УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. Горбань

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИЯ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

Введение

Одним из физических феноменов реального мира является феномен статистической устойчивости массовых явлений, проявляющийся в стабильности относительных частот массовых событий, выборочных средних и вообще любых статистик.

В фундаментальном английском справочнике по математике [1] этот феномен представлен следующим образом*: «Статистическое описание и вероятностные модели применимы к физическим процессам, проявляющим следующее эмпирическое свойство. Хотя результат одиночного измерения физической величины x не может быть предсказан с достаточно высокой точностью, значение некоторой подходящей функции $y = y(x_1, x_2, \ldots)$ от множества (выборки) результатов $x_1, x_2, \ldots$ повторных измерений x часто может быть предсказано с существенно лучшей точностью и это значение y может быть полезным для принятия решений. Такая функция y множества выборочных значений называется статистикой, а свойство повышенной предсказуемости — статистической устойчивостью. Статистическая устойчивость в каждом конкретном случае является эмпирическим физическим законом, который, как и закон гравитации, или закон индукции, вытекает из опыта, а не из математики. Часто точность предсказания статистики возрастает с повышением объема n выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (физические законы больших чисел). Наиболее известными статистиками являются статистические относительные частоты и выборочные средние».

* В оригинале эта фраза звучит следующим образом: «Statistical description and probability models apply to physical processes exhibiting the following empirical phenomenon. Even though individual measurements of a physical quantity x cannot be predicted with sufficient accuracy, a suitably determined function $y = y(x_1, x_2, \ldots)$ of a set (sample) of repeated measurements $x_1, x_2, \ldots$ of x can often be predicted with substantially better accuracy, and the prediction of y may still yield useful decisions. Such a function y of a set of sample values is called a statistic, and the incidence of increased predictability is known as statistical regularity. Statistical regularity, in each individual situation, is an empirical physical law which, like the law of gravity or the induction law, is ultimately derived from experience and not from mathematics. Frequently a statistic can be predicted with increasing accuracy as the size n of the sample $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ increases (physical laws of large numbers). The best-known statistics are statistical relative frequencies and sample averages».

Обратим внимание, авторы этого справочника не просто подчеркивают физическую природу феномена статистической устойчивости и его важность для решения практических задач, а ставят его в ряд фундаментальных явлений природы, таких как феномен гравитации и феномен индукции.

В настоящее время известно две теории, описывающие этот феномен: теория вероятностей, имеющая многовековую историю развития, и теория гиперслучайных явлений, разрабатываемая в последние десятилетия.

Эти теории интерпретировали и интерпретируют по-разному. Физики и инженеры обычно относят их к физическим (физико-математическим), а математики — к математическим дисциплинам. Кто из них прав?

Цель статьи — проанализировать характер этих теорий и ответить на поставленный вопрос.

1. Теория вероятностей

Теория вероятностей первоначально создавалась в интересах описания феномена статистической устойчивости и рассматривалась как физическая дисциплина. Так воспринимал ее, например, Д. Гильберт, когда формулировал в 1900 г. на II Международном конгрессе математиков наиболее важные, по его мнению, проблемы, «исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки» [2]. В качестве шестой проблемы им было названо «Математическое изложение аксиом физики».

Раздел, посвященный проблеме аксиоматизации физики, он начал со слов: «С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика».

На начало XX века объектом исследования теории вероятностей как физической, а точнее, как физико-математической, дисциплины считался феномен статистической устойчивости, а предметом исследования — способы его описания с помощью «случайных моделей». Кавычки поставлены здесь для подчеркивания того обстоятельства, что на тот момент времени понятие случайности еще не было формализовано. Поэтому под словами «случайные модели» понимались математические модели, зависящие от расплывчатого понятия «случая».

На призыв Д. Гильберта откликнулись многие ученые, предлагавшие различные варианты аксиоматизации теории вероятностей. Один из таких вариантов, предложенный А.Н. Колмогоровым в 1929 г. [3, 4], нашел всеобщее признание и распространение. Он стал настолько популярным, что был возведен даже в ранг международного стандарта [5] и в настоящее время считается классическим.

По мере развития теории вероятностей под влиянием идей А.Н. Колмогорова физическая сущность теории вероятностей постепенно начала отходить на задний план, уступая место математике. В комментарии к шестой проблеме Д. Гильберта Б.В. Гнеденко писал [2]: «… для Гильберта теория вероятностей является главой физики, в которой математические методы играют выдающуюся роль. Сейчас эта точка зрения уже не имеет такого распространения, которым она пользовалась на рубеже двух столетий, поскольку с тех пор достаточно определенно выявилось собственно математическое содержание теории вероятностей. Теперь уже не вызывает сомнения то, что созданные в ней понятия и методы исследования, а также полученные результаты имеют общенаучное значение, далеко выходящее за пределы физики и даже всего естествознания».

Смещение акцента в сторону математики представляется вполне естественным, поскольку аксиоматический подход А.Н. Колмогорова, базирующийся на теории множеств и теории меры, не связан с физикой реального мира, в частности с феноменом статистической устойчивости. В этом подходе физические понятия вообще не фигурируют.

Теория вероятностей А.Н. Колмогорова базируется на абстрактных математических понятиях: пространстве элементарных событий Ω, борелевской σ-алгебре $\Im$, вероятностной мере P, определяющих вероятностное пространство $(\Omega, \Im, P)$, и на четырех математических аксиомах:

1) для любого события $A \in \Im$ вероятность $P(A) \geq 0$;

2) вероятность $P(\Omega) = 1$;

3) для конечного числа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_N$ вероятность объединения событий равна сумме вероятностей;

4) для бесконечного числа попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots$ вероятность объединения событий равна сумме вероятностей (аксиома счетной аддитивности).

При таком варианте аксиоматизации теория вероятностей оперирует не с реальными физическими объектами, а с их абстрактными математическими моделями — случайными событиями, величинами и функциями. Под случайным явлением (моделью) в данном случае понимается любое событие, величина или функция, характеризуемая вероятностной мерой. Явления, не имеющие вероятностной меры, случайными не считаются.

В качестве объекта исследования аксиоматизированной теории вероятностей А.Н. Колмогорова оказывается абстрактное вероятностное пространство, а в качестве предмета исследования — связи между абстрактными случайными моделями (таблица).

Таблица

Наименование теории	Математическая точка зрения	Физическая точка зрения
Теория вероятностей	Объект исследования — вероятностное пространство Предмет исследования — связи между случайными моделями	Объект исследования — массовые явления (феномен статистической устойчивости) или одиночные многозначные явления Предмет исследования — способы описания массовых явлений или одиночных многозначных явлений случайными моделями
Теория гиперслучайных явлений	Объект исследования — множество вероятностных пространств Предмет исследования — связи между гиперслучайными моделями	Объект исследования — массовые явления (феномен статистической устойчивости) или одиночные многозначные явления Предмет исследования — способы описания массовых явлений или одиночных многозначных явлений гиперслучайными моделями

В рамках физико-математической теории вероятностей, описывающей реальные массовые явления (события, величины, процессы и поля), связь с реальным физическим миром обеспечивают две физические гипотезы адекватности [6, 7].

Гипотеза 1 — гипотеза идеальной статистической устойчивости, предполагающая наличие сходимости статистик (в частности, сходимости относительной частоты любого события к некоторой постоянной величине, трактуемой в физике и прикладных разделах теории вероятностей как вероятность).

Гипотеза 2 — гипотеза адекватного описания реальных физических явлений случайными моделями.

Объектом исследования такой физико-математической теории вероятностей является идеализированный феномен статистической устойчивости (в предположении наличия сходимости статистик), а предметом исследования — способы его описания случайными моделями (см. таблицу).

Обратим внимание на две важные особенности математической теории вероятностей А.Н. Колмогорова. Во-первых, изучение физических свойств феномена статистической устойчивости оказывается вне сферы этой теории.

Во-вторых, ее случайные модели описывают не только идеализированный феномен статистической устойчивости, но еще и существенно более широкий круг физических явлений, представляемых одиночными (т.е. не массовыми или, иначе говоря, детерминированными) многозначными моделями с мерой. Поэтому аксиоматический подход А.Н. Колмогорова применим не только для описания массовых явлений, рассматриваемых в классической математической статистике, но и одиночных многозначных явлений (моделей), для которых определена мера (существует однозначная функция распределения).

Б.В. Гнеденко, говоря об общенаучном значении теории вероятностей [2], возможно, имел в виду это обстоятельство, хотя подтверждения этого предположения найти не удалась.

Этот второй вариант физической интерпретации аксиоматизированной теории вероятностей порождает физико-математическую теорию, отличную от физико-математической теории вероятностей, описывающей массовые явления (см. таблицу).

Объектом исследования этой физико-математической теории являются одиночные многозначные явления, характеризуемые мерой, а предметом исследования — способы их описания случайными моделями.

Применение абстрактной математической теории к разным объектам исследования требует учета специфики этих объектов. Такой учет приводит к расщеплению исходной математической теории на ряд частных математических теорий, каждая из которых учитывает специфику соответствующего объекта исследования.

В полной мере это касается и математической теории вероятностей А.Н. Колмогорова. Использование теории вероятностей для описания двух разных физических объектов исследования порождает две частные математические теории вероятностей, одна из которых описывает массовые явления, а другая — одиночные многозначные явления.

Таким образом, теория вероятностей фактически представляет собой две математические теории вероятностей и две соответствующие им физико-математические теории вероятностей (рис. 1).

Рис. 1

2. Теория гиперслучайных явлений

Исследование разнообразных реальных процессов на больших интервалах наблюдения показали [6–9], что гипотеза идеальной статистической устойчивости не находит экспериментального подтверждения. Судя по результатам многочисленных экспериментальных исследований, в реальной жизни имеет место ограниченная статистическая устойчивость. Во всех экспериментах наблюдалось следующая картина: при относительно небольших объемах выборки увеличение количества отсчетов приводило к уменьшению флуктуации статистик, но при больших объемах выборки эта тенденция не наблюдалась (достигнув определенного значения, уровень флуктуации практически не изменялся или начинал расти).

В интересах изучения физических свойств феномена статистической устойчивости и описания массовых физических явлений с учетом нарушения сходимости статистик на рубеже текущего столетия была разработана физико-математическая теория гиперслучайных явлений [6, 7, 9].

В математической части этой теории в качестве аксиоматической основы использована аксиоматика теории вероятностей А.Н. Колмогорова. Базовое понятие — гиперслучайное событие — задается с помощью множества вероятностных пространств, представляемого тетрадой $(\Omega, \Im, G, P_g)$, где Ω — пространство элементарных событий, $\Im$ — борелевская σ-алгебра, P_g — вероятностная мера в условиях $g \in G$.

Гиперслучайное явление (событие, величина, функция) рассматривается как множество случайных явлений (случайных событий, величин, функций), зависящих от условий g. Для каждого g-го случайного явления определена вероятностная мера, но для условий g мера не определена.

Объектом исследования математической части теории гиперслучайных явлений является множество вероятностных пространств, а предметом исследования — связи между гиперслучайными моделями (см. таблицу).

В теории гиперслучайных явлений для описания реальных массовых физических явлений с учетом нарушений статистической устойчивости вместо гипотез адекватности теории вероятностей используются две другие гипотезы адекватности.

Гипотеза 1′ — гипотеза ограниченной статистической устойчивости, предполагающая отсутствие сходимости статистик,

Гипотеза 2′ — гипотеза адекватного описания реальных физических явлений гиперслучайными моделями.

Объектом исследования физико-математической теории гиперслучайных явлений, описывающей массовые явления, является феномен статистической устойчивости, а предметом исследования — способы его представления гиперслучайными моделями (см. таблицу).

Поскольку в математической части теории гиперслучайных явлений сохранена аксиоматическая база математической теории вероятностей А.Н. Колмогорова, с точки зрения математики теория гиперслучайных явлений — ветвь теории вероятностей (представляет собой ответвление математической теории вероятностей). Однако поскольку физическая часть теории гиперслучайных явлений использует гипотезы адекватности, отличные от принимаемых в теории вероятностей, с точки зрения физики теория гиперслучайных явлений — физико-математическая теория, отличающаяся от физико-математической теории вероятностей.

 ISSN 0572-2691

Исследования показали, что математическая часть теории гиперслучайных явлений описывает не только массовые физические явления с учетом нарушений сходимости, но и физические явления, представляемые одиночными многозначными моделями со множеством мер (т.е. многозначными (в общем случае) функциями распределения).

Второй вариант физической интерпретации математической части теории гиперслучайных явлений порождает физико-математическую теорию, объектом исследования которой являются одиночные многозначные физические явления, а предметом исследования — способы их описания гиперслучайными моделями.

Применение теории гиперслучайных явлений для двух разных физических объектов исследования порождает две частные математические теории гиперслучайных явлений. Одна из них ориентирована на описание массовых явлений, а другая — одиночных многозначных явлений.

Таким образом, теория гиперслучайных явлений фактически представляет собой две математические теории гиперслучайных явлений и две соответствующие им физико-математические теории гиперслучайных явлений (рис. 2).

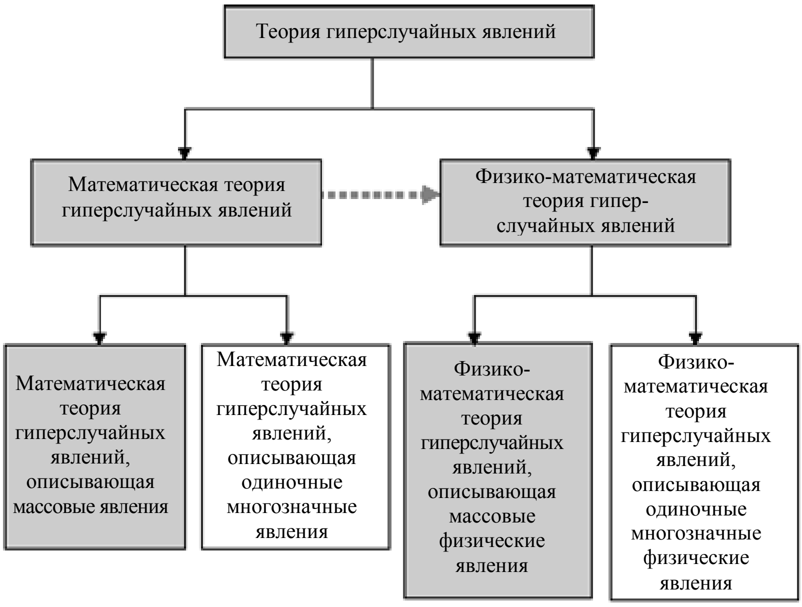

Рис. 2

В настоящее время математическая теория вероятностей, описывающая массовые явления, и соответствующая ей физико-математическая теория вероятностей (затемненные прямоугольники нижнего ряда на рис. 1) разработаны очень хорошо. Математическая теория гиперслучайных явлений, описывающая массовые явления, и соответствующая ей физико-математическая теория гиперслучайных явлений (затемненные прямоугольники нижнего ряда на рис. 2) находятся в стадии развития.

Что же касается математической теории вероятностей и математической теории гиперслучайных явлений, описывающих одиночные многозначные явления, а также соответствующих этим математическим теориям физико-математической теории вероятностей и физико-математической теории гиперслучайных явлений (незатемненные прямоугольники на рис. 1 и 2), то они лишь формируются. Отдельные вопросы, касающиеся этих теорий и их применения на практике, исследованы в работах [6, 7, 10–12] и обобщены в статьях [13, 14].

Заключение

До начала XX века теория вероятностей считалась физической дисциплиной, объект исследования которой — физический феномен статистической устойчивости массовых явлений, а предмет исследования — способы его описания с помощью неформализованных «случайных моделей».

А.Н. Колмогоровым был предложен вариант аксиоматизации теории вероятностей, превративший ее в математическую теорию, объектом исследования которой является вероятностное пространство, а предметом исследования — связи между абстрактными случайными моделями.

Возможны две физические интерпретации математической теории вероятностей А.Н. Колмогорова, превращающие ее в физико-математические теории. Объектом исследования одной теории является феномен статистической устойчивости, а предметом исследования — способы его описания случайными моделями; объектом исследования другой теории являются одиночные физические многозначные явления, а предметом исследования — способы их описания случайными моделями.

Исследование разнообразных реальных процессов на больших интервалах наблюдения показывает, что гипотеза идеальной статистической устойчивости, лежащая в основе теории вероятностей, описывающей массовые явления, не находит экспериментального подтверждения.

Разработка различных способов регистрации, описания и учета нарушений статистической устойчивости реальных процессов привела к формированию физико-математической теории гиперслучайных явлений.

Математическая часть теории гиперслучайных явлений представляет собой математическую теорию, объектом исследования которой является множество вероятностных пространств, а предметом исследования — связи между гиперслучайными моделями.

Возможны два варианта использования математической части теории гиперслучайных явлений, превращающих ее в две физико-математические теории. Объектом исследования одной из них является феномен статистической устойчивости, а предметом исследования — способы его описания гиперслучайными моделями; объектом исследования другой теории являются одиночные многозначные явления, а предметом исследования — способы их описания гиперслучайными моделями.

Теория гиперслучайных явлений с математической точки зрения — ветвь теории вероятностей, однако с физической точки зрения — физико-математическая теория, существенно отличающаяся от физико-математической теории вероятностей.

В настоящее время математическая теория вероятностей, описывающая массовые явления, и соответствующая ей физико-математическая теория вероятностей разработаны очень хорошо. Математическая теория гиперслучайных явлений, описывающая массовые явления, и соответствующая ей физико-математическая теория гиперслучайных явлений находятся в стадии развития. Математическая теория вероятностей и математическая теория гиперслучайных явлений, описывающие одиночные многозначные явления, а также соответствующие этим математическим теориям физико-математическая теории вероятностей и физико-математическая теория гиперслучайных явлений еще только формируются.

Ответ на вопрос, является ли теория вероятностей или теория гиперслучайных явлений математической или физико-математической, зависит от того, что считается объектом и предметом их исследования. Если в качестве объекта исследования выступает абстрактное математическое понятие (вероятностное пространство или множество вероятностных пространств), а в качестве предмета исследования — связи между абстрактными моделями (случайными или гиперслучайными), то рассматриваемая теория — математическая. Если же в качестве объекта исследования выступает физический феномен статистической устойчивости или одиночные физические многозначные явления, а в качестве предмета исследования — способы адекватного описания феномена статистической устойчивости или одиночных физических многозначных событий, величин, процессов и полей случайными или гиперслучайными моделями, то рассматриваемая теория — физико-математическая.

І.І. Горбань

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ТЕОРІЯ ГІПЕРВИПАДКОВИХ ЯВИЩ З ТОЧКИ ЗОРУ ФІЗИКИ І МАТЕМАТИКИ

Чи є теорія ймовірностей і теорія гіпервипадкових явищ математичними чи фізико-математичними теоріями, залежить від того, що є об'єктом та предметом їх досліджень. Звернуто увагу, що ці теорії дозволяють описувати не тільки фізичні масові явища, а і фізичні немасові явища, що можуть бути представлені багатозначними математичними моделями з мірою або з множиною мір.

I.I. Gorban

THE PROBABILITY THEORY AND THE THEORY OF HYPER-RANDOM PHENOMENA FROM STANDPOINT OF PHYSICS AND MATHEMATICS

Whether the probability theory and the theory of hyper-random phenomena are mathematical or physical-mathematical theories depends on what is the subject and scope of their investigation. Attention is drown to the fact that these theories allow us to describe not only mass physical phenomena, but also non-mass physical phenomena represented by many-valued mathematical models with measure or with a set of measures.

1. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review. — Mineola, New York : Dover Publications, Inc., 2000. — 1130 p.
2. *Проблемы* Гильберта / Под общ. ред. П.С. Александрова. — М. : Наука, 1969. — 238 с.
3. *Колмогоров А.Н.* Общая теория меры и исчисление вероятностей // Труды коммунистической академии. Математика. — 1929. — С. 8–21.
4. *Kolmogorov A.N.* Foundations of the theory of probability. — N.Y. : Chelsea Pub. Comp. — 1956.
5. *ISO* 3534–1: Statistics. Vocabulary and symbols. Part I: General statistical terms and terms used in probability. — 2006.
6. *Горбань И.И.* Феномен статистической устойчивости. — Киев : Наук. думка, 2014. — 444 с.
7. *Gorban I.I.* The statistical stability phenomenon. — Springer, 2017. — 362 p.
8. *Gorban I.I.* Phenomenon of statistical stability // Technical Physics. — 2014. — **59**, N 3. — P. 333–340.
9. *Gorban I.I.* Ramdomness and hyper-randomness. — Springer, 2017. — 249 p.
10. *Горбань И.И.* Расходящиеся последовательности и функции // Математические машины и системы. — 2012. — № 1. — С. 106–118.
11. *Горбань И.И.* Многозначные величины, последовательности и функции // Там же. — 2012. — № 3. — С. 147–161.
12. *Gorban I.I.* Divergent and multiple–valued sequences and functions // International Book Series «Information Science and Computing». Book 28: Problems of Computer Intellectualization. — 2012. — P. 358–373.
13. *Горбань И.И.* Многозначные детерминированные величины и процессы случайного и гиперслучайного типов // Математические машины и системы. — 2017. — № 1. — С. 3–24.
14. *Горбань И.И.* Векторные многозначные детерминированные процессы случайного и гиперслучайного типов // Там же. — 2017. — № 2. — С. 97–109.

Получено 24.07.2017