УДК 519.216

Т.А. Алиев, Н.Ф. Мусаева, Б.И. Газызаде

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ЗАШУМЛЕННОГО ПРОЦЕССА ПУТЕМ КОРРЕКЦИИ ЗАКОНА ЕГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введение

Известно, что определение скрытого периода изменения технического состояния большинства процессов невозможно предсказать заранее из-за влияния случайных факторов, воздействующих на процесс. Также известно, что технологические процессы, протекающие в объектах контроля, мониторинга, диагностики, прогноза, управления и т.д., представляют собой случайные процессы и состоят из случайных зашумленных сигналов, поступающих от соответствующих датчиков [1].

В большинстве случаев в этих объектах исследуемые процессы $X(t)$, будучи сами случайными, протекают под действием аддитивных возмущений $\mathrm{E}(t)$, т.е. помех (или шумов), которые также носят случайный характер. Поэтому реальный случайный процесс $G(t)$ представляется суммой случайной полезной составляющей $X(t)$ и случайной помехи $\mathrm{E}(t)$: $G(t) = X(t) + \mathrm{E}(t)$.

При этом для многих технических объектов полезная составляющая $X(t)$ зависит от текущего технического состояния исследуемого процесса. Шумы $\mathrm{E}(t)$, которые возникают на ранней стадии появления дефектов, позволяют определить степень развития этих неисправностей [2]. Например, для штанговых насосных глубинных установок (ШГНУ) при появлении таких неисправностей, как прихват плунжера, утечка нагнетательного клапана (УНК) и труб, утечка приемного клапана (УПК), течь в насосных трубах, ослабление, приводящее к обрыву штанг, при явно выраженном виде дефекта меняется форма полезного сигнала $X(t)$. В то же время на начальной стадии перечисленных неисправностей появляется помеха, которая отражает в себе степень развития этого дефекта. При этом контроль за развитием степени неисправности — важная задача, так как позволяет определить момент, когда еще необязательно останавливать весь производственный процесс, но уже следует провести определенные ремонтные работы. Эта проблема — актуальна для таких технических объектов, как ШГНУ, компрессорная станция и т.д. В таких случаях для анализа исследуемого случайного процесса $G(t)$ нужно построить его вероятностную модель, которая будет состоять из вероятностной модели случайной полезной составляющей $X(t)$ и вероятностной модели случайной помехи $\mathrm{E}(t)$.

При этом известно, что каждый стационарный случайный процесс можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией гармонических колебаний со случайной амплитудой, фазой и постоянной частотой [3]. В то же время случайные сигналы, которые поступают от датчиков, установленных для получения информации о ходе протекания исследуемого процесса, нельзя однозначно охарактеризовать совокупностью таких параметров, как амплитуда, частота и фаза. Для построения модели случайного процесса необходимо знать вероятностные характеристики помехи $\mathrm{E}(t)$ и полезной составляющей $X(t)$, в частности математические ожидания, дисперсии, средние квадратические отклонения, начальные и центральные моменты, законы распределения [4–8]. Однако в условиях зашумленности невозможно отделить характеристики случайной полезной составляющей $X(t)$ и помехи $\mathrm{E}(t)$ от характеристик зашумленного процесса $G(t)$, что создает определенные трудности для построения вероятностной модели исследуемого процесса. В таких случаях традиционно вычисляются характеристики только зашумленного процесса $G(t)$, а шумы, если известна природа их возникновения, стараются устранить или отфильтровать [9–10].

В последние годы для анализа характеристик помехи зашумленного процесса разработаны методы вычисления дисперсии и среднего квадратического отклонения шума $\mathrm{E}(t)$ [4–8]. Однако использование только этих статистических характеристик недостаточно для построения полной вероятностной модели исследуемого случайного процесса $G(t)$. Вероятностная модель случайного процесса $G(t)$ может считаться исчерпывающей, если известны функции плотности распределения $f(x,t)$ полезной составляющей $X(t)$ и функции плотности распределения $f(\varepsilon,t)$ шума $\mathrm{E}(t)$. При исследовании закона распределения случайного процесса обычно ограничиваются рассмотрением одномерного закона распределения, который достаточно полно характеризует случайный процесс с независимыми значениями [11, 12]. В теории анализа случайных процессов для вычисления функции плотности распределения существуют соответствующие формулы. Однако для их практического применения необходимо знать дискретные значения полезной составляющей $X(t)$ и аддитивного случайного шума $\mathrm{E}(t)$, которые бывают неизвестны.

Предлагаемая работа посвящена построению вероятностной модели зашумленного случайного процесса $G(t)$, состоящего из шума $\mathrm{E}(t)$ и полезной составляющей $X(t)$, в результате определения параметров, а затем и самих функций плотности распределения $f(x,t)$ и $f(\varepsilon,t)$.

1. Постановка задачи

Наблюдается случайный стационарный эргодический зашумленный технологический процесс $G(t)$, состоящий из суммы случайной полезной составляющей $X(t)$ и случайной помехи $\mathrm{E}(t)$, которые также являются стационарными эргодическими и их невозможно выделить из $G(t)$. Случайный процесс $G(t)$ несет в себе информацию об одном исследуемом технологическом параметре.

Для случайного процесса $G(t)$ можно вычислить такие характеристики, как математическое ожидание m_G, дисперсию D_G, среднее квадратическое отклонение σ_G, корреляционную функцию $R_{GG}(\tau)$ по формулам:

$$m_G = \frac{1}{T}\int_0^T G(t)dt, \tag{1}$$

$$D_G = \frac{1}{T}\int_0^T (G(t)-m_G)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{G}{}^2(t)dt, \tag{2}$$

$$\sigma_G = \sqrt{D_G}, \tag{3}$$

$$R_{GG}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+\tau)dt, \tag{4}$$

где $\overset{\circ}{G}(t) = G(t) - m_G$, $\tau = 0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ 3\Delta t,\ \ldots,$ — временной сдвиг.

При этом априори известно, что полезная составляющая $X(t)$ характеризует текущее техническое состояние исследуемого процесса, шумы $\mathrm{E}(t)$ возникают на ранней стадии при появлении различных неисправностей, например, износы, коррозии, трещины, поломки и др. неисправности оборудования, устройства, конструкций, двигателя, механизма, мотора и т.д. [4–8] и отражают в себе степень развития дефекта.

Из специфики технологического процесса априори известно, что полезная составляющая $X(t)$ подчиняется нормальному закону распределения с плотностью $N(x;m_X,\sigma_X)$, помеха $\mathrm{E}(t)$ также имеет нормальное распределение с плотностью $N(\varepsilon;m_\mathrm{E},\sigma_\mathrm{E})$ и нулевым средним $m_\mathrm{E}=0$. Перечисленные условия выполняются в системах мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, управления, идентификации и т.д. в нефтепереработке, нефтехимии, нефтедобычи и т.д. [4–8].

При этом известно, что многомерный закон является весьма полной характеристикой случайного процесса. Однако определить его и практически использовать весьма сложно. Поэтому, учитывая, что $X(t)$ и $\mathrm{E}(t)$ — стационарные эргодически процессы с нормальным законом распределения, знания таких числовых характеристик, как математическое ожидание m_X, средние квадратические отклонения σ_X, σ_E, функции плотности одномерного нормального распределения $N(x;m_X,\sigma_X)$, $N(\varepsilon;m_\mathrm{E},\sigma_\mathrm{E})$, достаточно для решения таких практических задач: контроль, мониторинг, диагностика, идентификация, управление и т.д. [13].

Поскольку стационарные случайные процессы $X(t)$, $\mathrm{E}(t)$ эргодические, то математическое ожидание m_X и средние квадратические отклонения σ_X, σ_E имеют одно и то же значение для любой случайной функции, входящей в совокупность. Поэтому функции плотности нормального распределения полезной составляющей $X(t)$ и помехи $\mathrm{E}(t)$ можно представить в виде:

$$N(x;m_X,\sigma_X)=N(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \tag{5}$$

$$N(\varepsilon;m_\mathrm{E},\sigma_\mathrm{E})=N(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma_\mathrm{E}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\varepsilon-m_\mathrm{E})^2}{2\sigma_\mathrm{E}^2}}. \tag{6}$$

Учитывая условие $m_\mathrm{E}=0$, получаем

$$N(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma_\mathrm{E}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\mathrm{E}^2}}. \tag{7}$$

Из формул очевидно, что для определения функций плотности распределения $N(x)$, $N(\varepsilon)$ полезной составляющей $X(t)$ и помехи $\mathrm{E}(t)$ необходимо знание средних квадратических отклонений σ_X, σ_E и математического ожидания m_X. Это позволит по виду функции плотности распределения $N(x)$ полезной составляющей $X(t)$ определить изменения в текущем состоянии исследуемого процесса, а по виду функции плотности распределения $N(\varepsilon)$ помехи $\mathrm{E}(t)$ — степень развития этой неисправности.

ISSN 0572-2691

Если составить множество информативных признаков, элементами которой являются математическое ожидание m_X, средние квадратические отклонения σ_X, σ_{E}, функции плотности нормального распределения $N(x)$, $N(\varepsilon)$, вероятности попадания в интервалы часто встречающихся, наиболее вероятных и маловероятных значений:

1) $m_X - \sigma_X \le X(t) \le m_X + \sigma_X$, $m_X - 2\sigma_X \le X(t) \le m_X - \sigma_X$, $m_X + \sigma_X \le X(t) \le$ $\le m_X + 2\sigma_X$, $m_X - 3\sigma_X \le X(t) \le m_X - 2\sigma_X$, $m_X + 2\sigma_X \le X(t) \le m_X + 3\sigma_X$,

2) $-\sigma_{\mathrm{E}} \le \mathrm{E}(t) \le \sigma_{\mathrm{E}}$, $-2\sigma_{\mathrm{E}} \le \mathrm{E}(t) \le -\sigma_{\mathrm{E}}$, $\sigma_{\mathrm{E}} \le \mathrm{E}(t) \le 2\sigma_{\mathrm{E}}$, $-3\sigma_{\mathrm{E}} \le \mathrm{E}(t) \le -2\sigma_{\mathrm{E}}$, $2\sigma_{\mathrm{E}} \le \mathrm{E}(t) \le 3\sigma_{\mathrm{E}}$,

то по комбинациям их значений можно оценить текущее состояние, а также степень развития неисправности технического объекта. Поэтому ниже предлагается технология построения вероятностной модели исследуемого процесса в результате вычисления перечисленных характеристик.

2. Технология построения вероятностной модели нормально распределенной помехи

Ниже показано, как определить функцию плотности нормально распределенной случайной стационарной эргодической помехи $\mathrm{E}(t)$.

Наблюдается инфра низкочастотный медленно протекающий технологический процесс $G(t)$, который является случайным стационарным эргодическим и зашумлен помехой $\mathrm{E}(t)$, возникшей в результате появления таких неисправностей, как износ, коррозия, нагарообразование и т.д. Характеристики зашумленного процесса $G(t)$ можно вычислить по выражениям (1)–(4).

При этом помеха $\mathrm{E}(t)$ формируется из высокочастотных спектров и имеет более высокий спектр, чем сама полезная составляющая $X(t)$. Шаг дискретизации Δt зашумленного процесса $G(t)$ выбран, исходя из спектра помехи $\mathrm{E}(t)$, т. е. $\Delta t = 1/2\omega_{\mathrm{E}}$, где ω_{E} — частота среза помехи. Так что значение полезной составляющей за промежуток времени Δt на достаточно длительном интервале наблюдения T (например, 30–50 ч, а Δt — секунды или минуты) не успевает измениться и $X(t+\Delta t)$ совпадает со значением $X(t)$, т. е.

$$X(t+\Delta t) = X(t). \tag{8}$$

Поскольку помеха имеет нулевое математическое ожидание $m_{\mathrm{E}} = 0$ и некоррелирована с полезной составляющей $X(t)$, то их корреляционные функции $R_{X\mathrm{E}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{X}(t)\mathrm{E}(t+\tau)dt$, $R_{\mathrm{E}X}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{E}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)dt$ при любом временном сдвиге $\tau = 0$, Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, … равны нулю:

$$R_{X\mathrm{E}}(\tau) = 0,\ R_{\mathrm{E}X}(\tau) = 0. \tag{9}$$

Тогда для указанных производственных объектов при выполнении условия (8) отношение $\frac{R_{XX}(\tau = \Delta t)}{R_{XX}(0)}$ равно единице, т. е. [7, 8] $R_{XX}(\tau = \Delta t) = R_{XX}(0)$.

В идеальном случае теоретически считается, что случайная помеха $\mathrm{E}(t)$ является белым шумов и ее корреляционная функция $R_{\mathrm{EE}}(\tau)$ представляет собой δ-функцию [3, 7, 8], т. е.

$$R_{EE}(\tau)=\begin{cases}R_{EE}(\tau=0) & \text{при } \tau=0,\\ 0 & \text{при } \tau\neq 0.\end{cases} \quad (10)$$

При этих условиях для значений корреляционной функции $R_{GG}(\tau)$ при $\tau=0$ и $\tau=\Delta t$ имеем: $R_{GG}(\tau=0)=R_{XX}(\tau=0)+R_{EE}(\tau=0)$ или

$$D_G=D_X+D_E, \quad (11)$$

$$R_{GG}(\tau=\Delta t)=R_{XX}(\tau=\Delta t), \quad (12)$$

где D_G, D_X, D_E — дисперсии зашумленного сигнала $G(t)$, полезной составляющей $X(t)$ и помехи $E(t)$ соответственно.

Тогда величину дисперсии помехи можно вычислить по выражению [4–8]

$$D_E^*=R_{GG}(\tau=0)-R_{GG}(\tau=\Delta t) \quad (13)$$

или

$$D_E^*=R_{EE}^*(\tau=0)=\frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t)dt-\frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(\tau=\Delta t)dt. \quad (14)$$

Таким образом, выведена формула вычисления дисперсии помехи для идеального случая, соответствующего условию (10).

Однако в ранних работах [4–6] была выведена следующая формула вычисления дисперсии помехи для реальных технологических процессов:

$$D_E^* = R_{GG}(\tau=0) - 2R_{GG}(\tau=\Delta t)+R_{GG}(\tau=2\Delta t). \quad (15)$$

Отсюда следует, что среднее квадратическое отклонение σ_E^* помехи $E(t)$ можно вычислить для идеального и реального случаев соответственно по выражениям [4–8]:

$$\sigma_E^*=\sqrt{D_E^*}=\begin{cases}\sqrt{R_{GG}(\tau=0)-R_{GG}(\tau=\Delta t)} & \text{для идеального случая,}\\ \sqrt{R_{GG}(\tau=0)-2R_{GG}(\tau=\Delta t)+R_{GG}(\tau=2\Delta t)} & \text{для реального случая.}\end{cases} \quad (16)$$

Тогда функцию плотности нормального распределения $N(\varepsilon, m_E, \sigma_E)$ помехи $E(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$ с математическим ожиданием $m_E=0$ с учетом формулы (7) можно найти по выражению [1, 7, 8]:

$$N^*(\varepsilon)=\frac{1}{\sigma_\varepsilon^*\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\varepsilon^2}{2(\sigma_\varepsilon^*)^2}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\cdot(R_{GG}(0)-R_{GG}(\Delta t))}}\times A1 & \text{для идеального случая,}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\cdot(R_{GG}(\tau=0)-2R_{GG}(\tau=\Delta t)+R_{GG}((\tau=2\Delta t)))}}\times A2 & \text{для реального случая,}\end{cases} \quad (17)$$

где $A1=e^{-\frac{\varepsilon^2}{2(R_{GG}(0)-R_{GG}(\Delta t))}}$, $A2=e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{2\pi\cdot(R_{GG}(\tau=0)-2R_{GG}(\tau=\Delta t)+R_{GG}((\tau=2\Delta t)))}}}$.

Максимум функции плотности распределения $N_{max}(\varepsilon)$ помехи $E(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$ можно найти по выражениям [7,8]:

$$N_{\max}^{*}(0)=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{E}}^{*}\sqrt{2\pi}}=$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\cdot(R_{GG}(0)-R_{GG}(\Delta t))}} & \text{для идеального случая,}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\cdot(R_{GG}(\mu=0)-2R_{GG}(\mu=\Delta t)+R_{GG}(\mu=2\Delta t))}} & \text{для общего случая.}\end{cases}\qquad(18)$$

Используя выражения (13), (15), также можно определить координаты точек перегиба функции плотности нормального распределения $N(\varepsilon)$ помехи $\mathrm{E}(t)$. Известно, что координаты точек перегиба функции плотности нормального распределения $N(\varepsilon)$ определяются по выражениям [1] $\left(m_{\mathrm{E}}-\sigma_{\mathrm{E}};\dfrac{1}{\sigma_{\mathrm{E}}\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(m_{\mathrm{E}}+\sigma_{\mathrm{E}};\dfrac{1}{\sigma_{\mathrm{E}}\sqrt{2\pi e}}\right)$.

С учетом условия $m_{\mathrm{E}}=0$ получаем $\left(-\sigma_{\mathrm{E}};\dfrac{1}{\sigma_{\mathrm{E}}\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(\sigma_{\mathrm{E}};\dfrac{1}{\sigma_{\mathrm{E}}\sqrt{2\pi e}}\right)$ или для идеального случая

$$\left(-\sqrt{(R_{GG}(0)-R_{GG}(\Delta t))};\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e(R_{GG}(0)-R_{GG}(\Delta t)}}\right)\text{ и }\left(\sqrt{(R_{GG}(0)-R_{GG}(\Delta t)};\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e(R_{GG}(0)-R_{GG}(\Delta t)}}\right);$$

для реального случая

$$\left(-\sqrt{(R_{GG}(\tau=0)-2R_{GG}(\tau=\Delta t)+R_{GG}(\tau=2\Delta t))};\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e(R_{GG}(\tau=0)-2R_{GG}(\tau=\Delta t)+R_{GG}(\tau=2\Delta t))}}\right)\text{ и}$$

$$\left(\sqrt{(R_{GG}(\tau=0)-2R_{GG}(\tau=\Delta t)+R_{GG}(\tau=2\Delta t))};\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e(R_{GG}(\tau=0)-2R_{GG}(\tau=\Delta t)+R_{GG}(\tau=2\Delta t))}}\right).$$

Таким образом, построена вероятностная модель помехи $\mathrm{E}(t)$, которая является частью модели зашумленного процесса $G(t)$.

3. Технология построения вероятностной модели нормально распределенной полезной составляющей

Известно, что функцию плотности распределения $N(x)$ нормально распределенной случайной стационарной эргодической полезной составляющей $X(t)$ зашумленного процесса $G(t)$ можно вычислить по выражению (5). Из этой формулы очевидно, что для определения функции плотности распределения $N(x)$ необходимо знать значения параметров распределения, т. е. значения среднего квадратического отклонения σ_X и математического ожидания m_X. Ниже предлагается технология вычисления этих характеристик.

Сначала рассмотрим возможность вычисления дисперсии D_X полезной составляющей $X(t)$. При выполнении условия некоррелированности (9) полезной составляющей $X(t)$ и помехи $\mathrm{E}(t)$ согласно формуле (11) дисперсию полезной составляющей $X(t)$ можно определить по выражению $D_X = D_G - D_\mathrm{E}$.

При этом значение дисперсии D_G зашумленного процесса $G(t)$ вычисляется по выражению (2). Значение же дисперсии помехи $\mathrm{E}(t)$ можно вычислить по выражениям (13)–(15). Тогда $D_X^* = D_G - D_\mathrm{E}^*$ или

$$D_X^* = \begin{cases} R_{GG}(\tau = \Delta t) & \text{для идеального случая,} \\ 2R_{GG}(\tau = \Delta t) - R_{GG}(\tau = 2\Delta t) & \text{для реального случая.} \end{cases}$$

Отсюда можно вычислить среднее квадратическое отклонение σ_x^* полезной составляющей:

$$\sigma_X^* = \sqrt{D_G - D_\mathrm{E}^*} \tag{19}$$

или

$$\sigma_X^* = \sqrt{D_X^*} = \begin{cases} \sqrt{R_{GG}(\tau = \Delta t)} & \text{для идеального случая,} \\ \sqrt{2R_{GG}(\tau = \Delta t) - R_{GG}(\tau = 2\Delta t)} & \text{для реального случая.} \end{cases} \tag{20}$$

Для вычисления математического ожидания m_X примем во внимание, что при сложении двух случайных функций $X(t)$ и $\mathrm{E}(t)$ их математические ожидания складываются [1]. Тогда можно написать $m_G = m_X + m_\mathrm{E}$.

Учитывая, что математическое ожидание m_G зашумленного стационарного эргодического процесса $G(t)$ на интервале наблюдения T всегда можно вычислить по формуле (1), а математическое ожидание помехи $m_\mathrm{E} = 0$, получаем

$$m_X^* = m_G = \frac{1}{T}\int_0^T G(t)dt. \tag{21}$$

Таким образом, определены значения параметров нормального распределения $N(x)$ полезной составляющей $X(t)$, т. е. значения среднего квадратического отклонения σ_X^* и математического ожидания m_X^*.

Тогда функцию плотности стационарной эргодической нормально распределенной полезной составляющей $X(t)$ зашумленного процесса $G(t)$ можно вычислить по выражению

$$N^*(x) = \frac{1}{\sigma_X^*\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_X^*)^2}{2(\sigma_X^*)^2}} \tag{22}$$

или

$$N^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_X^*\sqrt{2\pi \cdot R_{GG}(\tau = \Delta t)}} \times B1 & \text{для идеального случая,} \\ \dfrac{1}{\sigma_X^*\sqrt{2\pi \cdot (2R_{GG}(\tau = \Delta t) - R_{GG}(\tau = 2\Delta t))}} \times B2 & \text{для реального случая,} \end{cases} \tag{23}$$

где $B1 = e^{-\frac{(x-m_X^*)^2}{2R_{GG}(\tau=\Delta t)}}$, $B2 = e^{-\frac{(x-m_X^*)^2}{2(2R_{GG}(\tau=\Delta t)-R_{GG}(\tau=2\Delta t))}}$.

Зная оценку среднего квадратического отклонения σ_X^*, также можно определить максимум функции плотности нормального распределения $N_{\max}(x)$ полезной составляющей $X(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$:

$$N_{\max}(m_X) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}}. \tag{24}$$

С учетом формул (19) и (20) выражение (24) можно представить в виде

$$N_{\max}(m_X^*) = \frac{1}{\sigma_X^* \sqrt{2\pi}} \text{ или}$$

$$N_{\max}(m_G) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot R_{GG}(\tau = \Delta t)}} & \text{для идеального случая,} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \left(2R_{GG}(\tau = \Delta t) - R_{GG}(\tau = 2\Delta t)\right)}} & \text{для реального случая.} \end{cases} \tag{25}$$

Используя выражения (19), (20), также можно определить координаты точек перегиба функции плотности распределения $N(x)$ полезной составляющей $X(t)$. Известно, что при нормальном распределении координаты точек перегиба функции плотности распределения $N(x)$ можно определить по выражениям [1]

$$\left(m_X - \sigma_X; \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi e}}\right) \text{ и } \left(m_X + \sigma_X; \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi e}}\right). \tag{26}$$

С учетом формул (19) и (20) выражение (26) можно представить в виде $\left(m_X^* - \sigma_X^*;\ \frac{1}{\sigma_X^* \sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(m_X^* + \sigma_X^*;\ \frac{1}{\sigma_X^* \sqrt{2\pi e}}\right)$ или для идеального случая

$$\left(m_G - \sqrt{R_{GG}(\tau = \Delta t)};\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e \cdot R_{GG}(\tau = \Delta t)}}\right),$$

$$\left(m_G + \sqrt{R_{GG}(\tau = \Delta t)};\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e \cdot R_{GG}(\tau = \Delta t)}}\right); \tag{27}$$

для реального случая

$$\left(m_G - \sqrt{2R_{GG}(\tau = \Delta t) - R_{GG}(\tau = 2\Delta t)};\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e \cdot \left(2R_{GG}(\tau = \Delta t) - R_{GG}(\tau = 2\Delta t)\right)}}\right),$$

$$\left(m_G + \sqrt{2R_{GG}(\tau = \Delta t) - R_{GG}(\tau = 2\Delta t)};\ \frac{1}{\sqrt{2\pi e \cdot \left(2R_{GG}(\tau = \Delta t) - R_{GG}(\tau = 2\Delta t)\right)}}\right). \tag{28}$$

Таким образом, построена вероятностная модель полезной составляющей $X(t)$, которая является частью модели зашумленного процесса $G(t)$.

4. Технология построения вероятностной модели зашумленного процесса, состоящего из нормально распределенных помехи и полезной составляющей

Ранее отмечалось, что для многих технических объектов характеристики полезной составляющей $X(t)$ дают возможность судить о текущем состоянии технического объекта, а помеха $\mathrm{E}(t)$ позволяет определить наличие и степень возникшей неисправности. Совокупность значений характеристик полезной составляющей и помехи создаст предпосылки для построения вероятностной модели зашумленного процесса. Остановимся на этом вопросе более подробно.

Пусть от датчика, размещенного в месте сбора информации о текущем состоянии исследуемого параметра, поступает аддитивный зашумленный цифровой сигнал $G(\Delta t)$, состоящий из полезного сигнала $X(\Delta t)$ и помехи $\mathrm{E}(\Delta t)$. Сигнал $G(\Delta t)$ дискретизирован шагом Δt, выбранным в соответствии с условием $\Delta t = 1/2\omega_\varepsilon$, где ω_ε — частота среза помехи. Тогда интервал времени T состоит из N весьма малых интервалов Δt, т. е. $T = N \cdot \Delta t$, а сигнал $G(t)$ мало изменяется на протяжении интервала $t + \Delta t$. Если придать t и τ дискретные значения, кратные Δt, т. е. $t = \nu \cdot \Delta t$, ν =1, 2, ...; $\tau = \mu \cdot \Delta t$, μ =0, 1, ... и для оценок корреляционных функций ввести обозначения $R_{GG}(\mu \cdot \Delta t) = R_{GG}(\mu)$; $R_{XX}(\mu \cdot \Delta t) = R_{XX}(\mu)$, $R_{\mathrm{EE}}(\mu \cdot \Delta t) = R_{\mathrm{EE}}(\mu)$, то технология построения вероятностной модели зашумленного процесса $G(t)$ представляется следующим образом.

1. В момент времени t_1 вычисляется оценка автокорреляционной функции центрированного зашумленного сигнала $G(t)$ при μ =0, Δt, $2\Delta t$:

$$R_{GG}(\mu = 0) = D_G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{G}(i\Delta t)\overset{\circ}{G}(i\Delta t),$$

$$R_{GG}(\mu = 1 \cdot \Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{G}(i\Delta t)\overset{\circ}{G}((i+1)\Delta t),$$

$$R_{GG}(\mu = 2 \cdot \Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{G}(i\Delta t)\overset{\circ}{G}((i+2)\Delta t).$$

2. Проверяется условие $R_{GG}(\mu = 0) - R_{GG}(\mu = \Delta t) = R_{GG}(\mu = \Delta t) - R_{GG}(\mu = 2\Delta t)$. Если оно выполняется, то исследуемый процесс не содержит помеху $\mathrm{E}(t)$. Если же в момент времени t_1 это условие не выполняется, то исследуемый процесс содержит помеху $\mathrm{E}(t)$, которая извещает о появлении неисправности.

3. Тогда в момент времени t_1 вычисляются характеристики помехи $\mathrm{E}(t)$:

- Вычисляется величина дисперсии D^*_{E} и среднее квадратическое отклонение σ^*_{E} помехи $\mathrm{E}(t)$ по формулам: $D^*_{\mathrm{E}} = R_{GG}(\mu = 0) - 2R_{GG}(\mu = \Delta t) + R_{GG}(\mu = 2\Delta t)$, $\sigma^*_{\mathrm{E}} = \sqrt{D^*_{\mathrm{E}}}$.
- Определяется интервал варьирования помехи $\mathrm{E}(t)$, исходя из условия $-3\sigma^*_{\mathrm{E}} \le \mathrm{E}(t) \le 3\sigma^*_{\mathrm{E}}$.
- С определенным шагом $\Delta\varepsilon$ задается последовательность возможных значений $\mathrm{E}(t)$ в порядке возрастания от $\varepsilon_{\min}$ до $\varepsilon_{\max}$: $\varepsilon(1) = \varepsilon_{\min}$, $\varepsilon(i+1) = \varepsilon(i) + \Delta\varepsilon$, …, …, $\varepsilon_{\max}$, и формируется последовательность возможных значений помехи $\varepsilon(1)$, $\varepsilon(2)$, $\varepsilon(3)$, …, $\varepsilon_{\max}$, для которой выполняется условие $\varepsilon(i-1) < \varepsilon(i)$.
- Затем в точках $\varepsilon(1)$, $\varepsilon(2)$, $\varepsilon(3)$, …, $\varepsilon_{\max}$ вычисляется функция плотности нормального распределения помехи $\mathrm{E}(t)$ по формуле

$$N^*(\varepsilon(i)) = \frac{1}{\sigma^*_\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2(i)}{2(\sigma^*_\varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (R_{GG}(0) - 2R_{GG}(\Delta t) + R_{GG}(2\Delta t))}} \cdot C,$$

где $C = e^{-\frac{\varepsilon^2(i)}{2((R_{GG}(0) - 2R_{GG}(\Delta t) + R_{GG}(2\Delta t)))}}$.

• Вычисляется максимум функции плотности распределения $N_{\max}(\varepsilon)$ помехи $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$

$$N^*_{\max}(\varepsilon=0)=\frac{1}{\sigma^*_{\mathrm{E}}\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot(R_{GG}(\mu=0)-2R_{GG}((\mu=\Delta t)+R_{GG}(\mu=2\Delta t))}}.$$

• Вычисляются координаты точек перегиба $\left(-\sigma^*_{\mathrm{E}};\frac{1}{\sigma^*_{\mathrm{E}}\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(\sigma^*_{\mathrm{E}};\frac{1}{\sigma^*_{\mathrm{E}}\sqrt{2\pi e}}\right)$ функции плотности распределения помехи:

а) для первой точки по оси абсцисс:

$A\mathrm{E}1=-\sqrt{(R_{GG}(\mu=0)-2R_{GG}((\mu=\Delta t)+R_{GG}(\mu=2\Delta t))}$;

б) для второй точки по оси абсцисс:

$A\mathrm{E}2=\sqrt{(R_{GG}(\mu=0)-2R_{GG}((\mu=\Delta t)+R_{GG}(\mu=2\Delta t))}$;

в) для первой и второй точек по оси ординат:

$$O\mathrm{E}=\frac{1}{\sqrt{2(R_{GG}(\mu=0)-2R_{GG}((\mu=\Delta t)+R_{GG}(\mu=2\Delta t))\pi e}}.$$

• Вычисленные в момент времени t_1 характеристики помехи $\mathrm{E}(t)$ заносятся во множество и в хранятся в виде банка данных для сравнительного анализа:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ N^*_{\max}(\varepsilon=0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix}.$$

4. Затем вычисляются характеристики полезной составляющей $X(t)$ в момент времени t_1.

• Вычисляется дисперсия D^*_X и среднее квадратическое отклонение σ^*_X полезной составляющей $X(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$:

$$D^*_X=D_G - D^*_{\mathrm{E}}=\ 2R_{GG}(\mu=\Delta t)-R_{GG}(\mu=2\Delta t)\ ,$$

$$\sigma^*_X=\sqrt{D^*_X}\ .$$

• Вычисляется математическое ожидание m^*_X полезной составляющей $X(t)$:

$$m^*_X=m_G=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}G(i\Delta t)\,.$$

• Учитывая, что для нормально распределенного случайного параметра отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не превышает утроенного среднего квадратического отклонения, дискретные значения функции плотности распределения $N^*(x)$ полезной составляющей $X(t)$ вычисляются в интервале $m^*_X\pm 3\sigma^*_X$, т. е. при $m^*_X-3\sigma^*_X\le X(t)\le m^*_X+3\sigma^*_X$. Для этого вычисляются минимальное и максимальное значения $X(t)$: $x_{\min}=m^*_X-3\sigma^*_X$; $x_{\max}=m^*_X+3\sigma^*_X$; с определенным шагом Δx задается последовательность возможных значений $X(t)$ в порядке возрастания от $x_{\min}$ до $x_{\max}$: $x(1)=x_{\min}$, $x(i+1)=x(i)+\Delta x$, …, $x_{\max}$ и формируется последовательность возможных значений полезной составляющей $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$, …, $x_{\max}$, для которой выполняется условие $x(i-1)<x(i)$.

• Затем в точках $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$, …, $x_{\max}$ вычисляется функция плотности нормального распределения: $N^*(x(i))=\frac{1}{\sigma_X^*\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x(i)-m_X^*)^2}{2(\sigma_X^*)^2}}$.

• Определяется максимум функции плотности нормального распределения полезной составляющей $X(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$, который находится в точке $x_{\max}(i)=m_X^*$: $N_{\max}^*(m_X^*)=\frac{1}{\sigma_X^*\sqrt{2\pi}}$.

• Определяются координаты точек перегиба $\left(m_X^*-\sigma_X^*;\frac{1}{\sigma_X^*\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(m_X^*+\sigma_X^*;\frac{1}{\sigma_X^*\sqrt{2\pi e}}\right)$ функции плотности нормального распределения полезной составляющей $X(t)$:

а) для первой точки по оси абсцисс: $AX1=m_G-\sqrt{2R_{GG}(\mu=\Delta t)-R_{GG}(\mu=2\Delta t)}$;

б) для второй точки по оси абсцисс: $AX2=m_G+\sqrt{2R_{GG}(\mu=\Delta t)-R_{GG}(\mu=2\Delta t)}$;

в) для первой и второй точек по оси ординат:

$$OX=\frac{1}{\sqrt{2\pi e\cdot(2R_{GG}(\mu=\Delta t)-R_{GG}(\mu=2\Delta t))}}.$$

• Вычисленные в момент времени t_1 характеристики полезной составляющей $X(t)$ заносятся во множество и хранятся в виде банка данных для сравнительного анализа:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ N_{\max}^*(x=m_X^*) \\ AX_1 \\ AX_2 \\ OX \end{bmatrix}.$$

5. Затем аналогичные характеристики вычисляются в моменты времени t_2, t_3, …, t_n:

$$\begin{bmatrix} t_2 \\ N_{\max}^*(\varepsilon=0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_3 \\ N_{\max}^*(\varepsilon=0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} t_n \\ N_{\max}^*(\varepsilon=0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} t_2 \\ N^*_{\max}(x = m^*_X) \\ AX_1 \\ AX_2 \\ OX \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_3 \\ N^*_{\max}(x = m^*_X) \\ AX_1 \\ AX_2 \\ OX \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} t_n \\ N^*_{\max}(x = m^*_X) \\ AX_1 \\ AX_2 \\ OX \end{bmatrix}. \quad (29)$$

6. Каждый раз после вычисления характеристик помехи $\mathrm{E}(t)$ и полезной составляющей $X(t)$ в моменты времени t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}, … их значения сравниваются с эталонными значениями, полученными в предыдущий момент времени t_i.

• Если при выполнении равенства

$$\begin{bmatrix} t_i \\ N^*_{\max}(x = 0) \\ AX_1 \\ AX_2 \\ OX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{i+1} \\ N^*_{\max}(x = 0) \\ AX_1 \\ AX_2 \\ OX \end{bmatrix} \quad (30)$$

выполняется неравенство

$$\begin{bmatrix} t_i \\ N^*_{\max}(\varepsilon = 0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} t_{i+1} \\ N^*_{\max}(\varepsilon = 0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

то это означает, что для данного текущего состояния появилась неисправность.

Если при выполнении равенства (30) выполняются неравенства

$$\begin{bmatrix} t_i \\ N^*_{\max}(\varepsilon = 0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} t_{i+1} \\ N^*_{\max}(\varepsilon = 0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_i \\ N^*_{\max}(\varepsilon = 0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} t_{i+2} \\ N^*_{\max}(\varepsilon = 0) \\ A\mathrm{E}_1 \\ A\mathrm{E}_2 \\ O\mathrm{E} \end{bmatrix}, \ldots,$$

то это означает, что меняется степень неисправности (увеличивается). При этом, если изменение происходит стабильно, это означает, что необходимо провести соответствующие ремонтные работы. Если же изменение носит не стабильный, а разовый, единичный характер, то это может быть связано с причинами, не относящимся к техническому состоянию исследуемого объекта, например увеличение или уменьшение напряжения, давления и т.д. в сети. Тогда можно повременить с остановкой производственного объекта, приводящей к большим материальным потерям, и не проводить ремонтные работы.

• Если выполняется неравенство $\begin{bmatrix} t_i \\ N^*_{\max}(x=0) \\ AX_1 \\ AX_2 \\ OX \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} t_{i+1} \\ N^*_{\max}(x=0) \\ AX_1 \\ AX_2 \\ OX \end{bmatrix}$,

то это означает, что изменилось текущее состояние исследуемого объекта. Тогда для данного текущего состояния следует определить степень развития неисправности, как описано в [6].

Таким образом, в процессе эксплуатации технического объекта создается банк эталонных данных, состоящий из значений (30), (31), полученных в моменты времени t_1, t_2, t_3, …, t_n, с помощью которых можно оценить текущее состояние исследуемого объекта, а также степень возникшей неисправности.

Заключение

Для построения вероятностной модели зашумленного сигнала разработаны алгоритмы построения вероятностной модели полезной составляющей и алгоритмы построения вероятностной модели помехи. Предлагаемая модель позволяет составить множество, включающее такие вероятностные характеристики помехи $\mathrm{E}(t)$ и полезной составляющей $X(t)$, как математические ожидания, дисперсии, средние квадратические отклонения, функции плотности распределения и их максимумы, а также точки перегиба по оси абсцисс и оси ординат, полученные в различные периоды времени. На их основе создается банк эталонных данных характеристик технологических параметров объектов контроля.

Отмечено, что равенство нулю характеристик помехи свидетельствует о том, что технический объект не имеет неисправностей. Отличие характеристик помехи от нуля сигнализирует о возникшей неисправности. Изменение же значений характеристик помехи в различные моменты времени при неизменных характеристиках полезной составляющей предупреждает об изменении степени неисправности. Изменение характеристик полезной составляющей свидетельствует об изменении текущего состояния исследуемого объекта. Сравнительный анализ значений перечисленных характеристик в различные моменты времени позволяет выявить ранний период возникновения неисправности, проследить динамику развития этой неисправности, а также оценить текущее состояние объекта исследования.

Использование созданных множеств в автоматизированной системе управления такими объектами, как нефтяные скважины, компрессорные установки и т.д. позволяет определить момент, когда следует провести профилактические работы. Это дает возможность предотвратить остановку процесса для проведения серьезного капитального ремонта и, таким образом, избежать дорогостоящих простоев.

Т.А. Алієв, Н.Ф. Мусаєва, Б.І. Газизаде

АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ЗАШУМЛЕНОГО ПРОЦЕСУ ШЛЯХОМ КОРЕКЦІЇ ЗАКОНУ ЙОГО РОЗПОДІЛУ

Розроблено алгоритми побудови вірогідностей моделі зашумленого процесу, яка складається з вірогідних моделей корисної складової і завади. Скла-

дено множину таких характеристик завади і корисної складової: математичне очікування, дисперсія, середні квадратичні відхилення, функції щільності розподілу та їх максимуми, а також точки перетину по осі абсцис і ординат. Показано, що використання цих множин в автоматичній системі керування дозволить визначити момент проведення профілактичної роботи і попередити зупинку проведення капітального ремонту.

T.A. Aliev, N.F. Musaeva, B.I. Gazizade

ALGORITHMS OF BUILDING A MODEL OF THE NOISY PROCESS BY CORRECTION OF THE LAW OF ITS DISTRIBUTION

The authors construct algorithms for building a probabilistic model of the noisy process consisting of probabilistic models of useful component and noise. A set of such characteristics of noise and useful component as mathematical expectations, variance, mean-square deviations, distribution density functions and their maxima, as well as inflection points along the x-axis and y-axis obtained at different periods of time has been formed. It has been demonstrated that the use of those sets in an automated control system allows for determining the moment when routine maintenance should be performed, thus avoiding process shutdown required to perform a comprehensive overhaul.

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: 5-е изд. — М. : КНОРУС, 2013. — 448 с.
2. *Aliev T.A., Guluyev G.A., Pashayev F.H., Sadygov A.B*. Noise monitoring technology for objects in transition to the emergency state // Mechanical Systems and Signal Processing. — 2012. — **27**. — P. 755–762.
3. *Техническая* кибернетика. Кн. 2. / Под ред. В.В. Солодовникова — М.: Машиностроение, 1967. — 682 с.
4. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Guluyev G.A., Sattarova U.E., Rzaeva N.E.* System of monitoring of period of hidden transition of compressor station to emergency state // Journal of Automation and Information Sciences. — 2011. — **43**(11), N 6. — P. 61–81.
5. *Aliev T.A., Musaeva N.F.* An algorithm for eliminating microerrors of noise in the solution of statistical dynamics problems // Automation and Remote Control. — 1998. — **59**, N 5. — P. 679–688.
6. *Musaeva N.F.* Robust correlation coefficients as initial data for solving a problem of confluent analysis // Automatic Control and Computer Sciences. — 2007. — **41**, N. 2. — P. 76–87.
7. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Suleymanova M.T., Gazizade B.I.* Analytical representation of the density function of normal distribution of noise // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — **47**(8), N 4. — P. 24–40.
8. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Suleymanova M.T., Gazizade B.I.* Technology for calculating the parameters of the density function of normal distribution of the useful component in a noisy process // Ibid. — 2016. — **48,** N 4. — P. 35–55.
9. *Отт Г.* Методы подавления шумов и помех в электронных системах. — М.: Мир, 1979. — 318 с.
10. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. — М.: Наука, 1965. — 276 с.
11. *Чеголин П.М.* Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. — М.: Энергия, 1969. — 384 с.
12. *Бендат Дж., Пирсол А.* Применения корреляционного и спектрального анализа — М. : Мир, 1983. — 312 с.
13. *Пупков К.А.* Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления. — М.: Изд МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 748 с.

Получено 06.02.2017