k_w=1$). В цикле при $j_w=0$ принимается $k_w=0$, а при $j_w>0$ — $k_w=1$ и выбирается j_w-й столбец из $M_x(k,1)=(E_{n\times n}\ 0_{n\times m})\delta_T(k,0)$, $M_\xi(k,1)=(0_{m\times n}\ E_{m\times m})\delta_T(k,0)$ с дальнейшим расчетом для $1\le j_w\le n$, j_w-го столбца Т-спектра $G(k)$, а для $n+1\le j_w\le n+m$, (j_w-n)-го столбца $Q(k)$. Для цикла начальными данными являются $M_x(t_i)$, а выходными — $M_x(k,0)$, $G(k)$ и $Q(k)$;

3) цикл (вложенный во второй цикл) по аргументу k, от $k=0$ до $k_{\max i}$ (для $k_w=0$) или до $k_{\max\partial}$ (для $k_w=1$) (25). В цикле проводится прямое ДТ-преобразование (17): рекуррентный расчет $M_x(k+1,0)=\dfrac{h}{k+1}F(k,0)$ или последовательный расчет $F(k,k_w)$. Для цикла начальными данными являются $k_{\max i}$, j_w и заданные $M_x(k,1)$, $M_\xi(k,1)$, а выходными — $M_x(k,0)$, столбцы $G(k)$ и $Q(k)$;

4) цикл (вложенный в первый цикл) по аргументу k, от $k=0$ до $k_{\max\partial}$. В цикле проводится прямое ДТ-преобразование (18) — рекуррентный расчет $K_x(k+1)$. Для цикла начальными данными являются $K_x(t_i)$, спектры $M_x(k,0)$, матрицы $G(k)$ и $Q(k)$, а выходным — $K_x(k)$.

В конце первого цикла проводится определение (текущего) адаптивного шага — h_i (23), адаптивного порядка для следующего шага — $k_{\max i+1}$ (26) и обратное ДТ-преобразование (22) — определяются $M_x(t_{i+1})$ и $K_x(t_{i+1})$.

На характеристики программного обеспечения существенно влияет множество как объективных (выбранный язык программирования, система команд процессора), так и субъективных (квалификация программиста) факторов. На опыте разработки программного обеспечения для космических проектов в [3] приводятся оценки характеристик типового программного обеспечения для прогнозирования движения КА по детерминированной модели при ее численном интегрировании и предлагается подход к оценке характеристик вновь разрабатываемых процедур методом подобия.

Метод подобия при оценке характеристик программ включает следующие этапы:

• известны (заданы из опыта разработки) характеристики программы детерминированного прогноза движения КА с численным методом интегрирования (принимаются за базовую единицу). Для программы на языке высокого уровня размер кода составляет 52 Кбайт, оперативная память — 16 Кбайт, вычислительная сложность — 20 тыс. операций в секунду [3];

• разрабатывается программа для детерминированного прогноза с численным интегрированием, характеристики которой принимаются равными предыдущему этапу;

• разрабатывается программа для стохастического прогноза с интегрированием на основе ДТ-преобразований, характеристики которой определяются и сравниваются (нормируются) с предыдущим этапом.

При разработке программ прогнозирования на основе предложенных подходов 1) использовалась среда Delphi-6, язык высокого уровня Object Pascal; 2) модель движения КА, в которой учтены возмущения от несферичности Земли и аномалий силы притяжения при разложении геопотенциала в ряд по сферическим функциям и сила аэродинамического сопротивления атмосферы; 3) все двухмерные массивы, используемые для хранения двухмерных Т-спектров, заменяются одномерными массивами (подобная операция по представлению всех массивов в одномерном виде реализуется любым компилятором). Например, массив $X[k, k_w]$ с $(k = \overline{0, k_{\max}}, k_w = 0) \wedge$ $\wedge (k = \overline{0, k_{\max\delta}}, k_w = 1)$ заменяется на массив $X_*[k_*]$ с $(k_* = \overline{0, k_{\max} + k_{\max\delta} + 1})$, при этом выполняется $X[k, 0] = X_*[k]$ и $X[k, 1] = X_*[k + k_{\max} + 1]$. Описанная замена позволяет при (21) эффективнее использовать оперативную память (уменьшить выделенную память для хранения многомерных Т-спектров).

Результаты прогнозирования движения КА ближнего космоса с высотой 600–1000 км, значением баллистического коэффициента — 0,06 и флюктуациями (относительно среднего значения) плотности атмосферы — 60 % приведены в табл. 1, где δ_x — относительная ошибка интегрирования на шаге; $k_{\max}$ — порядок интегрирования; h — шаг интегрирования; S/h — средние вычислительные затраты на единицу шага (24); S_{prg}/h — средние вычислительные затраты на единицу шага (общее количество умножений и делений в программе прогноза, отнесенное к общему интервалу прогнозирования).

Таблица 1

δ_x	Поле разложения геопотенциала	$k_{\max}$	h, с	S/h	S_{prg}/h
10^{-12}	4×4	10–20	70–342	3,5	355
	16×16	12–19	80–221	4,5	2138
10^{-14}	4×4	12–20	60–309	4,0	410
	16×16	12–20	48–195	5,1	2396
10^{-16}	4×4	12–20	45–255	5,1	522
	16×16	12–24	40–222	6,9	3205

Анализ характеристик многомерных ДТ-схем (табл. 1) показывает, что для разных моделей движения (при разной полноте учета возмущающих факторов) параметры наилучшей адаптивной схемы различные, а при увеличении точности прогноза и усложнении модели движения КА вычислительная сложность расчетов и оптимальный порядок увеличиваются, а оптимальный шаг уменьшается.

Оценка характеристик программ прогнозирования движения КА методом подобия для принятых в отечественной практике баллистико-навигационного обеспечения управления полетами КА моделей движения КА, в которых учтено поле 4×4 гармоник разложения геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям и сопротивление атмосферы [1, 11–13], приведена в табл. 2, где в качестве базовой принимается программа прогнозирования движения КА по детерминированной модели движения семиэтапным методом Адамса по схеме «предиктор-корректор» для штатной точности при шаге интегрирования 100 с, разгон которого выполняется методом Рунге–Кутта 4-го порядка. Для численного определения матриц g и q используется метод конечных разностей.

Следует отметить, что прогноз движения КА по стохастической модели, в сравнении с прогнозом по детерминированной модели, требует большей точности. Так, точность стохастического прогноза (расчет статистических характеристик) составляет $\delta_x \le 10^{-12}$, а для детерминированного прогноза (метод Адамса с шагом 100 с) — $\delta_x \le 10^{-7}$.

Таблица 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Модель движения</th><th rowspan="2" colspan="2">Метод прогноза (интегрирования)</th><th colspan="2">Размер, Кбайт</th><th rowspan="2">Вычислительная сложность, тыс. операций / с</th></tr>
<tr><th>Код программы</th><th>Оперативная память</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Детерминированная</td><td colspan="2">Метод Адамса (базовый)</td><td>52</td><td>16</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="2">Одномерные ДТ-преобразования</td><td>78</td><td>192</td><td>68</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Стохастическая</td><td rowspan="2">(2)–(3), метод Адамса</td><td>Аналитическое определение g и q</td><td>260</td><td>80</td><td>857</td></tr>
<tr><td>Численное определение g и q</td><td>78</td><td>32</td><td>2600</td></tr>
<tr><td colspan="2">(17), (18), (22), (23), (26)</td><td>117</td><td>312</td><td>874</td></tr>
</table>

Из табл. 2 следует, что 1) для штатной точности программа для прогнозирования по детерминированной модели (соответствует прогнозу математического ожидания (2)) на основе известных методов имеет характеристики лучше, чем программа на основе одномерных ДТ-преобразований; 2) программа прогноза по стохастической модели на основе многомерных ДТ-преобразований имеет сопоставимые характеристики с программой при аналитическом определении матриц частных производных и существенно лучшие характеристики по сравнению с программой при численном определении таких матриц; 3) размер кода программ на основе многомерных ДТ-преобразований не зависит от размерности задачи прогноза (общая размерность $n+m=6+3=9$); 4) для программ на основе ДТ-преобразований объем оперативной памяти определяется точностью прогноза (чем выше точность, тем больше объем).

Заметим, что размер кода программы фактически определяет сложность ее разработки и соответственно трудозатраты на ее разработку (программисту оплачивается или количество строк, или размер кода программы, или количество операторов, входящих в нее) [3]. При разработке программ на основе ДТ-преобразований в полном объеме проявляется методическая простота реализации разработанного подхода, которая состоит в «перепрограммировании» программы прогнозирования на основе одномерных ДТ-преобразований (прогноз по детерминированной модели) в программу на основе многомерных ДТ-преобразований. Обозначенное перепрограммирование для матриц частных производных сводится фактически к расширению библиотеки стандартных (унифицированных) процедур для многомерных ДТ-преобразований. Иными словами, перепрограммирование программы на основе одномерных ДТ-преобразований является методически простой унифицированной операцией, поэтому программа на основе многомерных ДТ-преобразований проста в разработке (соответственно, и стоит меньше).

Программирование на основе известных подходов требует предварительного проведения сложных аналитических выкладок, которые не связаны с программой для детерминированного прогноза, а именно: определения громоздких матриц частных производных с их дальнейшим программированием. При этом перепрограммирование программы для детерминированной модели фактически сводится к ее значительному усложнению (расширению) за счет разработки новых неунифицированных блоков для матриц частных производных. Более того, для сложных моделей движения КА такие матрицы частных производных имеют слишком сложный вид, что исключает возможность разработки программ на традиционных подходах.

Характеристики программ в табл. 2 приведены для наименьшей практически целесообразной точности решения задачи прогнозирования движения КА. При увеличении точности вычислительная эффективность использования ДТ-преобразований будет возрастать [8, 10], и, соответственно, эффективность программного обеспечения для прогнозирования движения КА на основе ДТ-преобразований тоже будет возрастать.

Заключение. Отличительной особенностью предлагаемого подхода к интегрированию стохастического дифференциального уравнения движения КА на основе многомерных ДТ-преобразований является возможность его применения к моделям движения КА в любой системе координат. Это позволяет методически просто реализовать расчет статистических характеристик траектории КА методом линеаризации относительно среднего движения и корреляционных преобразований.

Таким образом, предлагаемый в статье подход к решению задачи прогнозирования движения КА ближнего космоса по стохастической динамической модели движения на основе ДТ-преобразований является эффективным при разработке программно-алгоритмического обеспечения для высокоточного прогнозирования движения КА.

М.Ю. Ракушев

ПРОГНОЗУВАННЯ РУХУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ ЗА СТОХАСТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано підхід до вирішення задачі прогнозування руху космічних апаратів ближнього космосу за стохастичною динамічною моделлю руху. В моделі руху космічного апарата врахована стохастичність початкових умов та варіації щільності атмосфери. Прогноз проведено методом прямого прогнозування з використанням числового методу інтегрування, розробленого на основі диференціальних перетворень. Розглянуто особливості реалізації програмно-алгоритмічного забезпечення для прогнозування.

M.Yu. Rakushev

PREDICTION OF SPACECRAFT MOTION ACCORDING TO A STOCHASTIC MODEL BASED ON DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

An approach to solving the problem of the prediction of near space vehicles motion according to a stochastic dynamic model of motion is presented. Stochasticity of the initial conditions and variations in atmospheric density are considered in the model of spacecraft motion. The prediction is carried out by direct predicting with the use of a numerical integration method developed on the basis of differential transformations. The paper also presents the implementation features of software and algorithmic support for the prediction.

1. *Мамон П.А., Половников В.И., Слезкинский С.К.* Баллистическое обеспечение космических полетов. — Л. : ВИКИ, 1990. — 622 с.
2. *Kovbasyuk S.V., Kanevskyy L.B.* Analysis of dependence of spacecraft movement parameters determination precision on sighting angles in a multipositional monitoring system // Radioelectronics and Communications Systems. — 2013. — **56**, N 4. — P. 194–200.
3. *Wertz J.R.* Space mission analysis and design. — Microcosm Press, 3-rd Edition, 1999. — 969 p.
4. *Белоконов И.В.* Статистический анализ динамических систем (анализ движения летательных аппаратов в условиях статистической неопределенности): учебное пособие. — Самара, 2001; www.ssau.ru/resources/ump/belokonov_sads
5. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. — М. : Связь, 1076. — 496 с.
6. *Ракушев М.Ю.* Численный метод интегрирования решения стохастического дифференциального уравнения на основе дифференциальных преобразований // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2013. — № 6. — С. 68–78.
7. *Ракушев М.Ю.* Вычислительная схема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциально-тейлоровского преобразования с автоматическим выбором шага и порядка // Космічна наука і технологія. —2010. — **16**, № 6. — С. 51–56.
8. *Ракушев М.Ю.* Прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень. — Житомир : Видавець О.О. Євенок, 2015. — 224 с.
9. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. — К. : Наук. думка, 1986. — 159 с.
10. *Кравченко Ю.В., Ракушев М.Ю, Судніков Є.О., Ушаков І.В.* Ефективність обчислювальних схем інтегрування звичайних диференціальних рівнянь на основі диференціально-тейлорівських перетворень // Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. — К. : НУОУ, 2014. — № 2 (20). — С. 65–74.
11. *Система* геодезических параметров земли «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90) / В.Ф. Галазин, Б.Л. Каплан, М.Г. Лебедев, В.Г. Максимов и др. — М. : Координационный научно-информационный центр, 1998. — 37 с.
12. *ГОСТ* 25645.101–83. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для проектных баллистических расчетов искусственных спутников Земли. Введ. 08.09.83. — М. : Изд-во стандартов, 1984. — 170 с.
13. *ГОСТ* 25645.115–84. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. Введ. 01.07.85. — М. : Изд-во стандартов, 1991. — 32 с.

Получено 06.03.2017