УДК 519.8

О.А. Емец, А.О Емец, И.М. Поляков

ОПТИМИЗАЦИЯ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ: СИМПЛЕКСНАЯ ФОРМА МНОГОГРАННИКА РАЗМЕЩЕНИЙ

Введение

В современной теории оптимизации комбинаторная оптимизация (см., в частности, [1–6]) является активно развивающейся частью, отражающей актуальные проблемы исследования современного мира. Среди комбинаторных конфигураций одними из наиболее изучаемых в силу важности и употребляемости в оптимизационных проблемах являются размещения. Исследованию множества размещений и его обобщений в связи с задачами оптимизации на нем посвящено много публикаций, укажем, в частности, [1–24]. При построении методов решения задач оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах, одним их которых есть множества размещений, нередко используются вспомогательные задачи линейного программирования, в которых частью ограничений являются комбинаторные многогранники — выпуклые оболочки евклидовых комбинаторных множеств. При решении таких вспомогательных задач на комбинаторных многогранниках методом Кармаркара необходимо знать так называемую симплексную форму этих многогранников. Для множеств перестановок такие формы исследованы в [25, 26]. Для многогранника размещений эта задача требует решения. Получению симплексной формы многогранника размещений и посвящена настоящая публикация.

Постановка задачи

Поставим такую задачу: получить и исследовать общий многогранник размещений [2], подвергнув его преобразованиям, необходимым, чтобы использовать алгоритм Кармаркара (АК) для решения задач, в которых этот многогранник — допустимая область. При этом будем использовать терминологию [2].

Рассмотрим решение линейной условной частично комбинаторной задачи на общем множестве размещений [2] вида: найти упорядоченную пару $< C(y^*), y^* >$ такую, что

$$C(y^*) = \max_{y \in R^m} \sum_{j=1}^{m} c_j y_j, \tag{1}$$

$$y^* = \arg \max_{y \in R^m} \sum_{j=1}^{m} c_j y_j \tag{2}$$

при комбинаторных условиях

$$x = (x_1, ..., x_k) \in E^k_{\eta n}(G) \subset R^k \tag{3}$$

и дополнительных условиях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le b_i, \ i \in J_r; \ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = b_i, \ i \in J_s \setminus J_r. \tag{4}$$

Здесь $E^k_{\eta n}(G)$ — общее множество k-размещений [2], заданных из элементов мультимножества $G = \{g_1, ..., g_\eta\}$, среди которых n различных элементов: $y = (x_1, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_m) \in R^m$, $x_i = y_i \ \ \forall i \in J_k$, m, k, η, n, r, s — заданные натуральные числа ($m \ge k$, $\eta \ge n$; $k \le \eta$, $s \ge r$. При этом r, s могут быть и нулями); c_j, a_{ij}, b_i — заданные действительные числа $\forall j \in J_m$, $\forall i \in J_s$; R^m — m-мерное евклидово арифметическое пространство; J_k — множество первых k натуральных чисел: $J_k = \{1, 2, ..., k\}$, а $J_0 = \varnothing$.

Один из методов решения линейных частично комбинаторных задач на евклидовых комбинаторных множествах, к которым относится и $E^k_{\eta n}(G)$, — метод комбинаторного отсечения [5, 27]. При этом как вспомогательные используются задачи линейного программирования (ЗЛП), которые получают из задачи (1)–(4) заменой условия (3) на условие-релаксацию:

$$x \in \operatorname{conv} E^k_{\eta n}(G) = \Pi^k_{\eta n}(G), \tag{5}$$

где $\Pi^k_{\eta n}(G)$ — выпуклая оболочка $\operatorname{conv} E^k_{\eta n}(G)$ общего множества размещений $E^k_{\eta n}(G)$. Система ограничений, описывающая $\Pi^k_{\eta n}(G)$, известна [2], поэтому условие (5) записывается в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in \omega} x_i \ge \sum\limits_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall \omega \subset J_k, & (6) \\ \sum\limits_{i \in \Omega} x_i \le \sum\limits_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta - i + 1} \quad \forall \Omega \subset J_k, & (7) \end{cases}$$

где элементы мультимножества G пронумерованы в соответствии с таким порядком:

$$g_1 \le g_2 \le ... \le g_\eta, \tag{8}$$

$|\omega|$ — количество элементов множества ω.

Алгоритм преобразования (АП)

Для использования АК [28] применим алгоритм преобразования ЗЛП, которая записана в стандартной форме, к необходимому виду. Форму получаемого многогранника будем называть симплексной. При этом используем подход, изложенный в [26].

Рассмотрим матричную запись стандартной формы ЗЛП:

$$cx \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} Ax \le b; \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{9}$$

где c — заданный вектор $c = (c_1, ..., c_k)$, x — вектор-столбец неизвестных, $x^{\mathrm{T}} = (x_1, ..., x_k)$; матрица A — заданная матрица коэффициентов при неизвестных с элементами a_{ij} : $A = (a_{ij})_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$, b — заданный вектор $b = (b_1, ..., b_r)^{\mathrm{T}}$. Для вектора x запись $x \geq 0$ означает, что все его координаты неотрицательны.

АП для ЗЛП, где допустимая область задана условием (9), представим такой последовательностью шагов.

Шаг 1. Систему ограничений (9), ЗЛП запишем в каноническом виде:

$$\begin{cases} Ax + y = b; \\ x, y \geq 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $y = (y_1, ..., y_r)^{\mathrm{T}}$.

Шаг 2. Вводим необходимое далее ограничение, которому удовлетворяют все допустимые решения ЗЛП из системы (9):

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i \leq U, \tag{11}$$

U — достаточно большое число. Далее условие (11) удобно использовать как равенство

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i + u = U, \tag{12}$$

где вновь введенная переменная $u \geq 0$.

Шаг 3. Умножим правую часть системы (10) на равное единице выражение

$$\left(\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{i=1}^{r} y_i + u \right) U^{-1}.$$

Это позволяет получить из системы (10) однородную систему, эквивалентную ей. При этом уравнение системы (10) представим в виде

$$A^x x + A^y y - bu = \bar{0}, \tag{13}$$

где $A^x = (a_{ij}^x)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$, $a_{ij}^x = a_{ij} - b_i U^{-1}$ $\forall j \in J_k$, $\forall i \in J_r$; $A^y = (a_{ij}^y)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$, $a_{ii}^y = 1 - b_i U^{-1}$ $\forall i \in J_r$; $a_{ij}^y = -b_i U^{-1}$, $j \neq i$ $\forall i \in J_r$, $\forall j \in J_k$, $\bar{0}$ — нулевой вектор-столбец пространства R^r, т.е. $\bar{0} = (0, ..., 0)^{\mathrm{T}} \in R^r$.

Шаг 4. Введем новые переменные:

$$X_j = x_j \cdot U^{-1} \ \ \forall j \in J_k; \ \ Y_i = y_i \cdot U^{-1} \ \ \forall i \in J_r, \tag{14}$$

а также

$$V = u \cdot U^{-1}. \tag{15}$$

В этих переменных условие (12) определяет симплекс с вершиной в начале координат, причем ребра симплекса, направленные по положительным направлениям координатных осей, имеют единичную длину.

Используя в (13) замены (14), (15), можем записать ЗЛП так:

$$Ucx \to \max \tag{16}$$

с учетом ограничений

$$A^X X + A^Y Y - bV = \bar{0}, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{i=1}^{r} Y_i + V = 1; \tag{18}$$

$$X = (X_1, ..., X_k)^T \geq 0;\ \ Y = (Y_1, ..., Y_r)^T \geq 0;\ \ V \geq 0, \tag{19}$$

где используемые в формуле (17) матрицы определены так:

$$A^X = (a_{ij}^X)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}},\ \ a_{ij}^X = a_{ij}U - b_i\ \ \forall i \in J_r,\ \ \forall j \in J_k;$$

$$A^Y = (a_{ij}^Y)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}},\ \ a_{ii}^Y = U - b_i\ \ \ \forall i \in J_r;\ \ a_{ij}^Y = -b_i,\ \ \forall i \neq j,\ \ i \in J_r;\ \ j \in J_k.$$

Шаг 5. На этом шаге обеспечивается условие, что бароцентр симплекса, т.е. точка, все координаты которой равны между собой и равны величине, обратной размерности пространства, удовлетворяет условиям, эквивалентным исходной ЗЛП.

Это осуществляется за счет вычитания от левой части каждого уравнения в (17) неотрицательной переменной Z_i, $i \in J_r$, помноженной на сумму всех коэффициентов левой части этого уравнения. При этом в целевую функцию прибавляется слагаемое $(-M)Z_i$, выполняющее роль штрафа и при достаточно большом положительном M обеспечивающее при максимизации измененной таким образом целевой функции нулевое значение переменной Z_i с учетом выполнения условий трансформированной ЗЛП.

Таким образом, из задачи (16)–(19) получаем эквивалентную ей ЗЛП:

$$UcX - M\sum_{i=1}^{r} Z_i \to \max, \tag{20}$$

$$A^X X + A^Y Y + A^Z Z = bV, \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{i=1}^{r} Y_i + \sum_{i=1}^{r} Z_i + V = 1, \tag{22}$$

$$X \geq 0;\ \ Y \geq 0;\ \ Z = (Z_1, ..., Z_r)^{\mathrm{T}} \geq 0;\ \ V \geq 0, \tag{23}$$

где $A^Z = (a_{ij}^Z)_{j=\overline{1,k}}^{i=\overline{1,r}}$, $\quad a_{ii}^Z = (2k+1)b_i - U\left(1 + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\right) \quad \forall i \in J_r;\quad a_{ij}^Z = 0 \quad \forall i \neq j$, $i \in J_r;\ \ j \in J_k$.

Для системы (21), (22) точка $(X^*, Y^*, Z^*, V^*) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right) \in R^n$ допустима.

Здесь $n = k + 2r + 1$, а $X_j^* = Y_i^* = Z_i^* = V^* = \frac{1}{n}\ \ \forall i \in J_r\ \ \forall j \in J_k$.

ISSN 0572-2691

Получение симплексной формы общего многогранника размещений

Рассмотрим вид общего многогранника размещений (6), (7), в который он обратится после применения АП. Для этого обратимся к задаче

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \max$$

при выполнении условий системы (6), (7). Напомним, что в этой системе элементы мультимножества G удовлетворяют неравенствам (8). Применим шаг за шагом АП.

Шаг 1. Введем в рассмотрение неотрицательные переменные y_ω, z_Ω, $\omega \subset J_k$, $\Omega \subset J_k$, с помощью которых систему (6), (7) запишем в виде равенств

$$\sum_{i\in\omega} x_i - y_\omega = \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall \omega \subset J_k, \tag{24}$$

$$\sum_{i\in\Omega} x_i + z_\Omega = \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1} \quad \forall \Omega \subset J_k. \tag{25}$$

Шаг 2. Вводим новое ограничение вида (11):

$$\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{\omega\subset J_k} y_\omega + \sum_{\Omega\subset J_k} z_\Omega \le U, \tag{26}$$

а при $u \ge 0$ имеем

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{\omega\subset J_k} y_\omega + \sum_{\Omega\subset J_k} z_\Omega + u = U. \tag{27}$$

Параметром U может выступать число

$$U = \sum_{i=1}^{k} g_{\eta-i+1} + 2\sum_{j=1}^{k}\left[C_k^j \left(\sum_{i=1}^{j} g_{\eta-i+1} - \sum_{i=1}^{j} g_i \right)\right], \tag{28}$$

что обосновывается в таком утверждении.

Теорема 1. Для общего многогранника размещений (6), (7) при условиях (8), (24), (25) справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{\omega\subset J_k} y_\omega + \sum_{\Omega\subset J_k} z_\Omega \le \sum_{i=1}^{k} g_{\eta-i+1} + 2\sum_{j=1}^{k}\left[C_k^j \left(\sum_{i=1}^{j} g_{\eta-i+1} - \sum_{i=1}^{j} g_i \right)\right]. \tag{29}$$

Доказательство. Неравенства (6), (7) можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \le \sum_{i\in\omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\eta-i+1} \quad \forall \omega \subset J_k. \tag{30}$$

Выразим из (24)

$$y_\omega = \sum_{i\in\omega} x_i - \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall \omega \subset J_k, \tag{31}$$

а z_Ω из (25) —

$$z_\Omega = \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1} - \sum_{i\in\Omega} x_i \quad \forall\Omega \subset J_k. \tag{32}$$

Правая часть (30) дает из (31)

$$y_\omega \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_{\eta-i+1} - \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall\omega \subset J_k, \tag{33}$$

а левая часть (30) в виде

$$-\sum_{i\in\omega} x_i \le -\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i$$

из (32) дает

$$z_\Omega \le \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1} - \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_i \quad \forall\Omega \subset J_k. \tag{34}$$

При переходе к (34) использован тот факт, что и множество $\omega \subset J_k$, и множество $\Omega \subset J_k$.

Осталось оценить суммы переменных y_ω, z_Ω, входящие в (27). Учтем, что количество подмножеств в J_k с одинаковым количеством $|\omega| = |\Omega| = j$ элементов равно количеству C_k^j сочетаний из k элементов по j. Тогда из (33) получаем

$$\sum_{\omega\subset J_k} y_\omega \le \sum_{j=1}^{k} \left[C_k^j \left(\sum_{i=1}^{j} g_{\eta-i+1} - \sum_{i=1}^{j} g_i \right) \right], \tag{35}$$

а из (34) имеем

$$\sum_{\Omega\subset J_k} z_\Omega \le \sum_{j=1}^{k} \left[C_k^j \left(\sum_{i=1}^{j} g_{\eta-i+1} - \sum_{i=1}^{j} g_i \right) \right]. \tag{36}$$

Из (7) при $\Omega = J_k$ (а значит, $|\Omega| = k$) имеем

$$\sum_{i=1}^{k} x_j \le \sum_{i=1}^{k} g_{\eta-i+1}. \tag{37}$$

Сумма неравенств (35)–(37) дает (29), что и требовалось доказать.

Шаг 3. Приводим систему (24), (25) к однородной. Для этого умножаем правую часть уравнений системы на равное единице выражение

$$U^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{\omega\subset J_k} y_\omega + \sum_{\Omega\subset J_k} z_\Omega + u \right),$$

где U вычисляется по формуле (28). В результате получаем такую систему:

$$\left(1 - U^{-1}\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i\right)\left(\sum_{i\in\omega} x_i - y_\omega\right) - U^{-1}\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \left(\sum_{i\in J_k\setminus\omega} x_i + \sum_{\substack{\forall\Omega\subset J_k \\ \Omega\ne\omega}} y_\Omega + \sum_{\forall\Omega\subset J_k} z_\Omega + u \right) = 0 \quad \forall\omega \subset J_k; \tag{38}$$

$$\left(1-U^{-1}\sum_{i=1}^{|\Omega|}g_{\eta-i+1}\right)\left(\sum_{i\in\Omega}x_i+z_\Omega\right)-U^{-1}\sum_{i=1}^{|\Omega|}g_{\eta-i+1}\times$$
$$\times\left(\sum_{i\in J_k\setminus\Omega}x_i+\sum_{\forall\omega\subset J_k}y_\omega+\sum_{\substack{\forall\omega\subset J_k\\ \omega\neq\Omega}}z_\omega+u\right)=0\quad\forall\Omega\subset J_k \tag{39}$$

Шаг 4. Согласно (14), (15) вводим новые переменные и из (38), (39) и (27) имеем систему ограничений:

$$\left(U-\sum_{i=1}^{|\omega|}g_i\right)\sum_{i\in\omega}X_i-\left(U+\sum_{i=1}^{|\omega|}g_i\right)Y_\omega-\sum_{i=1}^{|\omega|}g_i\left(\sum_{i\in J_k\setminus\omega}X_i+\sum_{\substack{\Omega\subset J_k\\ \Omega\neq\omega}}Y_\Omega+\sum_{\forall\Omega\subset J_k}Z_\Omega+V\right)=0\forall\omega\subset J_k, \tag{40}$$

$$\left(U-\sum_{i=1}^{|\Omega|}g_{\eta-i+1}\right)\left(\sum_{i\in\Omega}X_i+Z_\Omega\right)-\sum_{i=1}^{|\Omega|}g_{\eta-i+1}\left(\sum_{i\in J_k\setminus\Omega}X_i+\sum_{\forall\omega\subset J_k}Y_\omega+\sum_{\substack{\forall\omega\subset J_k\\ \omega\neq\Omega}}Z_\omega+V\right)=0\quad\forall\Omega\subset J_k, \tag{41}$$

$$\sum_{i=1}^{k}X_i+\sum_{\omega\subset J_k}Y_\omega+\sum_{\Omega\subset J_k}Z_\Omega+V=1. \tag{42}$$

При этом функция цели ЗЛП приобретает вид

$$U\sum_{j=1}^{k}c_jX_j\to\max.$$

Шаг 5. В левой части каждого из уравнений (40), (41) отнимаем свою неотрицательную переменную W_ω^α (для (40)) и W_Ω^β (для (41)), $\omega\subset J_k$; $\Omega\subset J_k$ с коэффициентами $\alpha_{|\omega|}$ и $\beta_{|\Omega|}$ соответственно, где

$$\alpha_{|\omega|}=(|\,\omega\,|-1)U-(2^{k+1}+k-1)\sum_{i=1}^{|\omega|}g_i, \tag{43}$$

$$\beta_{|\Omega|}=(|\,\Omega\,|+1)U-(2^{k+1}+k-1)\sum_{i=1}^{|\Omega|}g_{\eta-i+1}. \tag{44}$$

Утверждение 1. При фиксированном подмножестве $\omega\subset J_k$ сумма коэффициентов при переменных в уравнении (40) равняется числу $\alpha_{|\omega|}$, которое задано в (43), а при выбранном подмножестве $\Omega\subset J_k$ сумма коэффициентов при переменных в уравнении (41) равна $\beta_{|\Omega|}$, что задается формулой (44).

Доказательство. Справедливость утверждения проверяется непосредственными вычислениями. Сделаем это для $\alpha_{|\omega|}$.

Первое слагаемое в (40) содержит $|\,\omega\,|$ переменных X_i, $i\in\omega$, с коэффициентом при каждом $U-\sum_{i=1}^{|\omega|}g_i$. Второе слагаемое содержит множитель Y_ω с коэффициентом $-\left(U+\sum_{i=1}^{|\omega|}g_i\right)$.

Третье алгебраическое слагаемое в (40) содержит $|J_k \setminus \omega| = k - |\omega|$ слагаемых вида X_i $\forall i \in J_k \setminus \omega$, $2^k - 2$ слагаемых Y_Ω, где $\Omega \neq \omega$, $\forall \Omega \in J_k$, $2^k - 1$ слагаемое Z_Ω $\forall \Omega \in J_k$ и слагаемое V. Все эти слагаемые с сомножителем $-\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i$.

Таким образом, U входит в сумму $|\omega| - 1$ раз, а слагаемое $-\sum_{i=1}^{|\omega|} g_i$ входит в общем такое количество раз:

$$|\omega| + 1 + k - |\omega| + 2^k - 2 + 2^k - 1 + 1 = 2^{k+1} + k - 1.$$

Учитывая это, получаем формулу (43).

Аналогично для (41) имеем: первое слагаемое содержит $|\Omega|$ переменных X_i, $i \in \Omega$, и одно слагаемое Z_Ω с коэффициентом при каждом $U - \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1}$. Второе алгебраическое слагаемое в (41) содержит $|J_k \setminus \Omega| = k - |\Omega|$ слагаемых вида X_i, $i \in J_k \setminus \Omega$, $2^k - 1$ слагаемых Y_ω, $\forall \omega \subset J_k$, $2^k - 2$ слагаемых Z_ω, где $\omega = \Omega$, $\forall \omega \subset J_k$ и слагаемое V. Все эти слагаемые имеют сомножитель $-\sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1}$.

Таким образом, U входит в формулу $|\Omega| + 1$ раз, а слагаемые $-\sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1}$ такое количество раз:

$$|\Omega| + 1 + k - |\Omega| + 2^k - 1 + 2^k - 2 + 1 = 2^{k+1} + k - 1.$$

Это подтверждает справедливость формулы (44). Утверждение доказано.

Выполнив пятый шаг АП, получим такую ЗЛП:

$$U \sum_{j=1}^{k} c_j X_j - M \sum_{\forall \omega \subset J_k} W_\omega^\alpha - M \sum_{\forall \Omega \subset J_k} W_\Omega^\beta \to \max \tag{45}$$

при ограничениях, которые из вида (40)–(42) трансформируются в

$$\left(U - \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \right) \sum_{i \in \omega} X_i - \left(U + \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \right) Y_\omega - \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \left(\sum_{i \in J_k \setminus \omega} X_i + \sum_{\substack{\Omega \subset J_k \\ \Omega \neq \omega}} Y_\Omega + \sum_{\forall \Omega \subset J_k} Z_\Omega + V \right) -$$

$$- \alpha_{|\omega|} W_\omega^\alpha = 0, \ \ \forall \omega \subset J_k, \tag{46}$$

$$\left(U - \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1} \right) \left(\sum_{i \in \Omega} X_i + Z_\Omega \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{|\Omega|} g_{\eta-i+1} \left(\sum_{i \in J_k \setminus \Omega} X_i + \sum_{\forall \omega \subset J_k} Y_\omega + \sum_{\substack{\forall \omega \subset J_k \\ \omega \neq \Omega}} Z_\omega + V \right) - \beta_{|\Omega|} W_\Omega^\beta = 0, \ \ \forall \Omega \subset J_k, \tag{47}$$

 ISSN 0572-2691

$$\sum_{i=1}^{k} X_i + \sum_{\omega\subset J_k} Y_\omega + \sum_{\Omega\subset J_k} Z_\Omega + \sum_{\omega\subset J_k} W_\omega^\alpha + \sum_{\Omega\subset J_k} W_\Omega^\beta + V = 1, \tag{48}$$

$$Y_\omega \ge 0;\ Z_\omega \ge 0;\ W_\omega^\alpha \ge 0;\ W_\omega^\beta \ge 0\ \ \forall\omega\subset J_k. \tag{49}$$

Легко видеть, что точка $T = (X^*, Y^*, Z^*, W^{\alpha *}, W^{\beta *}, V^*)$, имеющая все n координат, равных $\frac{1}{n}$, удовлетворяет системе (46)–(48), где $X^* = (X_1^*, ..., X_k^*) \in R^k$, $Y^*, Z^*, W^{\alpha *}, W^{\beta *} \in R^q$, при $q = 2^k - 1$, $V^* \in R^1$, а также $n = k + 4(2^k - 1) + 1 =$ $= k + 2^{k+2} - 3$.

Образ общего многогранника размещений, полученный в результате применения АП, и называем, как сказано выше, симплексной формой многогранника размещений.

Таким образом, доказана теорема о симплексной форме многогранника размещений.

Теорема 2. Общий многогранник размещений $\Pi_{\eta n}^k(G)$, задаваемый системой ограничений (6), (7) при условии (8), имеет симплексную форму, определяемую системой (46)–(49), параметры и переменные которой задаются условиями (14), (15), (24), (25), (27), (28), (43), (44).

Иллюстративный пример

Рассмотрим преобразование ЗЛП к виду, необходимому для применения АК, когда систему (9) определяет общий многогранник размещений, т.е. система (6), (7) при выполнении условий (8). Пусть выполняются такие условия в (1)–(4): $k = m = 3$; $s = r = 0$ (т.е. условий вида (4) нет); $G = \{e_1, e_2, e_2, e_3, e_3\}$, т.е. $\eta = 5$; $n = 3$, $g_1 = e_1$, $g_2 = g_3 = e_2$, $g_4 = g_5 = e_3$, $e_1 < e_2 < e_3$, т.е. исходной является ЗЛП

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$x_1 \ge g_1,\ x_2 \ge g_1,\ x_3 \ge g_1,\ x_1 + x_2 \ge g_1 + g_2,\ x_1 + x_3 \ge g_1 + g_2,$$

$$x_2 + x_3 \ge g_1 + g_2,\ x_1 + x_2 + x_3 \ge g_1 + g_2 + g_3,\ x_1 \le g_5,$$

$$x_2 \le g_5,\ x_3 \le g_5,\ x_1 + x_2 \le g_5 + g_4,\ x_1 + x_3 \le g_5 + g_4,$$

$$x_2 + x_3 \le g_5 + g_4,\ x_1 + x_2 + x_3 \le g_5 + g_4 + g_3.$$

Найдем параметры симплексной формы для заданного многогранника размещений: $U = 24e_3 - 7e_2 - 14e_1$, $\alpha_1 = -18g_1$;

$$\alpha_2 = 15g_5 + 9g_4 + g_3 - 26g_2 - 32g_1;$$

$$\alpha_3 = 30g_5 + 18g_4 - 16g_3 - 34g_2 - 46g_1;$$

$$\beta_1 = 12g_5 + 18g_4 + 2g_3 - 16g_2 - 28g_1;$$

$$\beta_2 = 27g_5 + 9g_4 + 3g_3 - 24g_2 - 42g_1;$$

$$\beta_3 = 42g_5 + 18g_4 - 14g_3 - 32g_2 - 56g_1.$$

Имеем (согласно теореме 2) такую симплексную форму многогранника размещений:

$$X_1(U - g_1) - Y_1(U + g_1) - g_1(X_2 + X_3 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{123} +$$

$$+ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \alpha_1 W_1^{\alpha} = 0,$$

$$X_2(U - g_1) - Y_2(U + g_1) - g_1(X_1 + X_3 + Y_1 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{123} +$$

$$+ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \alpha_1 W_2^{\alpha} = 0,$$

$$X_3(U - g_1) - Y_3(U + g_1) - g_1(X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{123} +$$

$$+ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \alpha_1 W_3^{\alpha} = 0,$$

$$(X_1 + X_2)(U - (g_1 + g_2)) - Y_{12}(U + g_1 + g_2) - (g_1 + g_2)(X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \alpha_2 W_{12}^{\alpha} = 0,$$

$$(X_1 + X_3)(U - (g_1 + g_2)) - Y_{13}(U + g_1 + g_2) - (g_1 + g_2)(X_2 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \alpha_2 W_{13}^{\alpha} = 0,$$

$$(X_2 + X_3)(U - (g_1 + g_2)) - Y_{23}(U + g_1 + g_2) - (g_1 + g_2)(X_1 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \alpha_2 W_{23}^{\alpha} = 0,$$

$$(X_1 + X_2 + X_3)(U - (g_1 + g_2 + g_3)) - Y_{123}(U + g_1 + g_2 + g_3) - (g_1 + g_2 + g_3)(Y_1 +$$

$$+ Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \alpha_3 W_{123}^{\alpha} = 0,$$

$$(X_1 + Z_1)(U - g_5) - g_5(X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \beta_1 W_1^{\beta} = 0,$$

$$(X_2 + Z_2)(U - g_5) - g_5(X_1 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \beta_1 W_2^{\beta} = 0,$$

$$(X_3 + Z_3)(U - g_5) - g_5(X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \beta_1 W_3^{\beta} = 0,$$

$$(X_1 + X_2 + Z_{12})(U - (g_5 + g_4)) - (g_5 + g_4)(X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \beta_2 W_{12}^{\beta} = 0,$$

 ISSN 0572-2691

$$(X_1 + X_3 + Z_{13})(U - (g_5 + g_4)) - (g_5 + g_4)(X_2 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{23} + Z_{123} + V) - \beta_2 W_{13}^{\beta} = 0,$$

$$(X_2 + X_3 + Z_{23})(U - (g_5 + g_4)) - (g_5 + g_4)(X_1 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{123} + V) - \beta_2 W_{23}^{\beta} = 0,$$

$$(X_1 + X_2 + X_3 + Z_{123})(U - (g_5 + g_4 + g_3)) - (g_5 + g_4 + g_3)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} +$$

$$+ Y_{23} + Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + V) - \beta_3 W_{123}^{\beta} = 0,$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 +$$

$$+ Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V + W_1^{\alpha} + W_2^{\alpha} + W_3^{\alpha} + W_{12}^{\alpha} + W_{13}^{\alpha} + W_{23}^{\alpha} + W_{123}^{\alpha} +$$

$$+ W_1^{\beta} + W_2^{\beta} + W_3^{\beta} + W_{12}^{\beta} + W_{13}^{\beta} + W_{23}^{\beta} + W_{123}^{\beta} = 1.$$

При $e_1 = 1;$ $e_2 = 2;$ $e_3 = 3,$ поскольку $g_1 = 1;$ $g_2 = g_3 = 2;$ $g_4 = g_5 = 3;$ $U = 4;$ $\alpha_1 = -18;$ $\alpha_2 = -10;$ $\alpha_3 = -2;$ $\beta_1 = 34;$ $\beta_2 = 24;$ $\beta_3 = 32$, получаем такой общий многогранник размещений в симплексной форме:

$$43X_1 - 45Y_1 - (X_2 + X_3 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{123} +$$

$$+ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) + 18W_1^{\alpha} = 0,$$

$$43X_2 - 45Y_2 - (X_1 + X_3 + Y_1 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{123} +$$

$$+ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) + 18W_2^{\alpha} = 0,$$

$$43X_3 - 45Y_3 - (X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{123} +$$

$$+ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) + 18W_3^{\alpha} = 0,$$

$$41(X_1 + X_2) - 47Y_{12} - 3(X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) + 10W_{12}^{\alpha} = 0,$$

$$41(X_1 + X_3) - 47Y_{13} - 3(X_2 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{23} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) + 10W_{13}^{\alpha} = 0,$$

$$41(X_2 + X_3) - 47Y_{23} - 3(X_1 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} +$$

$$+ Y_{123} + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) + 10W_{23}^{\alpha} = 0,$$

$$39(X_1 + X_2 + X_3) - 49Y_{123} - 5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+ Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_{12} + Z_{13} + Z_{23} + Z_{123} + V) + 2W_{123}^{\alpha} = 0,$$

$$41(X_1 + Z_1) - 3(X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_{12} + Y_{13} + Y_{23} +$$

$$+Y_{123}+Z_2+Z_3+Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}+Z_{123}+V)-34W_1^{\beta}=0,$$

$$41(X_2+Z_2)-3(X_1+X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{12}+Y_{13}+Y_{23}+$$

$$+Y_{123}+Z_1+Z_3+Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}+Z_{123}+V)-34W_2^{\beta}=0,$$

$$41(X_3+Z_3)-3(X_1+X_2+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{12}+Y_{13}+Y_{23}+$$

$$+Y_{123}+Z_1+Z_2+Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}+Z_{123}+V)-34W_3^{\beta}=0,$$

$$38(X_1+X_2+Z_{12})-6(X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{12}+Y_{13}+Y_{23}+$$

$$+Y_{123}+Z_1+Z_2+Z_3+Z_{13}+Z_{23}+Z_{123}+V)-24W_{12}^{\beta}=0,$$

$$38(X_1+X_3+Z_{13})-6(X_2+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{12}+Y_{13}+Y_{23}+$$

$$+Y_{123}+Z_1+Z_2+Z_3+Z_{12}+Z_{23}+Z_{123}+V)-24W_{13}^{\beta}=0,$$

$$38(X_2+X_3+Z_{23})-6(X_1+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{12}+Y_{13}+Y_{23}+$$

$$+Y_{123}+Z_1+Z_2+Z_3+Z_{12}+Z_{13}+Z_{123}+V)-24W_{23}^{\beta}=0,$$

$$36(X_1+X_2+X_3+Z_{123})-8(Y_1+Y_2+Y_3+Y_{12}+Y_{13}+$$

$$+Y_{23}+Y_{123}+Z_1+Z_2+Z_3+Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}+V)-32W_{123}^{\beta}=0,$$

$$X_1+X_2+X_3+Y_1+Y_2+Y_3+Y_{12}+Y_{13}+Y_{23}+Y_{123}+Z_1+Z_2+Z_3+$$

$$+Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}+Z_{123}+V+W_1^{\alpha}+W_2^{\alpha}+W_3^{\alpha}+W_{12}^{\alpha}+W_{13}^{\alpha}+W_{23}^{\alpha}+W_{123}^{\alpha}+$$

$$+W_1^{\beta}+W_2^{\beta}+W_3^{\beta}+W_{12}^{\beta}+W_{13}^{\beta}+W_{23}^{\beta}+W_{123}^{\beta}=1.$$

$$V,\ Y_{\omega},\ Z_{\omega},\ W_{\omega}^{\alpha},\ W_{\omega}^{\beta}\ge 0\quad \forall\omega\subset J_k.$$

Отметим, что точка T с координатами $\frac{1}{32}$, $T\in R^{32}$, удовлетворяет полученной симплексной форме многогранника размещений.

Заключение

В настоящей работе получена симплексная форма общего многогранника размещений. Она необходима для применения полиномиального АК при решении вспомогательных задач линейного программирования в методах комбинаторного отсечения. Вследствие использования этой формы следует ожидать повышения эффективности методов отсечения.

Дальнейшие исследования целесообразно направить на изучение образов множеств вершин, смежных вершин, ребер, граней произвольной размерности, свойств многогранника размещений, проявившихся в результате трансформации его в симплексную форму, а также на изучение других свойств симплексной формы многогранника размещений.

О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець, І.М. Поляков

ОПТИМІЗАЦІЯ НА РОЗМІЩЕННЯХ: СИМПЛЕКСНА ФОРМА БАГАТОГРАННИКА РОЗМІЩЕНЬ

Розглянуто знаходження симплексної форми загального багатогранника розміщень, яку необхідно використовувати при застосуванні АК при розв'язуванні допоміжних задач лінійного програмування в методах комбінаторного відсікання в евклідовій комбінаторній оптимізації.

O.A. Yemets, A.O. Yemets, I.M. Polyakov

OPTIMIZATION ON ARRANGEMENTS: THE SIMPLEX SHAPE OF THE POLYHEDRON OF ARRANGEMENTS

It is considered the finding of the simplex form of the general polyhedron of arrangements, which must be used for applying Karmarkar`s algorithm in solving auxiliary problems of the linear programming in combinatorial cutting methods in the Euclidean combinatorial optimization.

1. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — Киев : Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ : Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. — 188 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
3. *Донець Г.П., Колєчкіна Л.М.* Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. — 309 с.
4. *Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю.* Прикладні методи комбінаторної оптимізації. — Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. — 142 с.
5. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Комбинаторная оптимизация на размещениях. — Киев : Наук. думка, 2008. — 159 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
6. *Емец О.А., Черненко О.А.* Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. — Киев : Наук. думка, 2011. — 154 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467.
7. *Emets' O.O., Roskladka O.V., Nedobachii S.I.* Irreducible system of constraints for a general polyhedron of arrangements // Ukrainian Mathematical Journal. — 2003. — **55**, N 1. — P. 1–12.
8. *Emets' O., Barbolina T.* On the solution of problems of nonlinear conditional optimization on arrangements by the cut-off method // Ibid. — 2003. — **55**, N 5. — P. 729–738.
9. *Emets O.A., Barbolina T.N.* Solving linear optimization problems on arrangements by the truncation method // Cybernetics and systems analysis — 2003. — **39**, N 6. — P. 889–896.
10. *Yemets O.A., Barbolina T.N.* Solution of Euclidean combinatorial optimization problems by the method of construction of a lexicographic equivalence // Ibid. — 2004 — **40**, N 5. — P. 726–734.
11. *Barbolina T.N., Emets O.A.* An all-integer cutting method for linear constrained optimization problems on arrangements // Computational mathematics and mathematical physics. — 2005. — **45**. — N 5. — P. 243–250.
12. *Yemets O., Chernenko O.A.* Nonreducible system of constraints of a combinatorial polyhedron in a linear-fractional optimization problem on arrangements // Cybernetics and systems analysis. — 2005. — **41**, N 2. — P. 246–254.
13. *Yemets O.A., Barbolina T.N., Chernenko O.A.* Solving optimization problems with linear-fractional objective functions and additional constraints on arrangements // Ibid — 2006. — **42**, N 5. — P. 680–685.

14. *Emets O.A., Ustian N. Yu.* Solving of some problems of combinatorial optimizationon arrangements and permutations of game type // Journal of Automation and Information Sciences. — 2006. — **38**, N 5. — P. 34–45.
15. *Emets O.A., Ustian N. Yu.* Studies of problems of combinatorial optimization of game type on arrangements // Ibid. — 2007. — **39**, N 1. — P. 24–35.
16. *Emets O.A., Barbolina T.N.* Classes of lexicographic equivalence in Euclidean combinatorial optimization on arrangements // Discrete mathematics and applications. — 2007. — 17, N 1. — P. 77–86.
17. *Iemets O.A., Olkhovskaja E.V.* Iterative method for solving combinatorial optimization problems of the game-type on arrangements // Journal of Automation and Information Sciences. — 2011. — **43**, N 5. — P. 52–63.
18. *Iemets O.O., Yemets Ye.M., Oleksiichuk Yu.F.* Direct cut-off method for combinatorial optimization problems with additional constraints // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — **47**, N 6. — P. 932–940.
19. *Iemets O.O., Yemets O.O.* Solving a linear problem of Euclidean combinatorial optimization on arrangements with the constant sum of the elements // Ibid. — 2012. — **48**, N 4. — P. 547–557.
20. *Sergienko I.V., Iemets O.A., Chernenko O.A.* Solving the conditional optimization problem for a fractional linear objective function on a set of arrangements by the branch and bound method // Ibid — 2012. — **48**, N 6. — P. 832–836.
21. *Iemets O. A., Olkhovskaja E. V.* Proving the convergence of the iterative method for solving a game-type combinatorial optimization problem on arrangements // Ibid. — 2013. — **49**, N 1. — P. 86–97.
22. *Iemets O. O., Barbolina T.M.* Properties of the linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under probabilistic uncertainty // Ibid. — 2016. — **52**, N 2. — P. 285–295.
23. *Iemets O.O., Barbolina T.M.* Solving linear unconstrained problems of combinatorial optimization on arrangements under stochastic uncertainty // Ibid — 2016. — **52**, N 3. — P. 457–466.
24. *Iemets O.O., Barbolina T.M.* Lexicographic equivalence in mixed combinatorial optimization of linear-fractional functions on arrangements // Ibid. — 2017. — **53**, N 2. — P. 244–254.
25. *Barbolina T.N.* Solution of mixed combinatorial optimization problems on arrangements by the method of construction of lexicographic equivalence // Ibid — 2013. — **49**, N 6. — P. 922–931.
26. *Iemets O.A.*, *Leonova M.V.* Simplex shape of the general permutable polyhedron specified by irreducible system // Journal of Automation and Information Sciences. — 2014. — **46**, N 2. — P. 42–55.
27. *Yemets O.A., Yemets Ye. M.* A modification of the method of combinatorial truncation in optimization problems over vertex-located sets // Ibid. — 2009. — **45**, N 5. — P. 785–791.
28. *Karmarkar N.* A new polynomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. — 1984. — **4**. — P. 373–395.

Получено 15.05.2017