УДК 517.935; 681.5

А.Г. Мазко, С.Н. Кусий

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ВЫХОДУ И ВЗВЕШЕННОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Введение

В современной теории управления широко используются непрерывные и дискретные математические модели управляемых объектов, содержащие неопределенные элементы (параметры, нелинейности, внешние возмущения и т.п.). Для таких объектов первоочередными являются задачи робастной стабилизации, оптимизации и идентификации параметров. С разнообразными постановками задач управления в условиях неопределенности и методами их исследования можно ознакомиться, например, в [1–6].

При решении класса задач H_2 / H_∞-оптимизации необходимо построить закон управления, который обеспечивает не только (робастную) устойчивость, но и снижение в определенном смысле отрицательного влияния внешних возмущений на качество управляемого объекта. При исследовании указанного класса задач применяются как частотные методы, так и методы пространства состояний, приводящие к решению матричных уравнений и неравенств (см., например, [1, 3–10]). В качестве внешних возмущений рассматриваются как возмущения, действующие на систему, так и ошибки измеряемого выхода. Мерой влияния ограниченных возмущений на динамику линейных объектов с нулевым начальным вектором является максимальное значение отношения L_2-норм векторов выхода и входа (возмущений), которое совпадает с H_∞-нормой матричной передаточной функции системы [1]. В [9–14] рассматривались более общие критерии качества, учитывающие начальные возмущения, вызванные ненулевым начальным вектором. При этом использование весовых коэффициентов в обобщенных критериях качества позволяет установить приоритеты между компонентами выхода, внешних и начальных возмущений. Аналогичные критерии качества с использованием l_2-норм рассматривались в задачах подавления внешних и начальных возмущений дискретных систем [10, 15].

Отметим, что многочисленные подходы к решению задач стабилизации и оптимизации в условиях нестохастической неопределенности приводят к линейным матричным неравенствам (ЛМН). Метод инвариантных эллипсоидов совместно с техникой ЛМН также успешно применяется в задачах подавления внешних возмущений как непрерывных, так и дискретных систем [16, 17]. Для решения ЛМН созданы достаточно эффективные средства LMI Toolbox компьютерной системы MATLAB [18].

На практике дискретные модели систем управления имеют определенные преимущества по сравнению с непрерывными. В частности, использование разностных уравнений движения не требует исследования математических проблем существования и единственности решений. Кроме того, разностные системы вполне пригодны для их непосредственной численной реализации программными средствами компьютерной техники.

В данной работе рассматриваются классы дискретных линейных и нелинейных систем управления, представленных в векторно-матричной форме. Предлагаются новые подходы к решению задач синтеза стабилизирующих регуляторов по измеряемому выходу (разд. 2) и взвешенного подавления ограниченных возмущений в дискретных системах управления (разд. 4, 5). Основные результаты формулируются в виде аналогов известных утверждений для непрерывных систем [9, 14] с использованием техники ЛМН.

Будем использовать следующие обозначения: I_n — единичная $n \times n$-матрица; $0_{n \times m}$ — нулевая $n \times m$-матрица; $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ (≥ 0) — положительно (неотрицательно)-определенная симметричная матрица; $\operatorname{rank} A$, $\det A$, $\rho(A)$ и $\ker A$ — соответственно ранг, детерминант, спектральный радиус и ядро матрицы A; $i(X) = \{i_+(X), i_-(X), i_0(X)\}$ — инерция матрицы $X = X^{\mathrm{T}}$, состоящая из количеств ее положительных, отрицательных и нулевых собственных чисел с учетом кратностей; $\|x\|$ — евклидова норма вектора x; $\|w\|_Q$ — взвешенная l_2-норма векторной последовательности w_t, $t = 0, 1, \cdots$; $\mathrm{Co}\{A_1, ..., A_p\}$ — выпуклый многогранник (политоп) с вершинами $A_1, ..., A_p$ в пространстве матриц.

1. Вспомогательные утверждения

При исследовании блочно-матричных выражений используются методы понижения размерности, в частности лемма Шура, формула Фробениуса и др. [19]. Приведем известные формулы для индексов инерции блочной симметричной матрицы:

$$M = \begin{bmatrix} A & B^{\mathrm{T}} \\ B & C \end{bmatrix}, \ A = A^{\mathrm{T}}, \ C = C^{\mathrm{T}}.$$

Если $\det A \neq 0$, то

$$i_+(M) = i_+(A) + i_+(C - BA^{-1}B^{\mathrm{T}}), \ i_-(M) = i_-(A) + i_-(C - BA^{-1}B^{\mathrm{T}}). \tag{1}$$

Аналогично, если $\det C \neq 0$, то

$$i_+(M) = i_+(C) + i_+(A - B^{\mathrm{T}}C^{-1}B), \ i_-(M) = i_-(C) + i_-(A - B^{\mathrm{T}}C^{-1}B). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) вытекают соответствующие критерии положительной (неотрицательной) определенности блочной матрицы M (лемма Шура):

$$M > 0 \ (\geq 0) \Leftrightarrow \ A > 0, \ C - BA^{-1}B^{\mathrm{T}} > 0 \ (\geq 0); \tag{3}$$

$$M > 0 \ (\geq 0) \Leftrightarrow \ C > 0, \ A - B^{\mathrm{T}}C^{-1}B > 0 \ (\geq 0). \tag{4}$$

Обобщения формул (1)–(4) в случае вырожденных диагональных блоков имеются в [10].

Лемма 1 [8]. Линейное матричное неравенство

$$L^{\mathrm{T}}XR + R^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}L < S, \tag{5}$$

где L, R и $S = S^{\mathrm{T}}$ — заданные матрицы соответствующих размеров $p \times n$, $q \times n$ и $n \times n$, имеет решение X, если и только если выполняется одно из условий 1)–4):

$$1) \ \operatorname{rank} L = n, \ \ \operatorname{rank} R = n; \ 2) \ \operatorname{rank} L < n, \ \ \operatorname{rank} R = n, \ \ W_L^{\mathrm{T}}SW_L > 0;$$

$$3) \ \operatorname{rank} R < n, \ \ \operatorname{rank} L = n, \ \ W_R^{\mathrm{T}}SW_R > 0;$$

$$4) \ \operatorname{rank} L < n, \ \ \operatorname{rank} R < n, \ \ W_L^{\mathrm{T}}SW_L > 0, W_R^{\mathrm{T}}SW_R > 0;$$

где W_L и W_R — матрицы, столбцы которых составляют базисы соответствующих ядер $\ker L$ и $\ker R$.

Лемма 2 [14]. Для заданных $n \times n$-матриц $X > 0$, $Y > 0$ и числа $\gamma > 0$ существуют матрицы $X_1 \in \mathrm{R}^{r \times n}$, $X_2 \in \mathrm{R}^{r \times r}$, $Y_1 \in \mathrm{R}^{r \times n}$ и $Y_2 \in \mathrm{R}^{r \times r}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^{\mathrm{T}} \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \; \hat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^{\mathrm{T}} \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} > 0, \; \hat{X}\hat{Y} = \gamma^2 I_{n+r}, \tag{6}$$

если и только если

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \; \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{7}$$

В [20] при условиях леммы 1 приведено общее решение матричного неравенства (5) в параметрической форме. Утверждение леммы 2 в случае $\gamma = 1$ известно (см. [6, 9]).

2. Стабилизация по измеряемому выходу

Рассмотрим нелинейную систему управления с дискретным временем

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + B(x_t)u_t, \; y_t = C(x_t)x_t + D(x_t)u_t, \tag{8}$$

где $x_t \in \mathrm{R}^n$, $u_t \in \mathrm{R}^m$ и $y_t \in \mathrm{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и измеряемого выхода, $t \in \mathrm{T} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, а $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и $D(x)$ — заданные матричные функции соответствующих размеров, непрерывные в некоторой окрестности $\mathrm{S}_0 = \{x : \| x \| \leq h\}$ точки $x = 0$. Предположим, что $\operatorname{rank} B \equiv m$ и $\operatorname{rank} C \equiv l$ и наряду с (8) рассмотрим линейную систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \; y_t = Cx_t + Du_t, \tag{9}$$

где $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ и $D = D(0)$.

Сформулируем условия стабилизируемости нулевого состояния $x_t = 0$ систем (8) и (9) с помощью динамического регулятора

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \; u_t = U\xi_t + Ky_t, \tag{10}$$

где $\xi_t \in \mathrm{R}^r$, $t \in \mathrm{T}$, r — порядок регулятора, Z, V, U и K — матрицы, подлежащие определению. Соотношения (8) и (10) можно представить в виде системы управления в расширенном фазовом пространстве R^{n+r} со статическим регулятором:

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{A}(\hat{x}_t)\hat{x}_t + \hat{B}(\hat{x}_t)\hat{u}_t, \; \hat{y}_t = \hat{C}(\hat{x}_t)\hat{x}_t + \hat{D}(\hat{x}_t)\hat{u}_t, \; \hat{u}_t = \hat{K}\hat{y}_t, \tag{11}$$

где

$$\hat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \; \hat{y}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \; \hat{u}_t = \begin{bmatrix} u_t \\ \xi_{t+1} \end{bmatrix}, \; \hat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix}, \; \hat{A}(\hat{x}_t) = \begin{bmatrix} A(x_t) & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & 0_{r \times r} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}(\hat{x}_t) = \begin{bmatrix} B(x_t) & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times m} & I_r \end{bmatrix}, \; \hat{C}(\hat{x}_t) = \begin{bmatrix} C(x_t) & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times n} & I_r \end{bmatrix}, \; \hat{D}(\hat{x}_t) = \begin{bmatrix} D(x_t) & 0_{l \times r} \\ 0_{r \times m} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}.$$

При условии $K \in \mathrm{K}_D$, где $\mathrm{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$, замкнутая линейная система (9), (10) имеет вид

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{M}\,\hat{x}_t\,,\ \hat{M} = \hat{A} + \hat{B}\hat{\mathrm{D}}(\hat{K})\hat{C}\,, \tag{12}$$

где $\hat{A} = \hat{A}(0)$, $\hat{B} = \hat{B}(0)$, $\hat{C} = \hat{C}(0)$, $\hat{D} = \hat{D}(0)$,

$$\hat{D}(\hat{K}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{bmatrix},\ \mathrm{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K\,.$$

Систему (12) будем называть ρ-устойчивой, если спектр матрицы $\hat{M}$ расположен внутри круга $\{\lambda : |\lambda| < \rho\}$, где $0 < \rho \leq 1$. Спектральный запас устойчивости ρ-устойчивой системы не меньше, чем $1-\rho$. Символами $B^{\perp}$ и $C^{\perp}$ обозначим ортогональные дополнения соответственно столбцов матрицы B и строк матрицы C, т.е. $B^{\perp} = W_{B^{\mathrm{T}}}$ и $C^{\perp} = W_C^{\mathrm{T}}$.

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) существует динамический регулятор (10) порядка r, обеспечивающий ρ-устойчивость замкнутой системы (12);

2) существуют матрицы X и X_0, удовлетворяющие соотношениям:

$$B^{\perp\mathrm{T}}(AXA^{\mathrm{T}} - \rho^2 X)B^{\perp} < 0, \tag{13}$$

$$X \geq X_0 > 0\,,\ \mathrm{rank}(X - X_0) \leq r\,, \tag{14}$$

$$AX_0A^{\mathrm{T}} - \rho^2 X_0 < AX_0C^{\mathrm{T}}(CX_0C^{\mathrm{T}})^{-1}CX_0A^{\mathrm{T}}\,; \tag{15}$$

3) существуют матрицы X и Y, удовлетворяющие соотношениям (13) и

$$C^{\perp}(A^{\mathrm{T}}YA - \rho^2 Y)C^{\perp\mathrm{T}} < 0, \tag{16}$$

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0\,,\ \mathrm{rank}\,W \leq n + r\,. \tag{17}$$

Доказательство. Согласно теореме Ляпунова для дискретных систем критерием ρ-устойчивости системы (12) является существование матриц $\hat{K}_0$ и $\hat{X} = \hat{X}^{\mathrm{T}} > 0$, удовлетворяющих матричному неравенству

$$(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}_0\hat{C})\hat{X}(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}_0\hat{C})^{\mathrm{T}} - \rho^2\hat{X} < 0\,. \tag{18}$$

Данное неравенство для некоторой матрицы $\hat{X} > 0$ разрешимо относительно $\hat{K}_0$, если и только если выполняется система соотношений (см. доказательство теоремы 6.1.1 в [10])

$$\hat{B}^{\perp\mathrm{T}}(\hat{A}\hat{X}\hat{A}^{\mathrm{T}} - \rho^2\hat{X})\hat{B}^{\perp} < 0,\ \hat{A}\hat{X}\hat{A}^{\mathrm{T}} - \rho^2\hat{X} < \hat{A}\hat{X}\hat{C}^{\mathrm{T}}(\hat{C}\hat{X}\hat{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\hat{C}\hat{X}\hat{A}^{\mathrm{T}}\,. \tag{19}$$

В данном случае

$$\hat{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} B^{\perp} \\ 0 \end{bmatrix},\ \hat{C}^{\perp} = [C^{\perp}\ \ 0]\,,\ \hat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^{\mathrm{T}} \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0$$

и согласно формуле Фробениуса для обращения блочной матрицы имеем

$$(\hat{C}\hat{X}\hat{C}^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} H^{-1} & -H^{-1}CX_1^{\mathrm{T}}X_2^{-1} \\ -X_2^{-1}X_1C^{\mathrm{T}}H^{-1} & X_2^{-1} + X_2^{-1}X_1C^{\mathrm{T}}H^{-1}CX_1^{\mathrm{T}}X_2^{-1} \end{bmatrix},$$

где $H = CX_0C^{\mathrm{T}}$, $X_0 = X - X_1^{\mathrm{T}}X_2^{-1}X_1$. Используя блочную структуру выражений в (19) и лемму Шура, приходим к эквивалентным соотношениям (13)–(15), в которых $\mathrm{rank}\,(X - X_0) = \mathrm{rank}\, X_1 \le r$. Следовательно, утверждения 1) и 2) эквивалентны.

Покажем, что матрицы X и X_0 удовлетворяют утверждению 2), если и только если матрицы X и $Y = X_0^{-1}$ удовлетворяют утверждению 3). При этом соотношения (14) и (17) эквивалентны. Из формул (1) и (2) для блочной матрицы

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\rho^2 X_0 & 0 & A \\ 0 & 0 & C \\ A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} & -X_0^{-1} \end{bmatrix}$$

следует, что матричное неравенство (15) эквивалентно соотношениям

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} X_0 [A^{\mathrm{T}} \;\; C^{\mathrm{T}}] - \rho^2 \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} X_0 \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix},\; i(\Delta_0) = \{l, n, 0\},$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^{\mathrm{T}} & -X_0^{-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho^2} \begin{bmatrix} 0 \\ A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} X_0^{-1} [0 \;\; A],\; i(\Delta_1) = \{l, n, 0\}.$$

Преобразовав выражение Δ_1, получим

$$\Delta_2 = \rho^2 G \Delta_1 G^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & C^{\perp}ZC^{\perp\mathrm{T}} \end{bmatrix},\; E = \begin{bmatrix} C^{+\mathrm{T}}ZC^{+} & \rho^2 I_l \\ \rho^2 I_l & 0 \end{bmatrix},\; G = \begin{bmatrix} 0 & C^{+\mathrm{T}} \\ I_l & 0 \\ -\rho^{-2}C^{\perp}ZC^{+} & C^{\perp} \end{bmatrix},$$

где $Z = A^{\mathrm{T}}X_0^{-1}A - \rho^2 X_0^{-1}$. Поскольку G — квадратная невырожденная матрица и $i(E) = \{l, l, 0\}$, то равенство $i(\Delta_2) = \{l, n, 0\}$ означает, что $C^{\perp}ZC^{\perp\mathrm{T}} < 0$, т.е. выполняется матричное неравенство (16).

Теорема доказана.

Отметим, что для выполнения условий (17) в утверждении 3) необходимо, чтобы матрицы X и Y были положительно-определенными. Ранговое ограничение в (17) всегда выполняется в случае динамического регулятора порядка $r \ge n$, в частности, полного порядка $r = n$. Эквивалентность утверждений 1) и 3) в теореме 1 является также следствием леммы 1 для матричного неравенства Ляпунова (18), представленного в виде

$$L^{\mathrm{T}}\hat{K}_0 R + R^{\mathrm{T}}\hat{K}_0^{\mathrm{T}} L < S, \tag{20}$$

где

$$L = [-\hat{B}^{\mathrm{T}} \;\; 0_{m+r \times n+r}],\; R = [\, 0_{l+r\times n+r} \;\; \hat{C}\hat{X}],\; S = \begin{bmatrix} \rho^2 \hat{X} & \hat{A}\hat{X} \\ \hat{X}\hat{A}^{\mathrm{T}} & \hat{X} \end{bmatrix},\; \hat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

Следствие. Пусть выполняется одно из утверждений 2) или 3) теоремы 1 для линейной системы (12) и $\hat{K}_0$ — решение ЛМН (20), причем $X - X_0 = X_1^{\mathrm{T}} X_2^{-1} X_1$, $K_0 \in \mathrm{K}_D$ и $0 < \rho \le 1$. Тогда динамический регулятор (10) порядка r с матрицами

$$K = (I_m + K_0 D)^{-1} K_0,\ U = (I_m + K_0 D)^{-1} U_0,$$

$$V = V_0 (I_l + D K_0)^{-1},\ Z = Z_0 - V_0 D (I_m + K_0 D)^{-1} U_0 \qquad (21)$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого состояния и квадратичную функцию Ляпунова $v(\hat{x}) = \hat{x}^{\mathrm{T}} \hat{X}^{-1} \hat{x}$ замкнутой нелинейной системы (8), (10).

Данное утверждение вытекает из доказательства теоремы 1 и предположения о непрерывной зависимости от состояния матричных коэффициентов в системе (8) (см. доказательство аналогичного утверждения для непрерывных систем [13]). Соотношения (21) приведены на основе следующего свойства оператора $\hat{D}(\hat{K})$: $\hat{K}_0 = \hat{\mathrm{D}}(\hat{K}) \ \Rightarrow\ \hat{K} = -\hat{\mathrm{D}}(-\hat{K}_0)$.

На основе теоремы 1 и следствия 1 можно предложить следующий алгоритм построения динамического регулятора (10) порядка $r \le n,$ обеспечивающего ρ-устойчивость линейной системы (12), а также асимптотическую устойчивость нулевого состояния замкнутой нелинейной системы (11):

1) определение матриц X и X_0, удовлетворяющих соотношениям (13)–(15);

2) построение разложения Холецкого неотрицательно определенной матрицы $X - X_0 = X_1^{\mathrm{T}} X_1 \ge 0$, где $X_1 \in \mathrm{R}^{r \times n}$, $\operatorname{rank} X_1 \le r$;

3) решение ЛМН (20) относительно $\hat{K}_0$ при условиях $X_2 = I_r$ и $K_0 \in \mathrm{K}_D$;

4) вычисление матриц регулятора (10) по формулам (21).

3. Взвешенный уровень гашения ограниченных возмущений

Рассмотрим нелинейную дискретную систему без управления:

$$x_{t+1} = A(x_t) x_t + B(x_t) w_t\ ,\ \ y_t = C(x_t) x_t + D(x_t) w_t\ , \qquad (22)$$

которая функционирует в некоторой области фазового пространства S_0, содержащей точку $x = 0$. Здесь $x_t \in \mathrm{R}^n$, $w_t \in \mathrm{R}^m$ и $y_t \in \mathrm{R}^l$ — векторы соответственно состояния, ограниченного возмущения и выхода системы, $t \in \mathrm{T}$, а $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и $D(x)$ — заданные матричные функции, определенные в S_0 .

Введем критерий качества системы (22) относительно вектора выхода:

$$J = \sup_{0 < \| w \|_P^2 + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \qquad (23)$$

где

$$\varphi(w, x_0) = \frac{\| y \|_Q}{\sqrt{\| w \|_P^2 + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0}}\ ,\ \ \| y \|_Q^2 = \sum_{t=0}^{\infty} y_t^{\mathrm{T}} Q y_t\ ,\ \ \| w \|_P^2 = \sum_{t=0}^{\infty} w_t^{\mathrm{T}} P w_t\ ,$$

$P = P^{\mathrm{T}} > 0$, $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$ и $X_0 = X_0^{\mathrm{T}} > 0$ — известные положительно-определенные матрицы. При этом предполагаем, что начальный вектор x_0 в общем случае ненулевой и неизвестный. Характеристику J в случае фиксированного вектора $x_0 = 0$ обозначим J_0 . Очевидно, что $J_0 \le J$.

Значение J характеризует взвешенный уровень гашения внешних и начальных возмущений в системе (22). Аналогичный критерий качества для непрерывных систем в случае весовых матриц $P = I_s$, $Q = I_k$ и $X_0 = \rho^2 I_n$ рассматривался в [9]. Случай положительно-определенной матрицы X_0 общего вида рассматривался в [10–15]. Использование весовых матриц P, Q и X_0 позволяет задать приоритеты среди компонентов векторов внешних возмущений, выхода и начального состояния при формировании значений характеристик J и J_0.

Определение 1 [10]. Система (22) называется неэкспансивной, если ее вектор выхода при любом $N > 0$ удовлетворяет условию

$$\sum_{t=0}^{N} y_t^{\mathrm{T}} Q y_t \le \sum_{t=0}^{N} w_t^{\mathrm{T}} P w_t + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0 .$$

Для неэкспансивной системы выполняется оценка $J \le 1$. Вызывают интерес условия, при которых $J < \gamma$, в частности $J_0 < \gamma$, для любого наперед заданного значения $\gamma > 0$.

Лемма 3 . Пусть существует матрица $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ такая, что

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}(x) X A(x) - X + C^{\mathrm{T}}(x) Q C(x) & A^{\mathrm{T}}(x) X B(x) + C^{\mathrm{T}}(x) Q D(x) \\ B^{\mathrm{T}}(x) X A(x) + D^{\mathrm{T}}(x) Q C(x) & B^{\mathrm{T}}(x) X B(x) + D^{\mathrm{T}}(x) Q D(x) - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

при любом $x \in \mathrm{S}_0$. Тогда для системы (22) выполняется оценка $J_0 \le \gamma$. Если к тому же

$$0 < X < \gamma^2 X_0 , \quad (25)$$

то $J \le \gamma$.

Доказательство. Для первой разности функции Ляпунова $v(x) = x^{\mathrm{T}} X x$ в силу системы (22) с учетом (24) и (25) получаем соотношения

$$v(x_{t+1}) - v(x_t) + y_t^{\mathrm{T}} Q y_t - \gamma^2 w_t^{\mathrm{T}} P w_t = [x_t^{\mathrm{T}} \ \ w_t^{\mathrm{T}}] \ \Phi(x_t) \begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix}, \ x_t \in \mathrm{S}_0 , \ t \in \mathrm{T} ,$$

$$v(x_{N+1}) - v(x_0) + \sum_{t=0}^{N} y_t^{\mathrm{T}} Q y_t - \gamma^2 \sum_{t=0}^{N} w_t^{\mathrm{T}} P w_t < 0 .$$

Отсюда при $N \to \infty$ имеем

$$\| y \|_Q^2 \le \gamma^2 (\| w \|_P^2 + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0) , \ \varphi(w, x_0) \le \gamma ,$$

что означает $J \le \gamma$. В частности, при $x_0 = 0$ выполняется оценка $J_0 \le \gamma$.

Лемма доказана.

Рассмотрим подкласс линейных систем вида (22)

$$x_{t+1} = A x_t + B w_t , \ \ y_t = C x_t + D w_t , \ \ t \in \mathrm{T}. \quad (26)$$

Лемма 4. Для линейной системы (26), у которой $\rho(A) < 1$, выполняется строгая оценка $J_0 < \gamma$, если и только если существует решение $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ ЛМН

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} X A - X + C^{\mathrm{T}} Q C & A^{\mathrm{T}} X B + C^{\mathrm{T}} Q D \\ B^{\mathrm{T}} X A + D^{\mathrm{T}} Q C & B^{\mathrm{T}} X B + D^{\mathrm{T}} Q D - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 . \quad (27)$$

Более того, $J < \gamma$, если и только если система ЛМН (25) и (27) совместна.

Утверждение достаточности леммы 4 вытекает из доказательства леммы 3. Утверждения необходимости устанавливаются путем представления характеристик J_0 и J аналогичными выражениями с единичными весовыми матрицами (см. доказательство леммы 2 в [13], а также в [15]). Важным следствием леммы 4 являются методы вычисления критериев качества J_0 и J линейной системы (26) на основе решения соответствующих оптимизационных задач:

$$J_0 = \inf\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\ X > 0\},\ J = \inf\{\gamma : \Phi_\gamma < 0, 0 < X < \gamma^2 X_0\}. \tag{28}$$

4. Динамический регулятор с возмущениями

Рассмотрим системы управления (8) и (9) с динамическим регулятором

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t,\ u_t = U\xi_t + Ky_t + w_t,\ \xi_0 = 0, \tag{29}$$

где $\xi_t \in \mathrm{R}^r$ и $w_t \in \mathrm{R}^m$ — векторы соответственно состояния регулятора и входных сигналов (внешних возмущений), Z, V, U и K — матрицы, подлежащие определению. При условии $K \in \mathrm{K}_D$ замкнутая линейная система (9), (29) имеет вид

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{M}x_t + \hat{N}w_t,\ y_t = \hat{F}x_t + \hat{G}w_t, \tag{30}$$

где

$$\hat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix},\ \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \hat{M} = \begin{bmatrix} A + BK_0C & BU_0 \\ V_0C & Z_0 \end{bmatrix} = \hat{A} + \hat{B}\hat{K}_0\hat{C},$$

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} B + BK_0D \\ V_0D \end{bmatrix} = \hat{B}_1 + \hat{B}\hat{K}_0\hat{D}_1,$$

$$\hat{F} = \left[C + DK_0C,\ DU_0\right] = \hat{C}_1 + \hat{D}_2\hat{K}_0\hat{C},\ \ \hat{G} = D + DK_0D = D + \hat{D}_2\hat{K}_0\hat{D}_1,$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0_{r\times m} \end{bmatrix},\ \hat{D}_1 = \begin{bmatrix} D \\ 0_{r\times m} \end{bmatrix},\ \hat{C}_1 = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \end{bmatrix},\ \hat{D}_2 = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \end{bmatrix},\ \hat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \mathrm{D}(K),\ U_0 = (I_m - KD)^{-1}U,$$

$$V_0 = V(I_l - DK)^{-1},\ \ Z_0 = Z + VD(I_m - KD)^{-1}U.$$

Для системы (30) определим критерии качества J_0 и $\hat{J}$ типа (23) с весовыми матрицами Q, P и $\hat{X}_0$. Поскольку $\xi_0 = 0$, то значение $\hat{J}$ зависит лишь от первого диагонального блока X_0 матрицы $\hat{X}_0$, т.е. $\hat{J} = J$.

Нас интересуют законы управления, которые минимизируют данные критерии качества и обеспечивают свойство неэкспансивности соответствующей замкнутой системы. Законы управления, обеспечивающие замкнутой системе наименьшее значение J_0 (J), назовем J_0-оптимальными (J-оптимальными). Алгоритмы поиска таких управлений можно реализовать на основе построения верхних оценок для J_0 и J.

Теорема 2 . Для линейной системы (9) существует динамический регулятор (29), обеспечивающий критерий качества $J < \gamma$, если и только если для некоторых матриц $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ и $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ выполняется система соотношений (7), (25) и

$$W_R^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}XA - X + C^{\mathrm{T}}QC & A^{\mathrm{T}}XB + C^{\mathrm{T}}QD \\ B^{\mathrm{T}}XA + D^{\mathrm{T}}QC & B^{\mathrm{T}}XB + D^{\mathrm{T}}QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \qquad (31)$$

$$W_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} AYA^{\mathrm{T}} - Y + BP^{-1}B^{\mathrm{T}} & AYC^{\mathrm{T}} + BP^{-1}D^{\mathrm{T}} \\ CYA^{\mathrm{T}} + DP^{-1}B^{\mathrm{T}} & CYC^{\mathrm{T}} + DP^{-1}D^{\mathrm{T}} - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \qquad (32)$$

где $R = [C, D]$, $L = [B^{\mathrm{T}}, D^{\mathrm{T}}]$.

Доказательство. Согласно лемме 4 оценка $J < \gamma$ для системы (30) эквивалентна совместности соотношений

$$\begin{bmatrix} \hat{M}^{\mathrm{T}}\hat{X}\hat{M} - \hat{X} + \hat{F}^{\mathrm{T}}Q\hat{F} & \hat{M}^{\mathrm{T}}\hat{X}\hat{N} + \hat{F}^{\mathrm{T}}Q\hat{G} \\ \hat{N}^{\mathrm{T}}\hat{X}\hat{M} + \hat{G}^{\mathrm{T}}Q\hat{F} & \hat{N}^{\mathrm{T}}\hat{X}\hat{N} + \hat{G}^{\mathrm{T}}Q\hat{G} - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \qquad (33)$$

$$0 < \hat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^{\mathrm{T}} \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} < \gamma^2 \hat{X}_0 = \gamma^2 \begin{bmatrix} X_0 & X_{10}^{\mathrm{T}} \\ X_{10} & X_{20} \end{bmatrix}. \qquad (34)$$

Соотношение (33) на основе леммы Шура представим в виде ЛМН относительно $\hat{K}_0$:

$$\begin{bmatrix} -\hat{X} & 0 & \hat{M}^{\mathrm{T}} & \hat{F}^{\mathrm{T}} \\ 0 & -\gamma^2 P & \hat{N}^{\mathrm{T}} & \hat{G}^{\mathrm{T}} \\ \hat{M} & \hat{N} & -\hat{X}^{-1} & 0 \\ \hat{F} & \hat{G} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \hat{L}^{\mathrm{T}}\hat{K}_0\hat{R} + \hat{R}^{\mathrm{T}}\hat{K}_0^{T}\hat{L} + \hat{S} < 0, \qquad (35)$$

где $\hat{R} = [\hat{C}\ \ \hat{D}_1\ \ 0\ \ 0] = \hat{R}_1 E_1$, $\hat{L} = [0\ \ 0\ \ \hat{B}^{\mathrm{T}}\ \ \hat{D}_2^{\mathrm{T}}] = \hat{L}_1 E_2$,

$$\hat{R}_1 = \begin{bmatrix} C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n+r+l} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} I_{n+r+m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix}, \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} -\hat{X} & 0 & \hat{A}^{\mathrm{T}} & \hat{C}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & -\gamma^2 P & \hat{B}_1^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \\ \hat{A} & \hat{B}_1 & -\hat{X}^{-1} & 0 \\ \hat{C}_1 & D & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

При этом ограничение (25) следует из (34).

Учитывая выражения $\hat{Y} = \gamma^2 \hat{X}^{-1}$, $W_{\hat{R}} = E_1^{\mathrm{T}} W_{\hat{R}_1}$ и $W_{\hat{L}} = E_2^{\mathrm{T}} W_{\hat{L}_1}$, где

$$W_{\hat{R}_1} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n+r+l} \end{bmatrix}, \quad W_{\hat{L}_1} = \begin{bmatrix} I_{n+r+m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_L \end{bmatrix},$$

и применяя лемму 1 для ЛМН (35), а также лемму 2 для блочных матриц $\hat{X}$ и $\hat{Y}$, получим критерий существования решения $\hat{K}_0$ в виде соотношений (7), (25), (31) и (32), зависящих лишь от первых диагональных блоков X и Y матриц (6).

Теорема доказана.

ISSN 0572-2691

Замечание 1. При использовании динамического регулятора (29) полного порядка $r = n$ ранговое ограничение в (7) выполняется автоматически и оценка $J < \gamma$ в теореме 2 описывается в виде системы ЛМН относительно X и Y.

Замечание 2. Можно показать, что критерием существования статического регулятора по выходу $u_t = Ky_t + w_t$, гарантирующего оценку $J < \gamma$, является совместность системы соотношений (25), (31), (32) и $XY = \gamma^2 I_n$. Данные соотношения в случае статического регулятора по состоянию $(C = I_n,\ D = 0)$ сводятся к системе ЛМН относительно Y:

$$\begin{bmatrix} P & B^{\mathrm{T}} \\ B & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} B^{\perp\mathrm{T}}(AYA^{\mathrm{T}} - Y)B^{\perp} & B^{\perp\mathrm{T}}AY \\ YA^{\mathrm{T}}B^{\perp} & Y - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

5. Дискретные системы с управляемыми и наблюдаемыми выходами

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= A(x_t)x_t + B_1(x_t)w_t + B_2(x_t)u_t, \\ z_t &= C_1(x_t)x_t + D_{11}(x_t)w_t + D_{12}(x_t)u_t, \\ y_t &= C_2(x_t)x_t + D_{21}(x_t)w_t + D_{22}(x_t)u_t, \end{aligned} \tag{36}$$

где $x_t \in \mathrm{R}^n$, $u_t \in \mathrm{R}^m$, $w_t \in \mathrm{R}^s$, $z_t \in \mathrm{R}^k$ и $y_t \in \mathrm{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления, внешних возмущений, управляемого и наблюдаемого выходов, $t \in \mathrm{T}$. Предполагаем, что все матричные функции в (36) определены и непрерывны в некоторой окрестности S_0 состояния $x_t = 0$. Для данной системы будем рассматривать критерии качества типа (23) относительно управляемого выхода

$$J = \sup_{0 < \| w \|_P^2 + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0 < \infty} \frac{\| z \|_Q}{\sqrt{\| w \|_P^2 + x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0}}. \tag{37}$$

Символом J_0 по-прежнему обозначаем значение J в случае фиксированного начального вектора $x_0 = 0$. Нас интересуют законы управления, которые гарантируют робастную устойчивость нулевого состояния замкнутой системы и минимизируют критерии качества J_0 и J вида (37).

Сформулируем аналог теоремы 2 для подкласса линейных систем вида (36) с управляемыми и наблюдаемыми выходами:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 u_t, \\ z_t &= C_1 x_t + D_{11} w_t + D_{12} u_t, \\ y_t &= C_2 x_t + D_{21} w_t + D_{22} u_t, \end{aligned} \tag{38}$$

используя динамический регулятор (10) с начальным вектором $\xi_0 = 0$. При условии $K \in \mathrm{K}_{D_{22}}$ замкнутая система (10), (38) приводится к виду

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{M}\hat{x}_t + \hat{N}w_t, \ z_t = \hat{F}\hat{x}_t + \hat{G}w_t, \tag{39}$$

где

$$\hat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \ \hat{M} = \begin{bmatrix} A + B_2 K_0 C_2 & B_2 U_0 \\ V_0 C_2 & Z_0 \end{bmatrix} = \hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K}_0 \hat{C}_2 ,$$

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 K_0 D_{21} \\ V_0 D_{21} \end{bmatrix} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \hat{K}_0 \hat{D}_{21} ,$$

$$\hat{F} = \left[C_1 + D_{12} K_0 C_2 , \ D_{12} U_0 \right] = \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} \hat{K}_0 \hat{C}_2 ,$$

$$\hat{G} = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21} = D_{11} + \hat{D}_{12} \hat{K}_0 \hat{D}_{21} ,$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \ \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \ \hat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix}, \ \hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix}, \ \hat{C}_1 = \left[C_1 \ \ 0_{k\times r} \right], \ \hat{D}_{12} = \left[D_{12} \ \ 0_{k\times r} \right], \ \hat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

Здесь неизвестными являются блоки матрицы $\hat{K}_0$:

$$K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1} K , \ U_0 = (I_m - KD_{22})^{-1} U ,$$

$$V_0 = V(I_l - D_{22}K)^{-1} , \ Z_0 = Z + VD_{22}(I_m - KD_{22})^{-1} U ,$$

которые однозначно определяют искомые матрицы регулятора (10):

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0 D_{22})^{-1} K_0, \ U = (I_m + K_0 D_{22})^{-1} U_0, \\ V = V_0 (I_l + D_{22} K_0)^{-1}, \ Z = Z_0 - V_0 D_{22} (I_m + K_0 D_{22})^{-1} U_0. \end{gathered} \tag{40}$$

Перепишем соотношение (33) для системы (39) в виде ЛМН (35) относительно $\hat{K}_0$ с матрицами

$$\hat{R} = [\ \hat{C}_2 \ \ \hat{D}_{21} \ \ 0 \ \ 0\ ] = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix} E_1 , \ \hat{L} = [\ 0 \ \ 0 \ \ \hat{B}_2^{\mathrm{T}} \ \ \hat{D}_{12}^{\mathrm{T}}\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_2^{\mathrm{T}} & D_{12}^{\mathrm{T}} \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix} E_2 ,$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n+r+k} \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} I_{n+r+s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \end{bmatrix}, \hat{S} = \begin{bmatrix} -\hat{X} & 0 & \hat{A}^{\mathrm{T}} & \hat{C}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & -\gamma^2 P & \hat{B}_1^{\mathrm{T}} & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ \hat{A} & \hat{B}_1 & -\hat{X}^{-1} & 0 \\ \hat{C}_1 & D_{11} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Вычисляя матрицы $W_{\hat{R}}$, $W_{\hat{L}}$ и применяя леммы 1, 2, 4 (см. доказательство теоремы 2), получаем следующий результат.

Теорема 3. Для линейной системы (38) существует динамический регулятор (10) с нулевым начальным вектором, обеспечивающий критерий качества $J < \gamma$, если и только если для некоторых матриц $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ и $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ выполняется система соотношений (7), (25) и

$$W_R^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} XA - X + C_1^{\mathrm{T}} QC_1 & A^{\mathrm{T}} XB_1 + C_1^{\mathrm{T}} QD_{11} \\ B_1^{\mathrm{T}} XA + D_{11}^{\mathrm{T}} QC_1 & B_1^{\mathrm{T}} XB_1 + D_{11}^{\mathrm{T}} QD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0 , \tag{42}$$

$$W_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} AYA^{\mathrm{T}} - Y + B_1P^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & AYC_1^{\mathrm{T}} + B_1P^{-1}D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1YA^{\mathrm{T}} + D_{11}P^{-1}B_1^{\mathrm{T}} & C_1YC_1^{\mathrm{T}} + D_{11}P^{-1}D_{11}^{\mathrm{T}} - \gamma^2Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0\,, \tag{43}$$

где $R = [C_2, D_{21}]$, $L = [B_2^{\mathrm{T}}, D_{12}^{\mathrm{T}}]$.

Замечание 3. При использовании динамического регулятора (10) полного порядка $r = n$ ранговое ограничение в (7) выполняется автоматически и оценка $J < \gamma$ в теореме 3 описывается в виде системы ЛМН относительно X и Y.

Замечание 4. Можно показать, что критерием существования статического регулятора по выходу $u_t = Ky_t$, гарантирующего оценку $J < \gamma$, является совместность системы соотношений (25), (42), (43) и $XY = \gamma^2 I_n$. Данные соотношения в случае статического регулятора по состоянию $(C_2 = I_n,\ D_{21} = 0,\ D_{22} = 0)$ сводятся к системе ЛМН относительно Y, состоящей из неравенств (43) и

$$\begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0\,, \quad \begin{bmatrix} P - \gamma^{-2}D_{11}^{\mathrm{T}}QD_{11} & B_1^{\mathrm{T}} \\ B_1 & Y \end{bmatrix} > 0\,.$$

Замечание 5. Если $K \in \mathrm{K}_{D_{22}}$, то $\det(I_m - KD_{22}(x)) \neq 0$ при $x \in \mathrm{S}_0$, где S_0 — некоторая окрестность точки $x = 0$ и нелинейная замкнутая система (10), (36) приводится к виду

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{M}(x_t)\hat{x}_t + \hat{N}(x_t)w_t\,,\ z_t = \hat{F}(x_t)\hat{x}_t + \hat{G}(x_t)w_t\,, \tag{44}$$

где все матричные коэффициенты непрерывно зависят от $x_t \in \mathrm{S}_0$. Лемма 3 может использоваться при оценке критериев качества J_0 и J данной системы. Если рассматривать входной сигнал w_t как структурированную неопределенность в виде линейной обратной связи по управляемому выходу

$$w_t = \gamma^{-1}\,\Theta\, z_t\,,\ \Theta^{\mathrm{T}}P\Theta \le Q\,,\ t \in \mathrm{T}\,, \tag{45}$$

где Θ — неизвестная матрица из заданного эллипсоида, то динамический регулятор (10) в теореме 3 обеспечивает робастную устойчивость нулевого состояния $\hat{x}_t = 0$ системы (44) с данной неопределенностью. Этот факт является следствием теоремы 1 из [21] с учетом соотношения (33) и леммы Шура.

Приведем алгоритм построения динамического регулятора, удовлетворяющего утверждениям теоремы 3:

1) вычисление матриц W_R и W_L, где $R = [C_2, D_{21}]$, $L = [B_2^{\mathrm{T}}, D_{12}^{\mathrm{T}}]$;

2) определение матриц $X = X^{\mathrm{T}} > 0$ и $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$, удовлетворяющих соотношениям (7), (25), (42) и (43);

3) построение разложения Холецкого $Z = Y - \gamma^2X^{-1} = S^{\mathrm{T}}S$, где $\ker S = \ker Z$, $S \in \mathrm{R}^{r\times n}$, и формирование блочной матрицы $\hat{X} = \begin{bmatrix} X & \gamma^{-1}XS^{\mathrm{T}} \\ \gamma^{-1}SX & \gamma^{-2}SXS^{\mathrm{T}} + I_r \end{bmatrix}$;

4) решение ЛМН (35) с матрицами (41) относительно $\hat{K}_0$ при ограничении $\det(I_m + K_0D_{22}) \neq 0$;

5) вычисление матриц регулятора (10) по формулам (40).

Применение данного алгоритма без ограничения (25) приводит к оценке $J_0 < \gamma$.

На основе леммы 1.5.3 [10] можно сформулировать аналоги теорем 2, 3 и соответствующие алгоритмы робастной стабилизации системы (38), в которых учитываются неопределенности матричных коэффициентов

$$A \in \mathrm{Co}\{A^1, ..., A^\alpha\},\ B_1 \in \mathrm{Co}\{B_1^1, ..., B_1^\beta\},\ C_1 \in \mathrm{Co}\{C_1^1, ..., C_1^\mu\},\ D_{11} \in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, ..., D_{11}^\delta\}.$$

При этом количество матричных соотношений, описывающих оценки $J_0 < \gamma$ и $J < \gamma$, зависит от выбора наборов вершин данных политопов.

6. Численный пример

Продемонстрируем изложенный подход к взвешенной дискретной H_∞-оптимизации на примере управляемой двухмассовой механической системы. Данная система состоит из двух твердых тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости k и скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы с управляемыми и наблюдаемыми выходами описывается уравнениями [17]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_{1c} w + B_{2c} u, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \qquad (46)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix},\ A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & 0 & 0 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_{1c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 & 0 \end{bmatrix},\ B_{2c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_{11} = 0_{2\times 3},\ D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{22} = 0_{2\times 1}.$$

Управляющее воздействие u на тело с массой m_1 применяется в целях стабилизации системы и минимизации влияния внешних и начальных возмущений. Компоненты w_1 и w_2 вектора возмущений w воздействуют соответственно на первое и второе тело, а компоненту w_3 содержит измеряемый выход $y = [x_1 + w_3 \ \ x_2]^{\mathrm{T}}$. Компонентами управляемого выхода z являются управление u и смещение второго тела x_2.

Дискретная модель возмущенных колебаний системы описывается в виде (38), где

$$A = e^{\tau A_c},\ B_1 = \int_0^\tau e^{t A_c} B_{1c} dt,\ B_2 = \int_0^\tau e^{t A_c} B_{2c} dt,$$

τ — шаг дискретизации, а значения остальных матричных коэффициентов приведены в (46).

Данная система без управления неустойчивая. Полагая

$m_1 = 0{,}5$, $m_2 = 1$, $k = 2$, $\tau = 0{,}1$, $P = \mathrm{diag}\{p_1, p_2, p_3\}$, $Q = \mathrm{diag}\{q_1, q_2\}$, $X_0 = 4I_4$,

ISSN 0572-2691

где $p_1 = p_2 = 2$, $p_3 = 0{,}5$ и $q_1 = q_2 = 0{,}1$, с помощью приведенного алгоритма проводилась минимизация параметра γ, при котором выполняются условия (7), (25), (42) и (43) теоремы 3. В результате при $\gamma = 0{,}984$ приближенно получен J-оптимальный динамический регулятор (10) порядка $r = 4$ с матрицами

$$K = [-0{,}55838 \;\; -2{,}48726]\,,\; U = [-0{,}03419 \;\; 2{,}16121 \;\; 3{,}17227 \;\; 0{,}03458]\,,$$

$$V = \begin{bmatrix} 0{,}00045 & 0{,}00512 \\ -0{,}11062 & 0{,}19995 \\ 0{,}07103 & 0{,}06702 \\ -0{,}04030 & -0{,}05621 \end{bmatrix},\; Z = \begin{bmatrix} -0{,}00001 & -0{,}00449 & -0{,}00483 & -0{,}00144 \\ 0{,}00309 & 0{,}67937 & -0{,}01313 & -0{,}24402 \\ 0{,}00134 & -0{,}04211 & 0{,}79986 & 0{,}06285 \\ -0{,}00186 & 0{,}26189 & 0{,}01718 & 0{,}95941 \end{bmatrix},$$

который обеспечивает нэкспансивность и ρ-устойчивость замкнутой системы (39) ($\rho = 0{,}98609$), при этом $J_0 = 0{,}74219$ и $J = 0{,}98389$.

На основе формул (28) изучена зависимость характеристик J_0 и J замкнутой системы (39) от механических параметров m_1, m_2 и k, а также диагональных элементов весовой матрицы Q (рис. 1–3). Значение J характеризует уровень гашения колебаний в системе, зависящих от внешних возмущений и начального вектора. Данная характеристика увеличивается при увеличении массы m_1 и уменьшении массы m_2 в рассматриваемых пределах (см. рис. 1). На рис. 4 показано поведение компонент фазового вектора x_t системы без управления, а на рис. 5 — поведение соответствующих компонент фазового вектора замкнутой системы (39) при указанных значениях параметров и начального вектора $x_0 = [1 \;\; -1 \;\; 2 \;\; -2]^{\mathrm{T}}$. При этом входной сигнал w_t выбран в виде (45) с матрицей $\Theta = \sqrt{P}^{-1} E \sqrt{Q}$, где $E = [I_2 \;\; 0_{2\times 1}]^{\mathrm{T}}$, $P = \mathrm{diag}\{2;\, 2;\, 0{,}5\}$, $Q = 0{,}1\, I_2$, $\gamma = 0{,}984$. В этом случае выполняется равенство $\Theta^{\mathrm{T}} P \Theta = Q$.

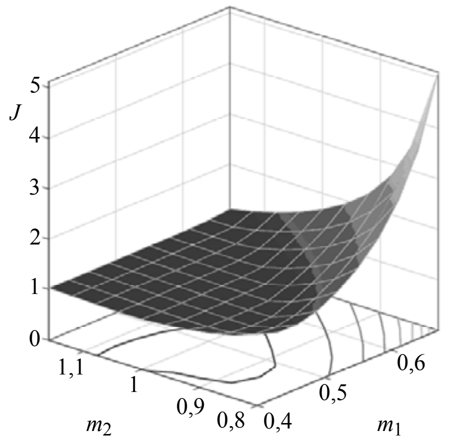

Рис. 1

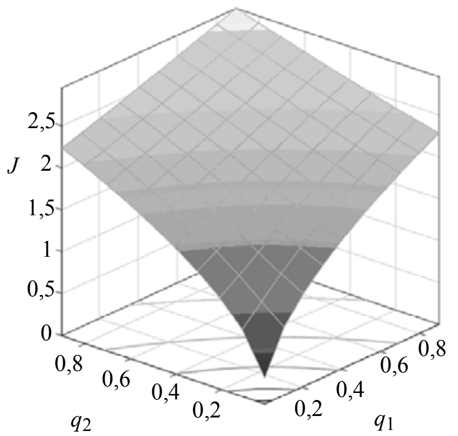

Рис. 2

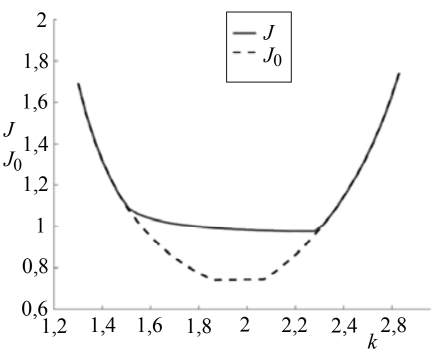

Рис. 3

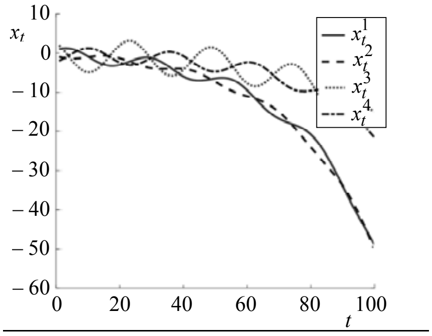

Рис. 4

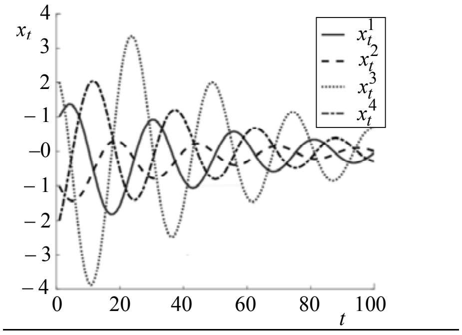

Рис. 5

Заключение

В данной работе сформулированы критерии стабилизируемости по выходу линейных дискретных систем управления с помощью динамических регуляторов произвольного порядка. Для класса линейных дискретных систем с управляемыми и наблюдаемыми выходами разработаны методы построения динамических регуляторов, обеспечивающих желаемую оценку взвешенного уровня подавления внешних и начальных возмущений. Данные методы при определенных предположениях могут применяться к некоторым классам нелинейных дискретных систем управления.

Численная реализация предложенных законов управления в виде статических регуляторов по состоянию или динамических регуляторов полного порядка по наблюдаемому выходу сводится к решению систем линейных алгебраических матричных неравенств. Для этого могут использоваться, например, эффективные вычислительные средства LMI Toolbox системы MATLAB.

О.Г. Мазко, С.М. Кусій

СТАБІЛІЗАЦІЯ ПО ВИХОДУ І ЗВАЖЕНЕ ПОГАШЕННЯ ЗБУРЕНЬ У ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

Для деяких класів дискретних лінійних і нелінійних систем керування сформульовано умови стабілізовності по виходу за допомогою динамічних регуляторів. Для дискретних систем з керованими і спостережуваними виходами запропоновано методи побудови статичних та динамічних регуляторів, які забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння зовнішніх та початкових збурень. Реалізація даних методів з використанням статичних регуляторів за станом або динамічних регуляторів повного порядку базується на розв’язанні систем лінійних матричних нерівностей. Наведено приклад синтезу регулятора для двомасової механічної системи.

A.G. Mazko, S.N. Kusii

OUTPUT STABILIZATION AND WEIGHTED SUPPRESSION OF DISTURBANCES IN DISCRETE-TIME CONTROL SYSTEMS

Stabilizability conditions for some classes of discrete-time linear and nonlinear control systems are stated. Methods for constructing static and dynamic controllers that provide specified evaluation of the weighted damping level of external and initial perturbations are proposed for systems with controllable and observable outputs. The implementation of these methods with the use of a static state feedback or a full-order dynamic controllers is based on the solution of linear matrix inequalities systems. An example of control system for a two-mass mechanical system is given.

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М. : Наука, 2002. — 303 с.
2. *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности : гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
3. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М. : Физматлит, 2007. — 280 с.
4. *Boyd S., Ghaoui L.El, Feron E., Balakrishman V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, 15. — Philadelphia: PA, 1994. — 193 p.
5. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and optimal control. — Englewood: Prentice Hall, 1996. — 596 p.
6. *Dullerud G.E., Paganini F.G.* A Course in robust control theory. A convex approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.
7. *Ларин В.Б., Туник А.А.* О компенсации внешних возмущений динамической обратной связью по выходной переменной // Прикладная механика. — 2006. — **42**, № 5. — С. 132–144.
8. *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to H_∞ control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421–448.
9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 20–38.
10. *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України. — 2016. — **102**. — 332 с.
11. *Бирюков Р.С.* Обобщенный H_∞-оптимальный фильтр для непрерывного объекта по дискретным по времени наблюдениям // Информатика и системы управления.— 2014.— № 4 (42).— С. 89–101.
12. *Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R.* H_∞-control with transients // SIAM J. Control and Optimization. — 1991. — **29**, N 6. — P. 1373–1393.
13. *Мазко А.Г., Кусий С.Н.* Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, 3. — С. 373–387.
14. *Мазко А.Г., Кусий С.Н.* Робастная стабилизация и оценка взвешенного подавления возмущений в системах управления // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 6. — С. 71–82.
15. *Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А.* Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3–22.
16. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.
17. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Там же. — 2011. — № 11. — С. 9–59.
18. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J, Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For use with Matlab. User's guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.
19. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
20. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. — Нижний Новгород: ННГУ, 2010. — 93 с.
21. *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 73–88.

Получено 07.02.2017

После доработки 26.06.17