УДК 517.5

*У.З. Грабова*

# РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ ЛИПШИЦА ТРИГАРМОНИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

## Введение

Теория конфликтно-управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории рассматриваются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями. Динамические процессы описываются обыкновенными дифференциальными играми.

Существенный вклад в разработку теории дифференциальных игр внесли Н.Н. Красовский, Л.С. Понтрягин, О. Хайек, В.Д. Батухтин, А.А. Чикрий, С.Д. Эйдельман, Л. Беркович, А. Фридман и др.

Принятие решений — постоянно решаемая в процессе управления задача. Она рассматривается, прежде всего, как процесс преобразования информации. Возрастающий интерес к исследованию задач принятия решений объясняется как теоретическими потребностями, так и важными практическими приложениями в технике, экономике, экологии и др. Использование научно обоснованных решений предлагает создание математических моделей разнообразных процессов и решение определенных задач оптимизации для этих моделей.

Разнообразие задач оптимизации требует, прежде всего, привлечения широкого набора средств современной теории аппроксимации. Фундамент теории аппроксимации заложен классическими работами К. Гаусса, П.Л. Чебышева, К. Вейерштрасса, Х. Бора, Д. Джексона, С.Н. Бернштейна и других о приближении многочленами индивидуальных функций, а также их классов.

В настоящее время теория приближения функций рассматривает в основном приближение отдельных функций и классов функций с помощью заданных подпространств, каждое из которых состоит из более простых функций. Наиболее существенные конечные результаты получены на классах периодических функций, это объясняется тем, что периодические функции обладают определенной симметрией экстремальных свойств.

Особый интерес представляют задачи, связанные с аппроксимацией функций полигармоническими функциями, естественно возникающими как в разделах математического анализа, так и в прикладных задачах. Несмотря на успешное и активное развитие рассматриваемой области теории приближений, остается большое количество открытых вопросов и нерешенных задач.

Данная работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств тригармонических интегралов Пуассона на классах функций, которые удовлетворяют условию Липшица в равномерной метрике.

Отметим, что результаты работы можно применить как вспомогательную математическую модель в задаче принятия решений.

## Решение задачи Колмогорова–Никольского для тригармонических интегралов Пуассона на классах $H^1$

Пусть $L$ — пространство $2\pi$-периодических суммируемых на периоде функций с нормой $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)\,dt|$, а $C$ — пространство $2\pi$-периодических непрерывных функций, в котором норма определяется равенством $\|f\|_C = \max_x |f(x)|$.

Множество функций $f \in C$, которые удовлетворяют условию Липшица (см., например, [1, с. 120]), т.е.

$$|f(x+h) - f(x)| \le |h|, \ 0 \le h \le 2\pi, \ x \in \mathrm{R},$$

обозначают $H^1$ и называют классом Липшица.

Пусть $U(\rho; x) = U_n(\rho; f; x)$ — полигармоническая функция порядка $n$ в единичном круге $|z| < 1$ $(z = \rho e^{ix})$, т.е. решение уравнения

$$\Delta^n U(\rho; x) = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа в полярных координатах и $\Delta^n := \Delta(\Delta^{n-1})$.

Решение уравнения (1) с заданными граничными условиями

$$U(\rho; x)\big|_{\rho=1} = f(x); \ \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} U(\rho; x)\big|_{\rho=1} = 0, \ k = 1, 2, ..., n-1, \tag{2}$$

где $f(x)$ — суммируемая $2\pi$-периодическая функция, обозначим $P_n(\rho; f; x) = U_n(\rho; f; x)$, $n \in \mathrm{N}$. Согласно формуле (3.127.5) из монографии М.Ф. Тимана [2] решение краевой задачи (1)–(2) можно записать

$$P_n(\rho; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\rho; n)(a_i \cos ix + b_i \sin ix), \ 0 \le \rho < 1, \tag{3}$$

где $a_i$, $b_i$ — коэффициенты Фурье функции $f$,

$$\lambda_i(\rho; n) = \rho^i \sum_{i=0}^{n-1} (1-\rho^2)^k Q(k; i),$$

$$Q(k; i) = \frac{i(i+2)(i+4)...(i+2k-2)}{k!2^k}, \ i = 0, 1, ..., \ (Q(k; 0) = 1).$$

Положив $\rho = e^{-1/\delta}$, $\delta > 0$, получим

$$P_n(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\delta; n)(a_i \cos ix + b_i \sin ix),$$

$$\lambda_i(\delta; n) = e^{-i/\delta} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - e^{-2/\delta})^k Q(k; i).$$

При $n = 1, 2, 3$ из формулы (3) имеем

$$P_1(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/\delta}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$P_2(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1 - e^{-2/\delta})\right) e^{-k/\delta}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$P_3(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$\lambda_\delta(k) = \left(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-2/\delta})(1 - e^{-2/\delta})\,k + \frac{1}{8}(1 - e^{-2/\delta})^2 k^2\right) e^{-k/\delta}.$$

Величины $P_i(\delta; f; x)$ называют при $i = 1$ интегралом Пуассона [3], при $i = 2$ — бигармоническим интегралом Пуассона [4] и при $i = 3$ — тригармоническим интегралом Пуассона функции $f$.

Цель данной работы — получение асимптотического равенства при $\delta \to \infty$ величины

$$\mathrm{E}(H^1; P_3(\delta))_C = \sup_{f \in H^1} \left\| f(\cdot) - P_3(\delta; f; \cdot) \right\|_C. \tag{4}$$

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\delta) = \varphi(\mathrm{M}\,; P_3(\delta))$ $(\mathrm{M} \subseteq C)$ такая, что при $\delta \to \infty$ $\mathrm{E}(\mathrm{M}\,; P_3(\delta))_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, то, следуя А.И. Степанцу [1, с.198], будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для класса $\mathrm{M}$ и тригармонического интеграла Пуассона в равномерной метрике.

Задача Колмогорова–Никольского на фиксированных функциональных компактах для интегралов Пуассона в равномерной метрике была решена И.П. Натансоном [5], Б. Надем [6] и позже — в работах [7–10], а для бигармонических — в работах С. Каниева [11], П. Пых [12] и др. [13–15].

Изучению аппроксимативных свойств как интегралов Пуассона, так и бигармонических интегралов Пуассона на различных функциональных классах посвящены также работы В.А. Баскакова [16], Э.Л. Штарка [17], Л.П. Фалалеева [18], Т.И. Аманова и Л.П. Фалалеева [19] и других авторов [20–26].

Отметим, что решения аналогичной задачи о нахождении сильной асимптотики точных верхних граней (4) отклонений тригармонических интегралов Пуассона на классах $H^1$ до сих пор нет. Это обусловлено, в частности, тем, что тригармонический интеграл Пуассона не является положительным оператором, в отличие от интеграла Пуассона и бигармонического интеграла Пуассона, и для исследования его аппроксимативных свойств нужны другие подходы и идеи.

Основной результат работы содержится в следующем утверждении.

**Теорема.** При $\delta \to \infty$ имеет место равенство

$$\mathrm{E}(H^1; P_3(\delta))_C = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \tag{5}$$

*Доказательство.* Поскольку класс $H^1$ совпадает с классом $W^1$ абсолютно непрерывных функций $f(t)$, у которых почти всюду $\left|f'(x)\right| \le 1$, используем методы теории приближения, разработанные в [27].

Аналогично [9] для тригармонического интеграла Пуассона определим функцию $\tau(u)$ следующим образом:

$$\tau(u) = \begin{cases} (1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)\, e^{-u})\,\delta, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\[2ex] (1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)\, e^{-u})\, u^{-1}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{6}$$

где $\gamma = \dfrac{\delta}{4}(3 - e^{-2/\delta})(1 - e^{-2/\delta})$, $\theta = \dfrac{\delta^2}{8}(1 - e^{-2/\delta})^2$.

Положим

$$A(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{0}^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt, \tag{7}$$

$$a(\tau)=\int_{|t|\geq\frac{\delta\pi}{2}}^{\infty}\left|\int_{0}^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt. \tag{8}$$

Если для функции $\tau(u)$, определенной формулой (6), интеграл $A(\tau)$ сходится, то из теоремы А работы [27] следует, что при $\delta\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathrm{E}(H^1;P_3(\delta))_C=\frac{1}{\delta}A(\tau)+O\left(\frac{1}{\delta}a(\tau)\right). \tag{9}$$

Согласно теореме 1 указанной выше работы для сходимости интеграла (7) необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы

$$\int_{0}^{1/2}u\left|d\tau'(u)\right|,\ \int_{1/2}^{\infty}\left|u-1\right|\left|d\tau'(u)\right|, \tag{10}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\left|\tau(u)\right|}{u}du,\ \int_{0}^{1}\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}du. \tag{11}$$

Для оценки первого интеграла из (10) разобьем промежуток $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ на две части: $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta},\frac{1}{2}\right]$ $(\delta>2)$. Учитывая, что при $u\in\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$ $\tau''\geq 0$, а также неравенства

$$e^{-u}\leq 1,\ e^{-u}\leq 1-u+\frac{u^2}{2},\ u\geq 0, \tag{12}$$

получаем

$$\int_{0}^{1/\delta}u\left|d\,\tau'(u)\right|=(u\tau'(u)-\tau(u))\Big|_{0}^{1/\delta}=$$

$$=\delta\left(\frac{1}{\delta}\left(1-\gamma+\frac{1}{\delta}(\gamma-2\theta)+\frac{\theta}{\delta^2}\right)e^{-1/\delta}-1+e^{-1/\delta}+\frac{\gamma}{\delta}e^{-1/\delta}+\frac{\theta}{\delta^2}e^{-1/\delta}\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{2}-\theta\right)+\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\gamma}{2}+\theta\right)\right). \tag{13}$$

Поскольку $\frac{1}{2}-\theta\leq\frac{1}{\delta}$, $\frac{\gamma}{2}+\theta\leq\frac{3}{2}$, то соотношение (13) можно записать в виде

$$\int_{0}^{1/\delta}u\left|d\tau'(u)\right|=O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \tag{14}$$

Пусть теперь $u\in\left[\frac{1}{\delta},\frac{1}{2}\right]$. Положим

$$\tau_1(u)=\left(1-(1+\gamma u+\theta u^2)\,e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3\right)u^{-1}, \tag{15}$$

$$\tau_2(u)=\frac{4}{3\delta^2}+\frac{1}{\delta}u, \tag{16}$$

$$\tau_3(u)=\frac{1}{6}u^2. \tag{17}$$

Тогда $\tau(u)=\tau_1(u)+\tau_2(u)+\tau_3(u)$ и

$$\int_{1/\delta}^{1/2} u\left|d\tau'(u)\right| \le \int_{1/\delta}^{1/2} u\left|d\tau_1{}'(u)\right| + \int_{1/\delta}^{1/2} u\left|d\tau_2{}'(u)\right| + \int_{1/\delta}^{1/2} u\left|d\tau_3{}'(u)\right|. \tag{18}$$

Для оценки первого интеграла в правой части неравенства (18) рассмотрим вспомогательную функцию

$$\widetilde{\mu}(u)=1-(1+\gamma u+\theta u^2)\,e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}u-\frac{1}{\delta}u^2-\frac{1}{6}u^3. \tag{19}$$

Поскольку

$$\widetilde{\mu}'(u)=e^{-u}-\gamma e^{-u}+\gamma u e^{-u}-2\theta u e^{-u}+\theta u^2 e^{-u}-\frac{4}{3\delta^2}-\frac{2}{\delta}u-\frac{1}{2}u^2,$$

$$\widetilde{\mu}''(u)=-e^{-u}+2\gamma e^{-u}-\gamma u e^{-u}-2\theta e^{-u}+4\theta u e^{-u}-\theta u^2 e^{-u}-\frac{2}{\delta}-u,$$

$$\widetilde{\mu}(0)=0,\ \widetilde{\mu}'(0)=1-\gamma-\frac{4}{3\delta^2}<0,\ \widetilde{\mu}''(0)=-1+2\gamma-2\theta-\frac{2}{\delta}<0,$$

можно показать, что при $u\ge 0$

$$\widetilde{\mu}(u)\le 0,\ \widetilde{\mu}'(u)\le 0,\ \widetilde{\mu}''(u)\le 0. \tag{20}$$

Учитывая (20) и (12), а также неравенства

$$e^{-u}\le 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24},\ e^{-u}\ge 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6},\ e^{-u}\ge 1-u,\ u\ge 0,$$

получаем

$$\left|\widetilde{\mu}(u)\right|\le u\left(\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\right)+u^2\left(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\right)+u^3\left(\frac{\gamma}{2}-\theta\right)+u^4\left(\frac{1}{24}+\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\left|\widetilde{\mu}'(u)\right|\le \left(\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\right)+2u\left(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\right)+3u^2\left(\frac{\gamma}{2}-\theta\right)+u^3\left(\frac{1}{6}+2\theta\right),$$

$$\left|\widetilde{\mu}''(u)\right|\le 2\left(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\right)+6u\left(\frac{\gamma}{2}-\theta\right)+u^2\left(\frac{1}{2}+6\theta\right).$$

Далее, учитывая оценки

$$\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\le\frac{3}{\delta^3},\ \frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\le\frac{3}{\delta^2},\ \frac{\gamma}{2}-\theta\le\frac{2}{\delta},$$

$$\frac{1}{24}+\frac{\theta}{2}\le 1,\ \frac{1}{2}+6\theta\le 3,\ \frac{1}{6}+2\theta\le 2,$$

находим

$$\left|\widetilde{\mu}(u)\right|\le\frac{3}{\delta^3}u+\frac{3}{\delta^2}u^2+\frac{2}{\delta}u^3+u^4, \tag{21}$$

$$\left|\widetilde{\mu}'(u)\right| \le \frac{3}{\delta^3} + \frac{6}{\delta^2}u + \frac{6}{\delta}u^2 + 2u^3, \tag{22}$$

$$\left|\widetilde{\mu}''(u)\right| \le \frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta}u + 3u^2. \tag{23}$$

При $u \ge \frac{1}{\delta}$, согласно равенствам (15) и (19), имеем

$$\left|d\tau_1'(u)\right| \le \left(\frac{2\left|\widetilde{\mu}(u)\right|}{u^3} + \frac{2\left|\widetilde{\mu}'(u)\right|}{u^2} + \frac{\left|\widetilde{\mu}''(u)\right|}{u}\right)du.$$

Далее, из соотношений (21)–(23) следует оценка

$$\int_{1/\delta}^{1/2} u\left|d\tau_1'(u)\right| \le \int_{1/\delta}^{1/2}\left(\frac{6}{\delta^3}u^{-1} + \frac{6}{\delta^2} + \frac{4}{\delta}u + 2u^2\right)du +$$

$$+\int_{1/\delta}^{1/2}\left(\frac{6}{\delta^3}u^{-1} + \frac{12}{\delta^2} + \frac{12}{\delta}u + 4u^2\right)du + \int_{1/\delta}^{1/2}\left(\frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta}u + 3u^2\right)du = O(1). \tag{24}$$

Очевидно, что

$$\int_{1/\delta}^{1/2} u\left|d\tau_2'(u)\right| + \int_{1/\delta}^{1/2} u\left|d\tau_3'(u)\right| = O(1), \tag{25}$$

где функции $\tau_2(u)$ и $\tau_3(u)$ определяются равенствами (16) и (17) соответственно. Объединяя (14), (18), (24) и (25), получаем

$$\int_{0}^{1/2} u\left|d\tau'(u)\right| = O(1). \tag{26}$$

Оценим следующий интеграл из (10). Отметим что

$$\int_{1/2}^{\infty} \left|u-1\right|\left|d\tau'(u)\right| \le \int_{1/2}^{\infty} u\left|d\tau'(u)\right|. \tag{27}$$

Из равенства (6) при $u \ge \frac{1}{\delta}$ имеем

$$d\tau'(u) = \{e^{-u}((2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2)u^{-1} - 2e^{-u}((1-\gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2)u^{-2} +$$

$$+ 2(1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u})u^{-3}\}\,du. \tag{28}$$

Учитывая (28), получаем

$$\int_{1/2}^{\infty} u\left|d\tau'(u)\right| \le \int_{1/2}^{\infty} e^{-u}((2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2)\,du +$$

$$+2\int_{1/2}^{\infty} e^{-u}u^{-1}((1-\gamma) + u(\gamma - 2\theta) + \theta u^2)\,du + 2\int_{1/2}^{\infty}(1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u})u^{-2}du. \tag{29}$$

Далее, используя следующие оценки при $u \ge 0$:

$$1 - (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u} \le 1, \tag{30}$$

$$ue^{-u}((1-\gamma)+u(\gamma-2\theta)+\theta u^2)\le 2,$$

$$(2\gamma-2\theta-1)+u(4\theta-\gamma)-\theta u^2\le 8, \tag{31}$$

соотношение (29) можем записать

$$\int_{1/2}^{\infty} u\left|d\tau'(u)\right|\le 8\int_{1/2}^{\infty} e^{-u}du+6\int_{1/2}^{\infty} u^{-2}du\le K_1,$$

а значит,

$$\int_{1/2}^{\infty}\left|u-1\right|\left|d\tau'(u)\right|=O(1). \tag{32}$$

Для оценки первого интеграла из (11) разобьем промежуток $[0,\infty)$ на три части: $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta},1\right]$, $[1,\infty)$. Поскольку $\tau(u)\ge 0$ на $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$, то из (6), используя неравенство

$$1-e^{-u}-\gamma ue^{-u}-\theta u^2e^{-u}\le\frac{2}{\delta^2}u+\frac{2}{\delta}u^2+u^3,\ u\ge 0, \tag{33}$$

получаем

$$\int_0^{1/\delta}\frac{\left|\tau(u)\right|}{u}du=\delta\int_0^{1/\delta}(1-e^{-u}-\gamma ue^{-u}-\theta u^2e^{-u})\frac{du}{u}\le\delta\int_0^{1/\delta}\left(\frac{2}{\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+u^2\right)du\le\frac{K_2}{\delta^2}. \tag{34}$$

Из формулы (6), приняв во внимание (19) и неравенство (21), будем иметь

$$\left|\int_{1/\delta}^{1}\frac{\tau(u)}{u}du-\frac{4}{3\delta^2}\int_{1/\delta}^{1}\frac{du}{u}-\frac{1}{\delta}\int_{1/\delta}^{1}du-\frac{1}{6}\int_{1/\delta}^{1}udu\right|\le$$

$$\le\int_{1/\delta}^{1}\frac{\left|\tilde{\mu}(u)\right|}{u^2}du\le\int_{1/\delta}^{1}\left(\frac{3}{\delta^3}u^{-1}+\frac{3}{\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+u^2\right)du\le K_3,$$

откуда следует, что

$$\int_{1/\delta}^{1}\frac{\left|\tau(u)\right|}{u}du=\frac{4}{3\delta^2}\int_{1/\delta}^{1}\frac{du}{u}+\frac{1}{\delta}\int_{1/\delta}^{1}du+\frac{1}{6}\int_{1/\delta}^{1}udu+O(1)=O(1). \tag{35}$$

Аналогично, когда $u\in[1,\infty)$, из (6) получаем

$$\left|\int_1^{\infty}\frac{\tau(u)}{u}du-\int_1^{\infty}\frac{du}{u^2}\right|\le\int_1^{\infty}\frac{e^{-u}(1+\gamma u+\theta u^2)}{u^2}du=\int_1^{\infty}\left(\frac{e^{-u}}{u^2}+\frac{\gamma e^{-u}}{u}+\theta e^{-u}\right)du\le K_4. \quad 36)$$

Принимая во внимание оценки (34)–(36), находим

$$\int_0^{\infty}\frac{\left|\tau(u)\right|}{u}du=O(1). \tag{37}$$

Оценим второй интеграл из (11). Докажем сначала справедливость формулы

$$\int_0^1\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}du=\int_0^1\frac{\left|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\right|}{u}du+O(H(\tau)), \tag{38}$$

где $\lambda(u)=(1+\gamma u+\theta u^2)\,e^{-u}$,

$$H(\tau)=\left|\tau(0)\right|+\left|\tau(1)\right|+\int\limits_0^{1/2}u\left|d\tau'(u)\right|+\int\limits_{1/2}^{\infty}\left|u-1\right|\left|d\tau'(u)\right|. \tag{39}$$

Из соотношения (6) находим

$$\tau(1-u)=\begin{cases}(1-\lambda(1-u))\,\delta, & 1-\dfrac{1}{\delta}\le u\le 1,\\ (1-\lambda(1-u))(1-u)^{-1}, & u\le 1-\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{40}$$

$$\tau(1+u)=\begin{cases}(1-\lambda(1+u))\,\delta, & -1\le u\le \dfrac{1}{\delta}-1,\\ (1-\lambda(1+u))(1+u)^{-1}, & u\ge \dfrac{1}{\delta}-1.\end{cases} \tag{41}$$

Представим $\int\limits_0^1\dfrac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}du$ в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_0^1\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}du=\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}du+\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}du. \tag{42}$$

Оценим сначала первое слагаемое правой части (42). Для этого прибавим и вычтем под знаком модуля в подынтегральной функции величину $\lambda(1-u)-\lambda(1+u)$. Получим

$$\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}du\le\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{\left|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\right|}{u}du+$$

$$+\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)+\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\right|}{u}du. \tag{43}$$

Далее, поскольку в силу соотношений (40) и (41) при $u\in\left[0,1-\dfrac{1}{\delta}\right]$ $\lambda(1-u)=$ $=1-(1-u)\,\tau(1-u)$, $\lambda(1+u)=1-(1+u)\,\tau(1+u)$,

$$\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)+\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\right|}{u}du=$$

$$=\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)+1-(1-u)\,\tau(1-u)-1+(1+u)\,\tau(1+u)\right|}{u}du\le$$

$$\le\int\limits_0^{1-1/\delta}\left|\tau(1-u)\right|du+\int\limits_0^{1-1/\delta}\left|\tau(1+u)\right|du. \tag{44}$$

Так как интегралы вида (10) сходятся, то, согласно лемме 2 работы [27],

$$\left|\tau(u)\right|=O(H(\tau)), \tag{45}$$

где $H(\tau)$ определяется формулой (39).

На основание соотношения (45) из (44) заключаем, что

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)+\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\right|}{u}\,du = O(H(\tau)). \tag{46}$$

Объединяя соотношения (43) и (46), получаем

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}\,du = \int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\right|}{u}\,du + O(H(\tau)). \tag{47}$$

Аналогично можно показать, что

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}\,du = \int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{\left|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\right|}{u}\,du + O(H(\tau)). \tag{48}$$

Сопоставляя соотношения (47) и (48), приходим к формуле (38).

Учитывая

$$\int\limits_0^1 \frac{\left|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)\right|}{u}\,du =$$

$$= \int\limits_0^1 \left| e^{-1+u} - e^{-1-u} + \gamma(1-u)e^{-1+u} - \gamma(1+u)e^{-1-u} + \theta(1-u)^2 e^{-1+u} - \theta(1+u)^2 e^{-1-u} \right| \frac{du}{u} =$$

$$= O(1),$$

а также оценки (26), (32), из (38) получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}\,du = O(1). \tag{49}$$

Согласно теореме 1 из [27] с учетом оценок (26), (32), (37) и (49) заключаем, что интеграл вида (7) сходится, причем имеет место оценка

$$A(\tau) = O(1). \tag{50}$$

Прежде чем перейти к оценке интеграла (8), представим его в виде двух слагаемых:

$$\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du = \left(\int\limits_0^{1/\delta} + \int\limits_{1/\delta}^{\infty}\right)\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Дважды интегрируя по частям и учитывая равенства $\tau(0)=0$ и $\lim\limits_{u\to\infty}\tau(u) = \lim\limits_{u\to\infty}\tau'(u) = 0,$ получаем

$$\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du = \frac{1}{t^2}\left((1-\gamma)\,\delta\cos\frac{\beta\pi}{2} + \delta^2\left(1-\left(1+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\theta}{\delta^2}\right)e^{-1/\delta}\right)\right)\cos\left(\frac{t}{\delta}+\frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{t^2}\left(\int\limits_0^{1/\delta} + \int\limits_{1/\delta}^{\infty}\right)\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Приняв во внимание неравенство (33) и

$$1-\gamma \le \frac{2}{\delta^2}, \tag{51}$$

 ISSN 0572-2691

будем иметь

$$\left|\int_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le \frac{K_1}{t^2\delta}+\frac{1}{t^2}\left(\int_0^{1/\delta}+\int_{1/\delta}^{1}+\int_1^\infty\right)\left|\tau''(u)\right|du. \qquad (52)$$

Рассмотрим первый интеграл из правой части соотношения (52). Поскольку $\tau''(u)\ge 0$ при $\left[0,\frac{1}{\delta}\right]$, имеют место неравенства (12), (51) и $\gamma-2\theta\le\frac{3}{\delta}, \theta\le\frac{1}{2}$, то приходим к оценке

$$\int_0^{1/\delta}\left|\tau''(u)\right|du=\delta e^{-1/\delta}\left((1-\gamma)+\frac{\gamma-2\theta}{\delta}+\frac{\theta}{\delta^2}\right)-\delta(1-\gamma)=O\left(\frac{1}{\delta}\right). \qquad (53)$$

Пусть $u\in\left[\frac{1}{\delta},1\right]$. Аналогично, как и при оценке первого интеграла из (10), на промежутке $\left[\frac{1}{\delta},\frac{1}{2}\right]$ можно установить оценку

$$\int_{1/\delta}^{1}\left|\tau''(u)\right|du=O(1). \qquad (54)$$

Пусть теперь $u\in[1,\infty)$. Исходя из формулы (28), получаем

$$\int_1^\infty\left|\tau''(u)\right|du\le\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{u}((2\gamma-2\theta-1)+u(4\theta-\gamma)-\theta u^2)\,du+$$

$$+2\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{u^2}((1-\gamma)+u(\gamma-2\theta)+\theta u^2)\,du+2\int_1^\infty(1-(1+\gamma u+\theta u^2)\,e^{-u})\frac{du}{u^3}.$$

Учитывая неравенства (30), (31) и

$$e^{-u}((1-\gamma)+u(\gamma-2\theta)+\theta u^2)\le 2,\ \ u\ge 1,$$

можно убедиться, что

$$\int_1^\infty\left|\tau''(u)\right|du\le K. \qquad (55)$$

Из оценок (53)–(55) следует

$$\int_0^\infty\left|\tau''(u)\right|du=O(1).$$

Отсюда и из (52) получаем

$$a(\tau)=O\left(\frac{1}{\delta}\right). \qquad (56)$$

Подставив соотношения (50) и (56) в формулу (9), получим равенство (5).

Использование новейших идей и методов аппроксимации способствует ее проникновению в самые различные области прикладных направлений. Например, в работе [28] для исследования конфликтно-управляемых процессов в качестве математической основы используются идеи метода разрешающих функций, в частности обобщенных матричных функций Миттаг–Леффлера [29], для нахождения которых применяется аппарат интерполяционных многочленов Лагранжа–Сильвестра [30].

## Заключение

В настоящей работе исследовано асимптотическое поведение точных верхних граней равномерных приближений тригармонических интегралов Пуассона на классах Липшица. Полученные результаты содержат решение задачи Колмогорова–Никольского для линейных операторов $P_3(\delta)$ на классах $H^1$, что может использоваться как математическая модель в задачах принятия решений, связанных с аппроксимацией накопленной статистической информации.

*У.З. Грабова*

## РІВНОМІРНІ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСІВ ЛІПШИЦЯ ТРИГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Запропоновано використання методів теорії наближення функцій для апроксимації статистичної інформації. Задачу Колмогорова–Нікольського розглянуто як математичну модель при розв'язуванні задач оптимізації. Отримано асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень тригармонійними інтегралами Пуассона функцій класу Ліпшиця в рівномірній метриці. Проаналізовано можливість застосування результатів даної роботи для прогнозування, яке в свою чергу є допоміжною процедурою в задачі прийняття рішень.

*U.Z. Hrabova*

## UNIFORM APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS OF LIPSCHITZ CLASS BY THREEHARMONIC POISSON INTEGRALS

We proposed the use of methods of the theory of approximation of functions for the approximation of statistical information. The Kolmogorov-Nikolsky problem is considered as a mathematical model for solving optimization problems. Asymptotic equalities are obtained for the exact upper bounds of the approximations by the threeharmonic Poisson integrals of functions of the Lipschitz class in the uniform metric. We analyzed the possibility of applying the results of this work to forecasting, which in turn represents an auxiliary procedure in the decision-making task.

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
2. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Киев : Наук. думка, 2009. — 376 с.
3. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of $(\psi, \beta)$-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric // Ukr. Math. J. — 2009. — **61**, N 11. — P. 1757–1779.
4. *Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2007. — **59**, N 8. — P. 1224–1237.
5. *Натансон И.П.* О порядке приближения непрерывной $2\pi$-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, № 1. — С. 11–14.
6. *Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci Hungar. — 1950. — **1**. — P. 183–188.
7. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by $\lambda$-methods of summation of their Fourier integrals // Ukr. Math. J. — 2004. — **56**, N 9. — P. 1509–1525.
8. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of $(\psi, \beta)$-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators // Ibid. — 2005. — **57**, N 8. — P. 1297–1315.

9. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric // Ibid. — 2009. — **61**, N 12. — P. 1893–1914.
10. *Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A.* Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ // Mathematical Notes. — 2014. — **96**, № 5. — P. 1008–1019.
11. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. — 1963. — **153**, № 5. — С. 995–998.
12. *Pych P.* On a biharmonic function in unit disc //Ann. pol. math. — 1968. — **20**, № 3. — P. 203–213.
13. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ functions by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2011. — **63**, N 7. — P. 1083–1107.
14. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of $(\psi,\beta)$-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2012. — **63**, N 12. — P. 1820–1844.
15. *Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I.* Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$ // Ibid. — 2017. — **68**, N 11. — P. 1727–1740.
16. *Baskakov V.A.* Some properties of operators of Abel–Poisson type // Mathematical Notes. — 1975. — **17**, N 2. — P. 101–107.
17. *Stark E.L.* The complete asymptotic expansion for the measure of approximation of Abel–Poisson's singular integral for $\mathrm{Lip}\,1$ // Ibid. — 1973. — **13**, N 1. — P. 14–18.
18. *Фалалеев Л.П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Материалы всесоюз. симп. — Алма-Ата : Наука, 1976. — С. 163–167.
19. *Аманов Т.И., Фалалеев Л.П.* Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля-Пуассона // 5-е сов.-чех. совещание по применению методов теории функций и функ. анализа к задачам мат. физики. Алма-Ата : Тр. Совещаний, 1976. — Новосибирск, 1976. — С. 13–16.
20. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* On the approximation of functions of the Holder class by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2000. — **52**, N 7. — P. 1113–1117.
21. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals // Ibid. — 2002. — **54**, N 1. — P. 51–63.
22. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2002. — **54**, N 9. — P. 1462–1470.
23. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals // Ukr. Math. J. – 2009. – 61, N 1. – P. 86-98.
24. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2009. — **61**, N 3. — P. 399–413.
25. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of function from class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric // Ibid. — 2008. — **60**, N 5. — P. 769–798.
26. *Жигалло Т.В., Харкевич Ю І.* Апроксимативні властивості бігармонічних операторів Пуассона на классах $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ // Ibid. — 2017. — **69**, № 5. — С. 650–656.
27. *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. II // Изв. вузов. — 1965. — **46**, № 3. — С. 15–31.
28. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
29. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Там же. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
30. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1967. — 576 с.

*Получено 27.10.2017*