УДК 517.5

Ю.И. Харкевич

О ПРИБЛИЖЕНИИ КВАЗИГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ИХ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА ПУАССОНА

Введение

Зачастую для вычисления определенной каким-либо образом величины необходимо чрезвычайно большое число действий, что делает их выполнение практически невозможным. Поэтому может быть применен какой-либо иной метод получения дополнительной информации об этой величине, позволяющий найти ее решение хотя бы приближенно. В этом случае целесообразно использовать методы и подходы теории приближения функций, а именно асимптотические оценки и разложения. Теория приближения функций имеет важное значение, поскольку позволяет практически вычислять функции и приближенно заменять сложные функции более простыми.

В 30-е годы XX века одним из важнейших достижений в теории приближения функций следует считать появление нового типа задач, которые в дальнейшем были названы экстремальными. Родоначальником этого направления был А.Н. Колмогоров. В дальнейшем существенный вклад в его развитие был сделан С.М. Никольским, Б. Надем, В.К. Дзядыком, Н.П. Корнейчуком, С.Б. Стечкиным, А.В. Ефимовым, С.А. Теляковским, А.И. Степанцом, А.Ф. Тиманом, В.П. Моторным, М.Ф. Тиманом, В.Ф. Бабенком, И.А. Шевчуком, А.С. Романюк, А.С. Сердюком и др.

Данная работа посвящена одной из таких задач, а именно исследованию аппроксимативных свойств интегралов типа Пуассона на классах квазигладких функций в равномерной метрике.

Решение экстремальных задач такого типа имеет практическую ценность при построении математических моделей и прогнозировании сложных систем, а также в теории хранения, передачи и поиска информации.

1. Постановка задачи

Согласно [1] рассмотрим интеграл типа Пуассона

$$P_{s,q}(r,f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,K(r,t)\,dt, \quad 0\le r<1,\ -\pi\le x\le\pi, \tag{1}$$

где

$$K(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(1+sk(1+r)(1-r)^{q})\,r^{k}\cos kt, \quad 0\le s\le\frac{1}{2},\ q\ge 1, \tag{2}$$

— ядро интеграла типа Пуассона.

Отметим, что в случае $s = 0$ из (1) и (2) получим интеграл Абеля–Пуассона [2, 3]

$$A(r, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt \right) dt, \quad 0 \le r < 1.$$

Если в (1) и (2) положить $s = \frac{1}{2}$, $q = 1$, то будем иметь [4, 5] так называемый бигармонический интеграл Пуассона

$$B(r, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1-r^2) \right) r^k \cos kt \right) dt, \quad 0 \le r < 1.$$

Пусть далее C — пространство 2π-периодических непрерывных функций с нормой

$$\| f \|_C = \max_x | f(x) |.$$

Определение 1 [6]. Множество всех 2π-периодических непрерывных функций, которые равномерно на всей числовой оси удовлетворяют неравенству

$$| f(x+h) - 2f(x) + f(x+h) | \le 2|h|, \tag{3}$$

называют классом квазигладких функций и обозначают H^2.

Следует отметить, что квазигладкие функции [6], с одной стороны, можно рассматривать как обобщение гладких функций, впервые изучаемых еще Риманом в общей теории тригонометрических рядов, и, с другой стороны, как обобщение функций, удовлетворяющих условию Липшица $| f(x+h) - f(x) | \le |h|$.

В [7] показано, что в ряде вопросов (наилучшее приближение, дробное дифференцирование и интегрирование, теория сопряженных функций, тригонометрические ряды) этот класс квазигладких функций H^2 в известном смысле является более естественным, чем класс функций, удовлетворяющих условию Липшица.

В течение последних десятилетий наблюдается тесная взаимосвязь теории приближения с другими направлениями математики, особенно прикладного характера. В частности, интересным является вопрос о приближении одних математических объектов другими, как правило, более простой природы, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых известны, а также вопросы оценки погрешностей таких приближений.

В связи с этим представляет известный интерес приближение квазигладких функций их интегралами типа Пуассона (1), а именно, исследование асимптотического поведения величины

$$\mathrm{E}(H^2; P_{s,q}(r))_C = \sup_{f \in H^2} \left\| f(x) - P_{s,q}(r, f, x) \right\|_C. \tag{4}$$

Определение 2 [8, с. 198]. Если в явном виде найдена функция $\varphi(1-r)$, такая, что при $r \to 1-0$ можно записать асимптотическое равенство

$$\mathrm{E}(H^2; P_{s,q}(r))_C = \varphi(1-r) + o(\varphi(1-r)),$$

говорят что, решена задача Колмогорова–Никольского для интеграла типа Пуассона и класса H^2 в метрике пространства C.

Определение 3 [9]. Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(1-r)$ называется полным асимптотическим разложением или полной асимптотикой функции $f(r)$ при $r \to 1-0,$ если для всех $n \in \mathrm{N}$

$$\left|g_{n+1}(1-r)\right| = o\left(\left|g_n(1-r)\right|\right)$$

и при любом $m \in \mathrm{N}$

$$f(r) = \sum_{n=0}^{m} g_n(1-r) + o(g_m(1-r)), \ \ r \to 1-0.$$

Кратко запишем это следующим образом:

$$f(r) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(1-r).$$

Аппроксимативные свойства как интегралов Абеля–Пуассона, так и бигармонических интегралов Пуассона достаточно хорошо изучены в [10–16] и [17–22] соответственно.

Таким образом, главной целью данной работы является нахождение полного асимптотического разложения для величины (4) по степеням $(1-r)$ при $r \to 1-0,$ которое позволяет выписывать константы Колмогорова–Никольского произвольно высокого порядка малости.

2. Приближение квазигладких функций интегралами типа Пуассона

В принятых выше обозначениях имеет место теорема.

Теорема. При $r \to 1-0$ выполняется полное асимптотическое разложение

$$\mathrm{E}(H^2; P_{s,q}(r))_C \cong \frac{2s}{\pi}(1-r)^q \left(\ln\frac{1}{4} + (1+\ln 2)(1-r) + (1-r)\ln\frac{1}{1-r} + \right.$$

$$\left. + \ln(1-r)^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1-r)^k}{k(k-1)2^{k-1}} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}(1-r)^k \ln\frac{1}{1-r} + \gamma_k (1-r)^k \right),$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right), \ \ k = 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Убедимся сначала в том, что $K(r,t) \ge 0.$ Для этого запишем ядро типа Пуассона (2) в виде

$$K(r,t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [1 + sk(1+r)(1-r)^q] r^k \cos kt =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt + s(1+r)(1-r)^q \sum_{k=1}^{\infty} kr^k \cos kt.$$

Так как для первого слагаемого из правой части последнего равенства выполняется равенство

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t + r^2)} \tag{5}$$

(формула (1.447.3) из [23]), найдем аналогичное равенство и для суммы $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k \cos kt.$

Используя формулу (1.447.1) из [23], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin kt = \frac{r\sin t}{1-2r\cos t + r^2}.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по t, в результате чего получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k \cos kt = \frac{r\cos t + r^3\cos t - 2r^2}{(1-2r\cos t + r^2)^2}. \tag{6}$$

Таким образом, на основании соотношений (5) и (6) имеем

$$K(r,t) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t + r^2)} + s(1+r)(1-r)^q \frac{r\cos t + r^3\cos t - 2r^2}{(1-2r\cos t + r^2)^2} =$$

$$= \frac{(1-r^2)(1-2r\cos t + r^2) + 2s(1+r)(1-r)^q (r\cos t + r^3\cos t - 2r^2)}{(1-2r\cos t + r^2)^2}.$$

Так как знаменатель дроби из правой части последнего равенства всегда положительный, проанализируем его числитель. Первое слагаемое числителя

$$(1-r^2)(1-2r\cos t + r^2) = (1-r^2)(1-2r\cos t + r^2\cos^2 t - r^2\cos^2 t + r^2) =$$

$$= (1-r^2)((1-r\cos t)^2 + r^2(1-\cos t)) = (1-r^2)((1-r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t) > 0,$$

поэтому, показав, что вторая слагаемое числителя меньше первого, можем сделать вывод, что числитель также будет положительным. Этот факт вытекает из следующих соображений.

Необходимо показать, что

$$2s(1+r)(1-r)^q (r\cos t + r^3\cos t - 2r^2) < (1-r^2)(1-2r\cos t + r^2). \tag{7}$$

Так как $2s \le 1$ и $(1+r)(1-r)^q = (1-r^2)(1-r)^{q-1} \le (1-r^2)$, для доказательства (7) достаточно убедиться в справедливости следующего неравенства: $r\cos t + r^3\cos t - 2r^2 <$ $< 1-2r\cos t + r^2$ или $1-3r\cos t - r^3\cos t + 3r^2 > 0$.

Действительно, $1-3r\cos t - r^3\cos t + 3r^2 \ge 1-3r+3r^2-r^3 = (1-r)^3 > 0,\ r\in(0,1)$.

Итак, $K(r,t) > 0,\ r\in(0,1)$. А поскольку $K(0,t) = \frac{1}{2} > 0$, получаем, что $K(r,t) > 0$ при всех $0 \le r < 1$.

Также нетрудно убедиться в том, что $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(r,t)\,dt = 1$.

Учитывая (1) и предыдущее равенство, запишем $f(x) - P_{s,q}(r,f,x) =$ $= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t))\,K(r,t)\,dt$. Далее, используя свойства определенного интеграла и положительность ядра (2), имеем

$$\left|f(x) - P_{s,q}(r,f,x)\right| \le \int_0^{\pi} \left|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\right| K(r,t)\,dt.$$

Отсюда, используя (4) и (3), получаем оценку

$$\mathrm{E}(H^2; P_{s,q}(r))_C \le 2\int_0^{\pi} tK(r,t)\,dt. \tag{8}$$

Кроме того, запишем $\mathrm{E}(H^2; P_{s,q}(r))_C = \sup\limits_{f\in H^2}\left\| f(0) - P_{s,q}(r, f, 0)\right\|_C$, и так как в классе квазигладких функций H^2 существует функция периода 2π, равная $|t|$ на отрезке $[-\pi; \pi]$, которая предыдущее неравенство (8) обращает в равенство, то

$$\mathrm{E}(H^2; P_{s,q}(r))_C = 2\int\limits_0^\pi tK(r, t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi t\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^\infty (1 + sk(1+r)(1-r)^q)\, r^k \cos kt\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi t\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^\infty r^k \cos kt\right)dt + \frac{2}{\pi}s(1+r)(1-r)^q \int\limits_0^\pi t\left(\sum_{k=1}^\infty kr^k \cos kt\right)dt. \qquad (9)$$

В [10] показано, что для первого интеграла из правой части равенства (9) при $r \to 1-0$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\int\limits_0^\pi t\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^\infty r^k \cos kt\right)dt = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{k}(1-r)^k \ln\frac{1}{1-r} + \gamma_k (1-r)^k\right), \qquad (10)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right),\ \ k = 1, 2, \ldots .$$

Преобразуем второй интеграл из правой части равенства (9)

$$\int\limits_0^\pi t\left(\sum_{k=1}^\infty kr^k \cos kt\right)dt = \sum_{k=1}^\infty kr^k \int\limits_0^\pi t\cos kt dt = -2\sum_{j=1}^\infty \frac{r^{2j-1}}{2j-1}.$$

Используя формулу (1.513.1) из [23]

$$\ln\frac{1+r}{1-r} = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k-1}r^{2k-1},$$

имеем

$$s(1+r)(1-r)^q \int\limits_0^\pi t\left(\sum_{k=1}^\infty kr^k \cos kt\right)dt = -s\,(1+r)(1-r)^q \ln\frac{1+r}{1-r} =$$

$$= s(1-r)^q (1+r)(\ln(1-r) - \ln(1+r)) =$$

$$= s(1-r)^q ((2-(1-r))\ln(1-r) - (1+r)\ln(1+r)). \qquad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в правую часть (9), получим

$$\mathrm{E}(H^2; P_{s,q}(r))_C = \frac{2s}{\pi}(1-r)^q (2\ln(1-r) - (1-r)\ln(1-r) - (1+r)\ln(1+r)) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{k}(1-r)^k \ln\frac{1}{1-r} + \gamma_k (1-r)^k\right),\ \ r \to 1-0. \qquad (12)$$

Далее, разложив функцию $\varphi(r) = -(1+r)\ln(1+r)$ в ряд Тейлора по степеням $(1-r)$, имеем

$$-(1+r)\ln(1+r) = -2\ln 2 + (1+\ln 2)(1-r) - \sum_{k=2}^\infty \frac{(1-r)^k}{k(k-1)2^{k-1}}.$$

Выполнив необходимые тождественные преобразования в квадратных скобках выражения (12), находим

$$2\ln(1-r)-(1-r)\ln(1-r)-(1+r)\ln(1+r)=\ln(1-r)^2+$$

$$+(1-r)\ln\frac{1}{(1-r)}+\ln\frac{1}{4}+(1+\ln 2)(1-r)-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-r)^k}{k(k-1)2^{k-1}}.$$

Подставив последнее соотношение в формулу (12), получим утверждение теоремы.

Замечание. Отметим, что при $s=0$ из доказанной выше теоремы получим уже известный результат [10], а в случае $s=\frac{1}{2}$ и $q=1$ будем иметь результат из [17].

Заключение

Основной результат данной работы состоит в нахождении полных асимптотических разложений точных верхних граней приближений интегралами типа Пуассона на классах квазигладких функций H^2 в равномерной метрике. Таким образом, решена одна из экстремальных задач теории аппроксимации функций действительного переменного. Такие задачи можно эффективно использовать при составлении математических моделей и исследовании их поведения в ходе решения задач оптимального управления различными сложными механическими, физическими и экономическими процессами.

Ю.І. Харкевич

ПРО НАБЛИЖЕННЯ КВАЗІГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ЇХ ІНТЕГРАЛАМИ ТИПУ ПУАССОНА

Досліджено питання про наближення квазігладких функцій їх інтегралами типу Пуассона. Розв'язання цієї проблеми знаходить своє застосування в різних розділах прикладної математики, зокрема, в теорії прогнозування і прийняття рішень, в математичному моделюванні складних технічних і економічних систем, при розгляді задач оптимального керування, при побудові чисельних алгоритмів, а також при стисненні інформації. Отримано повні асимптотичні розклади степенями $(1-r)$ точних верхніх граней відхилень квазігладких функцій від їх інтегралів типу Пуассона в рівномірній метриці.

Yu.I. Kharkevych

ON APPROXIMATION OF THE QUASI-SMOOTH FUNCTIONS BY THEIR POISSON-TYPE INEGRALS

The question of the approximation of quasi-smooth functions by their Poisson type integrals is studied. The solution of this problem finds its application in various branches of applied mathematics, in particular, in the theory of forecasting and decision-making, in the mathematical modeling of complex technical and economic systems, in the analysis of optimal control problems, in the construction of numerical algorithms, and in the compression of information. Here we find complete asymptotic expansions in powers $(1-r)$ of the exact upper bounds of deviations of quasi-smooth functions from their Poisson-type integrals in the uniform metric

1. *Gonzales L., Keller E., Wildenhain G.* Uber das randverhalten des poisson-integrals des polyharmonischen gleichung // Math. Nachr. — 1980. — **95**. — P. 157–164.
2. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2009. — **61**, N 1. — P. 86–98.
3. Baskakov V.A. Some properties of operators of Abel-Poisson type // Mathematical Notes. — 1975. — **17**, N 2. — P. 101–107.
4. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2012. — **63**, N 12. — P. 1820–1844.
5. *Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2007. — **59**, N 8. — P. 1224–1237.
6. *Тимман А.Ф.* О квазигладких функциях // Изв. АН СССР. Сер. Матем. — 1951. — **15**, № 3. — С. 243–254.
7. *Zygmund A.* Smooth function // Duke Math. J. — 1945. — **12**, N 1. — P. 47–76.
8. *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
9. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2002. — **54**, N 9. — P. 1462–1470.
10. *Stark E.L.* The complete asymptotic expansion for the measure of approximation of Abel-Poisson's singular integral for $\mathrm{Lip}\,1$ // Mathematical Notes. — 1973. — **13**, N 1. — P. 14–18.
11. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2000. — **52**, N 7. — P. 1113–1117.
12. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals // Ibid. — 2004. — **56**, N 9. — P. 1509–1525.
13. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators // Ibid. — 2005. — **57**, N 8. — P. 1297–1315.
14. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric // Ibid. — 2009. — **61**, N 11. — P. 1757–1779.
15. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric // Ibid. — 2009. — **61**, N 12. — P. 1893–1914.
16. *Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A.* Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}H^{\alpha}$ // Mathematical Notes. — 2014. — **96**, N 5-6. — P. 1008–1019.
17. *Фалалеев Л.П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Материалы всесоюз. симп. — Алма-Ата : Наука, 1976. — С. 163–167.
18. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of function from class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric // Ukr. Math. J. — 2008. — **60**, N 5. — P. 769–798.
19. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson intrgrals // Ibid. — 2009. — **61**, N 3. — P. 399–413.
20. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson intrgrals // Ibid. — 2011. — **63**, N 7. — P. 1083–1107.
21. *Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu. I.* Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_{\beta}H^{\alpha}$ // Ibid. — 2017. — **68**, N 11. — P. 1727–1740.
22. *Жигалло Т.В., Харкевич Ю.І.* Апроксимативні властивості бігармонічних операторів Пуассона на класах $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 5. — С. 650–656.
23. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.

Получено 26.06.2017

Статья представлена к публикации членом редколлегии доктором физ.-мат. наук И.М. Черевко.