УДК 517.95:419.86:539.3

В.А. Стоян, С.Т. Даниш

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ. ЧАСТЬ 2. ТЕЛА С ДИСКРЕТНО НАБЛЮДАЕМЫМ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ СОСТОЯНИЕМ

Введение

Данная статья является продолжением научного исследования динамики трехмерных упругих динамических систем, опубликованного в [1], где предложенные и развитые в [2, 3] подходы к математическому моделированию линейных пространственно распределенных динамических систем распространены на задачи эластодинамики. Основываясь на классически известных [4] дифференциальных уравнениях динамики трехмерной упругой среды, в [1], построены интегральные математические модели динамики как пространственно неограниченной упругой среды, так и выделенного из нее трехмерного упругого тела произвольной геометрии. В интегральной форме представлены и математические модели начально-краевой задачи динамики такого тела. Особенностью этих математических моделей является то, что построены они при наличии непрерывно определенной информации о начальном состоянии тела и текущих наблюдениях за состоянием его геометрической поверхности, которые в модели учитывались по среднеквадратическому критерию. Сформулированные в [1] задачи математического моделирования динамики пространственно распределенного упругого тела решаются при наличии дискретно определенной информации о его начально-краевом состоянии. Будут построены математические модели динамики как пространственно-неограниченных упругих тел, так и тел произвольной геометрической конфигурации, которые функционируют как в установившемся динамическом режиме, так и при наличии дискретно наблюдаемых начальных возмущений. Построенные математические модели являются интегральным обращением классических дифференциальных уравнений Ляме эластодинамики трехмерной упругой среды, по среднеквадратическому критерию согласованному с дискретно определенными наблюдениями за начально-краевым состоянием рассматриваемого тела.

Математическая модель динамики пространственно-неограниченной упругой среды

Как и в [1], рассмотрим динамику (по временной координате t) отнесенной к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 среды, упругие свойства которой определим константами Ляме [4] λ и μ. Пусть $f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t)$ — массовые силы, которые имеют место в точке $x=(x_1,x_2,x_3)$, исследуем смещения $u_i(x,t)$ $(i=\overline{1,3})$ этой точки в направлении координатных осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно. При этом, как и в [1], будем исходить из того, что [4]

$$\begin{aligned} &\mu\Delta u_1 + (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\theta - \rho\partial_t^2 u_1 = -f_1, \\ &\mu\Delta u_2 + (\lambda+\mu)\partial_{x_2}\theta - \rho\partial_t^2 u_2 = -f_2, \\ &\mu\Delta u_3 + (\lambda+\mu)\partial_{x_3}\theta - \rho\partial_t^2 u_3 = -f_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ — удельная плотность материала среды, символы ∂_{x_i} $(i=\overline{1,3})$ и ∂_t — производные по пространственным координатам x_i $(i=\overline{1,3})$ и времени t,

$$\theta = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} u_i, \;\; \Delta = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}^2 .$$

Будем учитывать также то, что интегральным эквивалентом системы (1) является интегральное соотношение

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-s') f(s') ds'. \tag{2}$$

Здесь $s=(x,t)$

$$u(s) = \mathrm{col}(u_i(s),\; i=\overline{1,3}),$$

$$f(s) = \mathrm{col}(f_i(s),\; i=\overline{1,3}),$$

а $G(s-s')$ — построенная с учетом условий непрерывности и затухания матричная функция вида

$$G(s-s') = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} A^{-1}(p,q) D(p,q,s-s') dp dt q \tag{3}$$

при условии, что

$$D(p,q,s-s') = \mathrm{diag}(e^{p(x-x')+q(t-t')},\; l=\overline{1,3}),$$

$$p=(p_1,p_2,p_3),$$

$$p(x-x') = p_1(x_1-x_1') + p_2(x_2-x_2') + p_3(x_3-x_3'),$$

а с учетом (1)

$$A(p,q) = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)p_1^2 + \mu(p_2^2+p_3^2) - \rho q^2 & (\lambda+\mu)p_1p_2 & (\lambda+\mu)p_1p_3 \\ (\lambda+\mu)p_2p_1 & (\lambda+2\mu)p_2^2 + \mu(p_1^2+p_3^2) - \rho q^2 & (\lambda+\mu)p_2p_3 \\ (\lambda+\mu)p_3p_1 & (\lambda+\mu)p_3p_2 & (\lambda+2\mu)p_3^2 + \mu(p_1^2+p_2^2) - \rho q^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что варианты вычисления интеграла в (3) рассматривались в [2]. Если обозначить $\mathrm{Re}s(\Phi(p,q),(p_k,q_k))$ интегральный вычет матричной функции $\Phi(p,q) = A^{-1}(p,q)D(p,q,s-s')$ в полюсе (p_k,q_k), то согласно одному из таких вариантов [2, 5] без учета условий непрерывности и затухания

$$G(s-s') = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}s(\Phi(p,q),(p_k,q_k)).$$

Математическая модель динамики пространственно-ограниченного упругого тела на ограниченном временном интервале

Рассмотрим упругое тело, пространственной областью Γ выделенное из описанной соотношениями (1), (2) упруго-динамической среды. В этом случае математические модели (1), (2) динамики пространственно неограниченной упругой среды дополним начально-краевыми наблюдениями за телом, которые в отличие от [1] запишем

$$L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0\in S_0}} = U_{rl}^0 \quad (r=\overline{1,R_0};\, l=\overline{1,L_0}); \tag{4}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)u(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma\in\Gamma\times[0,T]} = U_{\rho l}^\Gamma \quad (\rho=\overline{1,R_\Gamma};\; l=\overline{1,L_\Gamma}), \tag{5}$$

где $L_r^0(\partial_t)(r=\overline{1,R_0})$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ — линейные дифференциальные операторы, а S_0 — трехмерная пространственная область, занятая рассматриваемым телом.

Согласно [2, 3] начально-краевые внешнединамические возмущения (4), (5) будем моделировать трехмерными вектор-функциями $f_0(s)$ и $f_\Gamma(s)$, определенными в областях $S^0=S_0\times(-\infty,0]$ и $S^\Gamma=(R^3\setminus S_0)\times[0,T]$ соответственно, или векторами $\overline{f}_0=\mathrm{col}(f_{0m}, m=\overline{1,M_0})$, $\overline{f}_\Gamma=\mathrm{col}(f_{\Gamma m}, m=\overline{1,M_\Gamma})$ их значений $f_{0m}=f_0(s_m^0)$ и $f_{\Gamma m}=f_\Gamma(s_m^\Gamma)$ в точках $s_m^0\in S^0$ и $s_m^\Gamma\in S^\Gamma$ соответственно.

При этом функции

$$u_0(s)=\int_{S^0} G(s-s')f_0(s')ds', \tag{6}$$

$$u_0(s)=\sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)f_{0m}, \tag{7}$$

$$u_\Gamma(s)=\int_{S^\Gamma} G(s-s')f_\Gamma(s')ds', \tag{8}$$

$$u_\Gamma(s)=\sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma)f_{\Gamma m} \tag{9}$$

будут определять эффект действия наблюдаемых согласно (4), (5) начальных и краевых внешнединамических возмущений, которые имеют место в точке $x_l^0\in S_0$ $(l=\overline{1,L_0})$ при $t=0$ и точке $x_l^\Gamma\in\Gamma)$ $(l=\overline{1,L_\Gamma})$ при $t_l^\Gamma\in[0,T]$.

С учетом определенных согласно (2) воздействий объемно определенных массовых сил $f_i(s)$ $(i=\overline{1,3})$ функцию смещений $u(s)$ точек ограниченного поверхностью Γ трехмерного упругого тела при наличии наблюдений (4), (5) за его начально-краевым состоянием выразим соотношением

$$u(s)=u_\infty(s)+u_0(s)+u_\Gamma(s), \tag{10}$$

в котором

$$u_\infty(s)=\int_{S_0\times[0,T]} G(s-s')f_0(s')ds',$$

а $u_0(s)$ и $u_\Gamma(s)$ — вектор-функции, определенные согласно (6), (8) и (7), (9) для непрерывно и дискретно заданных моделирующих факторов.

 ISSN 0572-2691

Последнее означает, что математические модели ограниченного поверхностью Γ упругого тела будут иметь вид

$$\int\limits_{S_0\times[0,T]} G(s-s')f(s')ds' + \int\limits_{S^0} G(s-s')f_0(s')ds' + \int\limits_{S^\Gamma} G(s-s')f_\Gamma(s')ds' = u(s), \tag{11}$$

$$\int\limits_{S_0\times[0,T]} G(s-s')f(s')ds' + \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)f_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma)f_{\Gamma m} = u(s). \tag{12}$$

Как показано в [2, 3], обе математические модели эквивалентны дифференциальной модели (1) при любых $f_0(s)$, $f_\Gamma(s)$ и $\overline{f}_0, \overline{f}_\Gamma$, для аналитического определения которых остаются только наблюдения (4), (5) за начально-краевым состоянием рассматриваемого тела.

Из условий среднеквадратического выполнения (4), (5) находим, что моделирующие вектор-функции $f_0(s)$, $f_\Gamma(s)$ и их дискретные аналоги $\overline{f}_0$, $\overline{f}_\Gamma$ будут определяться как решения задач

$$\Phi \to \min_{f_0(s),\, f_\Gamma(s)}, \tag{13}$$

$$\Phi \to \min_{\overline{f_0},\, \overline{f_\Gamma}}, \tag{14}$$

в которых

$$\Phi = \sum_{r=1}^{R_0}\sum_{l=1}^{L_0} \| L_r(\partial_t)u(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}} - U_{rl}^0 \|^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{l=1}^{L_\Gamma} \| L_\rho^\Gamma(\partial_x)u(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma} - U_{\rho l}^\Gamma \|^2.$$

При этом [2, 3]

$$f_0(s) = (A_{11}^{\mathrm{T}}(s),\quad A_{21}^{\mathrm{T}}(s))P^+(U - A_v) + v_0(s),$$

$$f_\Gamma(s) = (A_{12}^{\mathrm{T}}(s),\quad A_{22}^{\mathrm{T}}(s))P^+(U - A_v) + v_\Gamma(s),$$

$$\overline{f_0} = (\overline{A}_{11}^{\mathrm{T}}, \overline{A}_{21}^{\mathrm{T}})\overline{P}^+(U - \overline{A}\overline{v}) + \overline{v}_0,$$

$$\overline{f_\Gamma} = (\overline{A}_{12}^{\mathrm{T}}, \overline{A}_{22}^{\mathrm{T}})\overline{P}^+(U - \overline{A}\overline{v}) + \overline{v}_\Gamma$$

при произвольных интегрируемых в областях S^0, S^Γ вектор-функциях $v_0(s)$ $(s\in S^0)$, $v_\Gamma(s)$ $(s\in S^\Gamma)$, 3 M_0-и 3 M_Γ-мерных векторах $\overline{v}_0$, $\overline{v}_\Gamma$,

$$v(s) = \mathrm{col}(v_0(s), v_\Gamma(s)),\ \ \overline{v} = \mathrm{col}(\overline{v}_0, \overline{v}_\Gamma),$$

а также

$$A_{1i}(s') = \mathrm{col}(L_r^0(\partial_t)G(s-s')\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}},\quad l=\overline{1,L_0}),\quad r=\overline{1,R_0}),$$

$$A_{2i}(s') = \mathrm{col}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma},\quad l=\overline{1,L_\Gamma}),\quad \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$(s'\in S^0 \text{ при } i=1;\ \ s'\in S^\Gamma \text{ при } i=2)$$

$$\overline{A}_{11} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}},\quad m=\overline{1,M_0}),\quad l=\overline{1,L_0}),\quad r=\overline{1,R_0}),$$

$$\overline{A}_{12} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}},\quad m=\overline{1,M_\Gamma}),\quad l=\overline{1,L_0}),\quad r=\overline{1,R_0}),$$

$$\overline{A}_{21} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)\Big|_{s=s_l^\Gamma},\quad m=\overline{1,M_0}),\quad l=\overline{1,L_\Gamma}),\quad \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$\overline{A}_{22} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{s=s_l^\Gamma}, \quad m=\overline{1, M_\Gamma}), \quad l=\overline{1, L_\Gamma}), \quad \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$U_0 = \mathrm{col}((U_{rl}^0, \quad l=\overline{1, L_0}), \quad r=\overline{1, R_0}),$$

$$U_\Gamma = \mathrm{col}((U_{\rho l}^\Gamma, \quad l=\overline{1, L_\Gamma}), \quad \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

которые являются компонентами матричной функции

$$A(s) = \begin{pmatrix} (A_{11}(s) \quad (s \in S^0)) & (A_{12}(s) \quad (s \in S^\Gamma)) \\ (A_{21}(s) \quad (s \in S^0)) & (A_{22}(s) \quad (s \in S^\Gamma)) \end{pmatrix},$$

матрицы $\overline{A} = [\overline{A}_{ij}]_{i,\,j=1}^{i,\,j=2}$ и вектора $U = \mathrm{col}(U_0, U_\Gamma)$.

Матрицы P^+, $\overline{P}^+$ — псевдообращение матриц $P = \int\limits_{(\cdot)} A(s)A^{\mathrm{T}}(s)ds$ (знак $(\cdot)$ здесь и далее означает интегрирование по области изменения аргумента подынтегральной функции) и $\overline{P} = \overline{A}\overline{A}^{\mathrm{T}}$ соответственно, а $A_v = \int\limits_{(\cdot)} A(s)v(s)ds.$

Математическая модель установившейся динамики пространственно-ограниченного упругого тела

Остановимся на вопросах построения математической модели установившейся $(t \in (-\infty; +\infty))$ динамики упругого тела, пространственной поверхностью Γ выделенного из упругого среды.

Исходя из интегрального представления (2) состояния пространственно-неограниченной упругой среды и с учетом наблюдений (4), (5) за состоянием поверхности Γ рассматриваемого тела математическую модель последнего представим одним из двух следующих соотношений:

$$\int\limits_{S_0} dx' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')f(s')dt' + \int\limits_{S^\Gamma} dx' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')f_\Gamma(s')dt' = u(s), \tag{15}$$

$$\int\limits_{S_0} dx' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')f(s')dt' + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s-s_m^\Gamma)f_{\Gamma m} = u(s). \tag{16}$$

Учитывая, что определенная согласно (15), (16) вектор-функция $u(s)$ является [2] решением системы уравнений (1) при любых $f_\Gamma(s)$, $\overline{f}_\Gamma$, моделирующую вектор-функцию $f_\Gamma(s)$ и вектор $\overline{f}_\Gamma$ ее значений $f_{\Gamma m}$ $(m=\overline{1, M_\Gamma})$ найдем из условий

$$\Phi_\Gamma \to \min_{f_\Gamma(s)}, \tag{17}$$

$$\Phi_\Gamma \to \min_{\overline{f}_\Gamma}, \tag{18}$$

где при определенной в (15), (16) вектор-функции $u(s)$

$$\Phi_\Gamma = \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} \left\| L_\rho^\Gamma(\partial_x)u(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma} - U_{\rho l}^\Gamma \right\|^2$$

При этом при определенных выше матричной функции $A_{22}(s)$, матрице $\overline{A}_{22}$, векторе U_Γ, произвольной интегрируемой в S^Γ вектор-функции $v_\Gamma(s)$, 3 M_Γ-мерном векторе $\overline{v}_\Gamma$ и

$$P_\Gamma = \int\limits_{S^\Gamma} A_{22}(s)A_{22}^{\mathrm{T}}(s)ds, \quad \overline{P}_\Gamma = \overline{A}_{22}\overline{A}_{22}^{\mathrm{T}},$$

$$A_{v\Gamma} = \int\limits_{S^\Gamma} A_{22}(s)v_\Gamma(s)ds$$

решениями задач (17), (18) будут

$$f_\Gamma(s) = A_{22}^T(s)P_\Gamma^+(U_\Gamma - A_{v\Gamma}) + v_\Gamma(s),$$

$$\overline{f}_\Gamma = \overline{A}_{22}{}^T\,\overline{P}_\Gamma{}^+(U_\Gamma - \overline{A}_{22}\overline{v}_\Gamma) + \overline{v}_\Gamma.$$

Математическая модель начально возмущенной пространственно-неограниченной упругой среды

Рассмотрим инициированную начальным возмущением (4) динамику пространственно-неограниченно упругой среды при $t \in [0, T]$.

При отсутствии краевых ограничений (5) математическую модель динамики упругой среды в этом случае получим из (11), (12) при $u_\Gamma(s) \equiv 0.$ При этом соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx' \int\limits_0^T G(s-s')f(s')dt' + \int\limits_{S^0} G(s-s')f_0(s')ds' = u(s), \tag{19}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx' \int\limits_0^T G(s-s')f(s')dt' + \sum_{m=1}^{M_0} G(s-s_m^0)f_{0m} = u(s), \tag{20}$$

точно [2] удовлетворяя (1), будут математической моделью динамики рассматриваемой среды, если вектор-функцию $f_0(s)$ и вектор $\overline{f}_0$ определить из условий

$$\Phi_0 \to \min_{f_0(s)}, \tag{21}$$

$$\Phi_0 \to \min_{\overline{f}_0}, \tag{22}$$

где при определенной в (19), (20) вектор-функции $u(s)$

$$\Phi_0 = \sum_{r=1}^{R_0}\sum_{l=1}^{L_0} \| L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}} - U_{rl}^0 \|^2.$$

При этом, как и выше, при определенных выше матричной функции $A_{11}(s)$, матрице $\overline{A}_{11}$, векторе U_0 и

$$P_0 = \int\limits_{S^0} A_{11}(s)A_{11}^{\mathrm{T}}(s)ds, \quad \overline{P}_0 = \overline{A}_{11}\overline{A}_{11}^{\mathrm{T}},$$

$$A_{v0} = \int\limits_{S^0} A_{11}(s)v_0(s)ds$$

находим [2], что решениями (21), (22) будут

$$f_0(s) = A_{11}^{\mathrm{T}}(s)P_0^+(U_0 - A_{v0}) + v_0(s),$$

$$\overline{f}_0 = \overline{A}_{11}{}^{\mathrm{T}}\,\overline{P_0}{}^+(U_0 - \overline{A}_{11}\overline{v}_0) + \overline{v}_0$$

при произвольных интегрируемой в S^0 вектор-функции $v_0(s)$ и 3 M_0-мерном векторе $\overline{v}_0$.

Условия точности и однозначности математических моделей динамики трехмерных упругих тел

В заключение еще раз подчеркнем, что математические модели (11)–(12), (15)–(16), (19)–(20) являются интегральным обращением дифференциальных уравнений Ляме (1), которые с начально-краевыми наблюдениям (4), (5) за начальными (при наличии начальных возмущений) и краевыми (при ограниченности пространственной области тела) состояниями упругого тела согласуются по среднеквадратическим критериям (13)–(14), (17)–(18) и (21)–(22).

При этом:

1) для моделей (11)–(12) динамики (на временном интервале $[0, \mathrm{T}]$) пространственно-ограниченного поверхностью Γ упругого тела

$$\varepsilon^2_{(11)} = \min_{u(s)} \Phi = \min_{f_0(s),\, f_\Gamma(s)} \Phi = U^{\mathrm{T}}U - U^{\mathrm{T}}PP^{+}U,$$

$$\varepsilon^2_{(12)} = \min_{u(s)} \Phi = \min_{\overline{f_0,\, f_\Gamma}} \Phi = U^{\mathrm{T}}U - U^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\overline{P}^{+}U;$$

2) для моделей (15)–(16) установившейся динамики пространственно-ограниченного упругого тела

$$\varepsilon^2_{(15)} = \min_{u(s)} \Phi_\Gamma = \min_{f_\Gamma(s)} \Phi_\Gamma = U_\Gamma^{\mathrm{T}}U_\Gamma - U_\Gamma^{\mathrm{T}}P_\Gamma P_\Gamma^{+}U_\Gamma,$$

$$\varepsilon^2_{(16)} = \min_{u(s)} \Phi_\Gamma = \min_{\overline{f_\Gamma}} \Phi_\Gamma = U_\Gamma^{\mathrm{T}}U_\Gamma - U_\Gamma^{\mathrm{T}}\overline{P}_\Gamma \overline{P}_\Gamma^{+}U_\Gamma;$$

3) для моделей (19)–(20) динамики (на временном интервале $[0, T]$) пространственно-неограниченного упругого тела

$$\varepsilon^2_{(19)} = \min_{u(s)} \Phi_0 = \min_{f_0(s)} \Phi_0 = U_0^{\mathrm{T}}U_0 - U_0^{\mathrm{T}}P_0 P_0^{+}U_0,$$

$$\varepsilon^2_{(20)} = \min_{u(s)} \Phi_0 = \min_{\overline{f_0}} \Phi_0 = U_0^{\mathrm{T}}U_0 - U_0^{\mathrm{T}}\overline{P}_0 \overline{P}_0^{+}U_0.$$

Построенные выше модели (11)–(12), (15)–(16), (19)–(20) будут однозначно описывать динамику ограниченного (модели (11)–(12), (15)–(16)) и неограниченного (модели (19)–(20)) по пространственным координатам в установившемся (модели (15)–(16)) режиме и на временном интервале $[0, T]$ (модели (11)–(12), (19)–(20)) рассматриваемого упругого тела (модели (11)–(12), (15)–(16)) и неограниченной упругой среды (модели (19)–(20)) при большем нуля определителе матриц P (модель (11)), $\overline{P}$ (модель (12)), P_Γ (модель (15)), $\overline{P}_\Gamma$ (модель (16)), P_0 (модель (19)), $\overline{P}_0$ (модель (20)) соответственно.

Заключение

Решена сложная математическая задача построения математических моделей динамики трехмерного упругого тела с произвольной геометрией его поверхности и неполно определенной информацией как о состоянии этой поверхности, так и о начальном состоянии тела вообще. Рассмотрены случаи неограниченности пространственной области тела и неопределенности его динамики от начальных возмущений.

Построенные математические модели являются решениями классически известных дифференциальных математических моделей Ляме и за среднеквадратическим критерием согласованы с дифференциально определенными начально-краевыми наблюдениями за состоянием упругого тела при произвольной структуре и количестве последних. В работе выполнена оценка точности построенных моделей и сформулированы условия их однозначности.

В.А. Стоян, С.Т. Даниш

ПРО МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ТРИВИМІРНИХ ПРУЖНИХ ТІЛ. ЧАСТИНА 2. ТІЛА З ДИСКРЕТНО СПОСТЕРЕЖУВАНИМ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИМ СТАНОМ

На базі інтегрального представлення розв'язку диференціальної математичної моделі усталеної динаміки просторово необмеженого пружного середовища в формі Ляме побудовано інтегральну математичну модель початково-крайової задачі динаміки пружного тіла довільної геометричної конфігурації з довільними початково-крайовими умовами для нього. Розглянуто випадки як просторової необмеженості тіла, так і часового інтервалу, на якому його динаміка моделюється. Побудовані математичні моделі, точно задовольняючи класичним математичним моделям тривимірної теорії пружності, за середньоквадратичним критерієм узгоджуються зі спостереженнями за його початково-крайовим станом. Оцінюється середньоквадратична точність моделювання початково-крайових спостережень за об'єктом моделювання, які задаються при цьому в дискретно визначених поверхнево-часових точках. Записуються умови однозначності виконаного в роботі математичного моделювання.

V.A. Stoyan, S.T. Danysh

ON MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMICS OF THREE-DIMENSIONAL ELASTIC BODIES. PART 2. BODIES WITH DISCRETELY OBSERVABLE INITIAL BOUNDARY CONDITION

Based on the integral representation of differential mathematical model's solution of determined dynamics of spatially infinite elastic medium in the form of Lame system an integral mathematical model of the initial boundary problem of elastic body dynamics of arbitrary geometric configuration with arbitrary initial boundary conditions is constructed for it. The cases of both spatial infinite state of the body and time interval, due to which its dynamics is modelled, are considered. Constructed mathematical models, exactly satisfying classical mathematical models of three dimensional theory of elasticity, according to the root-meen square criteria, are aqreed with observations of its initial boundary state. Root-meen square accuracy of modeling initial boudary observations of modeled object is estimated. Thus these observations are defined in discretely determined surface-time points. Conditions of uniqueness of researched mathematical modelling are also noted in this paper.

1. *Стоян В.А., Даниш С.Т.* О математических моделях динамики трехмерных упругих тел. Часть 1. Тела с непрерывно наблюдаемым начально-краевым состоянием // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2017. — № 2. — С. 37–44.
2. *Стоян В.А.* Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — Київ. : ВПЦ «Київський університет», 2011. — 320 с.
3. *Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б.* Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. — Київ : Сталь, 2008. — 316 с.
4. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. — М. : Гостехиздат, 1955. — 492 с.
5. *Стоян В.А., Двірничук К.В.* До побудови інтегрального еквівалента лінійних диференціальних моделей // Доповіді НАН України. — 2012. — № 9. — С. 36–43.

Получено 21.12. 2016

Статья представлена к публикации членом редколлегии доктором техн. наук Ф.Г. Гаращенко.