УДК 519.8

В.М. Кунцевич

МИНИМИЗАЦИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Введение

В настоящее время для управления динамическими системами различной природы и различного назначения используется исключительно цифровая техника и измерения, и управление осуществляется в дискретные моменты времени, поэтому ниже рассмотрим лишь дискретные математические модели динамических систем.

Проблема анализа воздействия ограниченных возмущений на динамические системы интенсивно исследуется в последние несколько десятилетий. Для класса линейных как непрерывных, так и дискретных систем с числовыми матрицами получены существенные результаты по определению оценок воздействия таких возмущений на эти системы и управлений, минимизирующих меру их воздействия. В [1, 2] подведен определенный итог результатов, полученных при решении этой проблемы. Иначе обстоит дело с решением задач определения меры воздействия ограниченных возмущений на нелинейные динамические системы и отысканием управлений, минимизирующих в том или ином смысле воздействие этих возмущений. В имеющихся немногочисленных публикациях, посвященных решению этих задач, используется представление нелинейных функций в квазилинейной форме, что существенно ограничивает класс рассматриваемых нелинейных систем [3].

В приложениях достаточно часто неизвестен точный вид нелинейных функций математических моделей объекта управления, а известны лишь те или иные их оценки. Поэтому ниже рассмотрим именно такие случаи.

1. Управление динамическими системами с двухсторонними линейными ограничениями

Задано семейство управляемых дискретных динамических систем, подверженных воздействию неконтролируемых возмущений

$$X_{n+1} = AX_n + f(X_n)B + SU_n + Z_n, \tag{1}$$

где $X_n \in \mathrm{R}^m$, $U_n \in \mathbf{R}^m$ — управление, A — матрица $(m \times m)$, для которой задана ее оценка

$$A \in \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \ldots \times \mathbf{A}_m, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{A}_i = \underset{s=1;2^m}{\underline{\mathrm{conv}}}\{A_i^s\}, \ \ i = \overline{1;m}, \tag{3}$$

A_i^s — s-я вершина многогранника $\mathbf{A}_i$, $B^{\mathrm{T}} = (1, 0, \ldots, 0)$, S — матрица $(m \times m)$, $\det S \neq 0$.

Для возмущения $Z_n \in \mathbf{R}^m$ задана, как часто бывает в приложениях, его интервальная оценка

$$Z_n \in \mathbf{Z} = z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_m, \tag{4}$$

где $z_i = \{z_i : |z_i| \leq \sigma_i\}$; $i = \overline{1; m}$, $f(X_n)$ — нелинейная знакопеременная функция скалярного аргумента $f(X_n) = f[\sigma(X_n)]$, $\sigma(\cdot) = C^{\mathrm{T}} X_n$, $\|C\| \neq 0$, такая, что $f(0) = 0$.

Функция $f[\sigma(X_n)]$ удовлетворяет линейным ограничениям

$$0 < \underline{k} \cdot \sigma(\cdot) \leq f[\cdot] \leq \bar{k} \cdot \sigma(\cdot) \text{ при } \sigma(\cdot) = C^{\mathrm{T}} X_n \geq 0, \tag{5}$$

$$\bar{k} \cdot \sigma(\cdot) \geq f[\cdot] \geq \underline{k} \cdot \sigma(\cdot) \text{ при } \sigma(\cdot) = C^{\mathrm{T}} X_n \leq 0. \tag{6}$$

Двухсторонние ограничения (3), (4) определяют многозначное отображение в виде принадлежности конусу первого порядка (рис. 1)

$$f[\sigma(X_n)] \in \varphi(X_n) = \varphi^{+}(X_n) \cup \varphi^{-}(X_n), \; i = \overline{1; m}, \tag{7}$$

где

$$\varphi^{+}(X_n) = \{\sigma(\cdot) : \underline{k}\sigma(\cdot) \leq f(\cdot) \leq \bar{k}\sigma(\cdot)\} \text{ при } \sigma(\cdot) \geq 0, \tag{8}$$

$$\varphi^{-}(X_n) = \{\sigma(\cdot) : \bar{k}\sigma(\cdot) \geq f(\cdot) \geq \underline{k}\sigma(\cdot)\} \text{ при } \sigma(\cdot) \leq 0, \tag{9}$$

ось которого задана уравнением $f_1[\sigma_1(X)] = \mathring{k}\sigma_1(X)$, где $\mathring{k} = 0{,}5(\bar{k} + \underline{k})$.

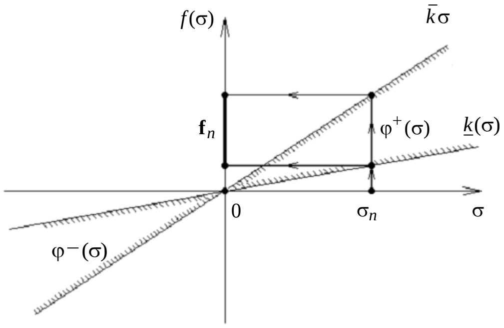

Рис. 1

Замечание 1. Исследование непрерывного аналога семейства автономных систем $\dot{X} = AX + f[\sigma(X)]B$, где $\sigma(X) = C^{\mathrm{T}} X$, положившее начало научному направлению «анализ абсолютной устойчивости», началось с работ [4, 5].

Многозначное отображение $\varphi(X)$ с линейными границами преобразует величины σ_n в интервалы $\mathbf{f}_n$ (см. рис. 1), размеры (радиусы) которых линейно зависят от σ_n. Поэтому система (1), (2), (5) является семейством линейных систем

$$X_{n+1} = (A + kBC^{\mathrm{T}}) X_n + SU_n + Z_n, \text{ где } \underline{k} \leq k \leq \bar{k}. \tag{10}$$

При определенных условиях и соответствующем выборе управления U_n семейство систем

$$X_{n+1} = (A + kBC^{\mathrm{T}}) X_n + SU_n + Z_n, \text{ где } \underline{k} \leq k \leq \bar{k}, \; Z_n \in \mathbf{Z}, \tag{11}$$

имеет ограниченное инвариантное множество. Напомним его определение.

 ISSN 0572-2691

Инвариантным множеством динамической системы, подверженной воздействию возмущения, ограниченного в оговоренном смысле, называют такое множество, что если движение системы началось в этом множестве, то траектория движения остается внутри этого множества при всех возможных значениях возмущений, удовлетворяющих заданному ограничению.

Интервальное инвариантное множество $\mathbf{X}$ будем оценивать его радиусом $r(\mathbf{X})$, равным

$$r(\mathbf{X}) = \max_{X \in \mathbf{X}} \| X \|.$$

При выборе $\| X \|_\infty = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$ радиус $r(\mathbf{X})$ интервального множества $\mathbf{X}$ равен

$$r(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} r(\mathbf{x}_i), \tag{12}$$

где $r(\mathbf{x}_i)$ — радиус одномерного интервального множества

$$\mathbf{x}_i = \{x_i : \underline{x}_i \le x_i \le \bar{x}_i\}, \tag{13}$$

равный

$$r(\mathbf{x}_i) = |\bar{x}_i - \underline{x}_i|. \tag{14}$$

Радиус инвариантного множества — аналог величины дисперсии при случайной (в математическом смысле) природе возмущения.

Целью управления примем минимизацию радиуса инвариантного множества. Для определения управления, минимизирующего радиус инвариантного множества семейства линейных систем (11), необходимо прежде всего определить это множество.

Примем, что для вектора X_n имеется его интервальная оценка

$$X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n = \bar{\mathbf{x}}_{1n} \times \bar{\mathbf{x}}_{2n} \times \ldots \times \bar{\mathbf{x}}_{mn}, \text{ где } \bar{\mathbf{x}}_{in} = \{x_i : \underline{x}_{in} \le x_i \le \bar{x}_{in}\},\ i = \overline{1; m}. \tag{15}$$

Тогда из (11), (2) и (15) следует, что это семейство линейных систем описывается линейным разностным включением

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1}(U_n) = \mathbf{X}'_{n+1}(\mathbf{X}_n, U_n) + \mathbf{Z}, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{X}'_{n+1}(\mathbf{X}_n, U_n) = \bigcup_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A \in \mathbf{A} \\ k \in \chi}} (A + kBC^{\mathrm{T}}) X_n + SU_n,\ \ \chi = \{k : \underline{k} \le k \le \bar{k}\}. \tag{17}$$

Множество $\mathbf{X}'(\cdot)$ — неинтервальное множество. Существенные затраты вычислительного характера, связанные с приближенным определением параметрического множества $\mathbf{X}'_n(\cdot)$ общего вида, и трудности, связанные с его дальнейшим использованием, оправдывают, как было предложено в [6], аппроксимацию этого множества интервальным параметрическим множеством минимального объема $\overline{\mathbf{X}}'_n(U_n)$.

Введем обозначения

$$\tilde{U}_n = SU_n \tag{18}$$

и определим искомое интервальное множество минимального объема

$$\overline{\mathbf{X}}'_{n+1} = \bar{\mathbf{x}}'_{1,n+1} \times \ldots \times \bar{\mathbf{x}}'_{m,n+1}, \tag{19}$$

где

$$\tilde{u}_{in} = S_i^{\mathrm{T}} u_{in}, \quad S_i^{\mathrm{T}} \text{ — } i\text{-я строка матрицы } S, \; i = \overline{1; m}, \tag{20}$$

$$\overline{\mathbf{x}}'_{i,n+1} = \{x_i : \underline{x}'_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}) \le x_i \le \overline{x}'_{in+1}\}, \quad i = \overline{1; m}, \tag{21}$$

$$\underline{x}'_{1,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A_1^{\mathrm{T}} \in \underline{\mathbf{A}}_1 \\ j=\overline{1;2}}} \{\gamma_1(\cdot) = (A_1^{\mathrm{T}} + k_j C^{\mathrm{T}})\, X_n + \tilde{u}_{1n}\}, \tag{22}$$

$$\overline{x}'_{1,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A_1^{\mathrm{T}} \in \underline{\mathbf{A}}_1 \\ j=\overline{1;2}}} \{\gamma_1(\cdot) = (A_1^{\mathrm{T}} + k_j C^{\mathrm{T}}) X_n + \tilde{u}_{1n}\}, \tag{23}$$

$$\underline{x}'_{i,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A_i^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_i}} \{\gamma_i(\cdot) = A_i^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{in}\}, \quad i = \overline{2; m}, \tag{24}$$

$$\overline{x}'_{i,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A_i^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_i}} \{\gamma_i(\cdot) = A_i^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{in}\}, \quad i = \overline{2; m}. \tag{25}$$

Так как функции $\gamma_i(\cdot)$, $i = \overline{1; m}$, билинейные, решения задач (22)–(25) принадлежат вершинам X_n^s множества $\overline{\mathbf{X}}_n$. Интервальное множество $\overline{\mathbf{X}}_n$ (15) запишем в виде

$$\overline{\mathbf{X}}_n = \operatorname*{conv}_{s=\overline{1;S}} \{X_n^s\}, \tag{26}$$

где X_n^s — s-я вершина многогранника $\overline{\mathbf{X}}_n$, и перепишем задачи (22)–(25) в виде

$$\underline{x}'_{1,n+1} = \min_{\substack{s=\overline{1;S} \\ j=\overline{1;2}}} \{(A_1^{\mathrm{T}} + k_j C^{\mathrm{T}})\, X_n^s + \tilde{u}_{1n}\}, \quad \underline{x}'_{1,n+1} = \max_{\substack{s=\overline{1;S} \\ j=\overline{1;2}}} \{(A_1^{\mathrm{T}} + k_j C^{\mathrm{T}})\, X_n^s + \tilde{u}_{1n}\}, \tag{27}$$

$$\underline{x}'_{i,n+1} = \min_{\substack{s=\overline{1;S} \\ j=\overline{1;2}}} \{A_i^{\mathrm{T}} X_n^s + \tilde{u}_{in}\}, \quad \overline{x}'_{i,n+1} = \max_{\substack{s=\overline{1;S} \\ j=\overline{1;2}}} \{A_i^{\mathrm{T}} X_n^s + \tilde{u}_{in}\}, \quad i = \overline{2; m}. \tag{28}$$

Экстремумы комбинаторных задач (27), (28), принимая во внимание их невысокую размерность, решим полным перебором всех вариантов. Найденные величины $\underline{x}'_{i,n+1}$, $\overline{x}'_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m}$, определяют искомое множество

$$\mathbf{X}_{n+1} = \Gamma[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)]. \tag{29}$$

Далее рассмотрим эволюцию интервальных множеств $\overline{\mathbf{X}}_n$

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \Gamma[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)] + \mathbf{Z}. \tag{30}$$

Целью управления $(\tilde{U}_n)$ примем минимизацию радиуса $R(\overline{\mathbf{X}}_{n+1})$ множества $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Из (12)–(14) следует, что эта задача сводится к задаче

$$\min_{\tilde{U}_n} R\{\Gamma[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)]\}, \tag{31}$$

где

$$R\{\Gamma[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)]\} = r_1\{\gamma_1[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{1,n})]\} \times \ldots \times r_m\{\gamma_m[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{m,n})]\}. \tag{32}$$

Так как множество $\overline{\mathbf{X}}_n$ центрально-симметрическое, то справедливы равенства

$$\underline{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}) = -\bar{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}), \ \ i = \overline{1;m}, \tag{33}$$

и, следовательно, в соответствии с (12), (13)

$$r_i\{\gamma_i[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{in})]\} = 2[\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in})], \ \ i = \overline{1;m}. \tag{34}$$

Искомые оптимальные управления $\tilde{u}_{in} = B_i^{\mathrm{T}} U_n, \ \ i = \overline{1;m},$ являются решениями задач

$$\min_{\tilde{u}_{1n}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A_1^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_1 \\ k \in \chi}} (A_1^{\mathrm{T}} + kBC^{\mathrm{T}})\, X_n + \tilde{u}_{1n}, \tag{35}$$

$$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A_i^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_i}} (A_i^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{in}), \ \ i = \overline{2;m}. \tag{36}$$

В общем случае минимаксные задачи не имеют аналитических решений, но задачи (27), (28) — к счастью, исключение из этого правила. Так как эти задачи — частные случаи задач, решенных в [7], то для того, чтобы воспользоваться следствием теоремы, доказанной в [7], представим множества $\mathbf{A}_i, \ \ i = \overline{1;m},$ и множество χ в центрированной форме

$$\mathbf{A}_i = \overset{\circ}{A}_i + \delta\mathbf{A}_i; \ i = \overline{1;m}, \tag{37}$$

где $\overset{\circ}{A}_i$ — центр сферы минимального радиуса $r(\mathbf{A}_i)$, описанной вокруг множества $\mathbf{A}_i$, а множество $\delta\mathbf{A}_i$ имеет вид

$$\delta \mathrm{A}_i = \underset{j=1;\,2^m}{\underline{\mathrm{conv}}} \{\Delta A_i^{\mathrm{T}} = A_i^{\mathrm{T}} - \overset{\circ}{A}{}^{\mathrm{T}}\}, i = \overline{1;m}, \ \ \delta\mathbf{A} = \delta\mathbf{A}_1 \times \delta\mathbf{A}_2 \times \ldots \times \delta\mathbf{A}_m, \ \ \overset{\circ}{A} = \| \overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}} \|_{i=1}^{m}, \tag{38}$$

$$\chi = \overset{\circ}{k} + \delta\chi\,, \text{ где } \overset{\circ}{k} = 0{,}5(\bar{k} + \underline{k}), \ \ \delta\chi = \{\Delta k : |\Delta k| \le 0{,}5(\bar{k} - \underline{k})\}. \tag{39}$$

С учетом введенных обозначений перепишем задачи (27), (28) в виде

$$\min_{\tilde{u}_{1n}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ \Delta A_1^{\mathrm{T}} \in \delta\mathbf{A}_1 \\ \Delta k \in \delta\chi}} \left| [\overset{\circ}{A}{}_1^{\mathrm{T}} + \Delta A_1^{\mathrm{T}} + (\overset{\circ}{k} + \Delta k)\, BC^{\mathrm{T}}]\, X_n + \tilde{u}_{1n} \right|, \tag{40}$$

$$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ \Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta\mathbf{A}_i}} \left| (\overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}} + \Delta A_i^{\mathrm{T}})\, X_n + \tilde{u}_{in} \right|, \ i = \overline{2;m}. \tag{41}$$

Для решения задач (40), (41) воспользуемся следствием теоремы из работы [7].

Теорема 1 [7].

Следствие теоремы из [7]. Минимаксные задачи (40), (41) имеют аналитические решения

$$\tilde{u}_{1n}^* = -(\overset{\circ}{A}{}_1^{\mathrm{T}} + \overset{\circ}{k}\, BC^{\mathrm{T}})\, X_n\,, \ \tilde{u}_{in}^* = -\overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}} X_n\,, \ i = \overline{2;m}. \tag{42}$$

Тогда по уже определенному вектору $\tilde{U}_n^*$ найдем искомый вектор оптимального управления

$$\overset{*}{U}_n = S^{-1}\tilde{U}_n^{*}. \tag{43}$$

На основании (42), (43) запишем управление $\overset{*}{U}_n$ в виде

$$\overset{*}{U}_n = -B^{-1}(\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{k}\, BC^{\mathrm{T}})\, X_n \tag{44}$$

и, подставив это выражение в (30), получим уравнение оптимально управляемой эволюции интервальных множеств

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \Gamma[\overline{\mathbf{X}}_n(\overset{*}{U}_n)] + \mathbf{Z}\,. \tag{45}$$

Приняв $\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{X}}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$ и подставив эти величины в (45), получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \Gamma[\overset{*}{\mathbf{X}}_n(\overset{*}{U}_n)] + \mathbf{Z}\,, \tag{46}$$

решение которого определяет искомое интервальное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Система (46) имеет ограниченное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ только тогда, когда автономная система

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \Gamma[\overline{\mathbf{X}}_n(\overset{*}{U}_n)] \tag{47}$$

асимптотически устойчива.

В общем случае, несмотря на то что управление $\overset{*}{U}_n$ выбрано в оговоренном смысле оптимальным, класс систем (47) может быть настолько широк (радиусы множеств $\mathbf{A}_i,\, i = \overline{1;m},$ и χ настолько велики), что одним управлением $\overset{*}{U}_n$ нельзя обеспечить робастную устойчивость всех элементов семейства систем (47). Поэтому необходима проверка тех или иных условий устойчивости семейства систем (47).

Выпишем в явном виде уравнения динамики системы (47)

$$X_{n+1} = (\Delta A + \Delta k BC^{\mathrm{T}})\, X_n\,, \text{ где } \Delta\mathbf{A} \in \delta\mathbf{A}\,,\ \Delta k \in \delta\chi\,. \tag{48}$$

Воспользуемся достаточными условиями асимптотической устойчивости семейства системы (48)

$$\max_{\substack{\Delta\mathbf{A}\in\delta\mathbf{A}\\ \Delta k\in\delta\chi}} \left\| \Delta A + \Delta k BC^{\mathrm{T}} \right\| \le q < 1 \tag{49}$$

и примем, что неравенство выполняется.

Замечание 2. Выполнение неравенства $\max\limits_{\Delta A_m^{\mathrm{T}}\in\delta\mathbf{A}_m} \left\| \Delta A_m^{\mathrm{T}} \right\| < 1$ для систем с матрицей Фробениуса

$$\Delta A = \left\| \begin{array}{c:c} 0 & \\ \vdots & I_{m-1} \\ 0 & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{\Delta A_m^{\mathrm{T}}} \end{array} \right\|, \text{ где } \Delta A_m \in \delta\mathbf{A}_m, \tag{50}$$

является достаточным условием устойчивости. Но при этом $\max\limits_{\Delta A_m^{\mathrm{T}}\in\delta\mathbf{A}_m} \left\| \Delta A \right\| = 1.$ Поэтому неравенство (49) не может служить условием устойчивости системы (48) с матрицей (50).

Так как множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ интервальное, а радиус суммы по Минковскому двух интервальных множеств равен сумме их радиусов,

 ISSN 0572-2691

$$r[\boldsymbol{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}})+\mathbf{Z}]=r[\boldsymbol{\Gamma}(\overset{*}{\mathbf{X}})]+r(\mathbf{Z}). \tag{51}$$

Поскольку система (46) линейная, справедливо равенство

$$r(\overset{*}{\mathbf{X}})=\alpha r(\overset{*}{\mathbf{X}}). \tag{52}$$

Величину коэффициента α определим из соотношения $r(\mathbf{x}_{1,n+1})=\alpha r(\mathbf{x}_{1,n})$. Отсюда получаем, что

$$\alpha=\frac{r(\mathbf{x}_{1,n+1})}{r(\mathbf{x}_{1,n})}.$$

Так как принято, что семейство систем (48), (49) асимптотически устойчиво, то $\alpha<1$. Из (51), (52) имеем

$$r(\overset{*}{\mathbf{x}}_i)=\alpha r(\mathbf{x}_i)+\mathbf{z}_i,\ \ i=\overline{1;m},$$

отсюда окончательно получаем

$$r(\overset{*}{\mathbf{X}})=(1-\alpha)^{-1}r(\mathbf{Z}),\ \text{где}\ \alpha<1.$$

Радиус $r(\overset{*}{\mathbf{X}})$ интервального инвариантного множества — аналог величины дисперсии при стохастической природе возмущения.

2. Управление динамическими системами с двухсторонними нелинейными ограничениями

Рассмотрим теперь тот же класс семейств систем (1), (2), т.е.

$$X_{n+1}=AX_n+f(X_n)B+SU_n+Z_n,\ \text{где}\ Z_n\in\mathbf{Z},$$

а для матрицы A задана ее интервальная оценка (2), (3), но с другими свойствами нелинейной функции $f(X_n)$. Примем, что эта функция с точностью до сомножителя k, о пределах изменения которого известно, что $0<\underline{k}\le k\le\bar{k}$, задана в виде

$$\underline{k}\,\overset{*}{f}[\sigma(X_n)]\le f[\sigma(X_n)]\le\bar{k}\,\overset{*}{f}[\sigma(X_n)],\ \text{где}\ \sigma(X_n)=C^{\mathrm{T}}X_n. \tag{53}$$

Функция $\overset{*}{f}(\cdot)$ задана в виде монотонной знакопеременной функции, такой, что $\overset{*}{f}(0)=0$ и $\overset{*}{f}[-\sigma(X_n)]=-\overset{*}{f}[\sigma(X_n)]$.

Двухсторонние ограничения (53) определяют многозначное отображение $\eta(\sigma_n)$, и поэтому, как и выше, далее будем говорить не о нелинейной функции $f(X)$, удовлетворяющей ограничениям (53), а о системе (1) с многозначным отображением $\eta(\sigma_n)$ в виде «криволинейного» конуса первого порядка (рис. 2)

$$f[\sigma(X_n)=\sigma_n]\in\eta(X_n)=\{\sigma_n:0<\underline{k}\,\overset{*}{f}(\sigma_n)\le f(\sigma_n)\le\bar{k}\,\overset{*}{f}(\sigma_n)\}. \tag{54}$$

Многозначное отображение $\eta(X)$ с нелинейными границами преобразует величины σ_n в интервалы $\mathbf{f}_n$, размеры (радиусы) которых нелинейно зависят от σ_n. Поэтому система (1), (2), (54) является семейством нелинейных систем

$$X_{n+1}=AX_n+k\,\overset{*}{f}[\sigma(C^{\mathrm{T}}X_n)]B+SU_n+Z_n,\ \text{где}\ \underline{k}\le k\le\bar{k}. \tag{55}$$

Целью управления, как и выше, примем минимизацию интервального инвариантного множества семейства систем (1), (2), (55). Для этого сначала определим уравнение эволюции множества этого семейства систем. Общая схема решения этой задачи остается такой же, как и выше, но с внесением необходимых изменений, учитывающих наличие нелинейных функций в уравнении движения семейства систем.

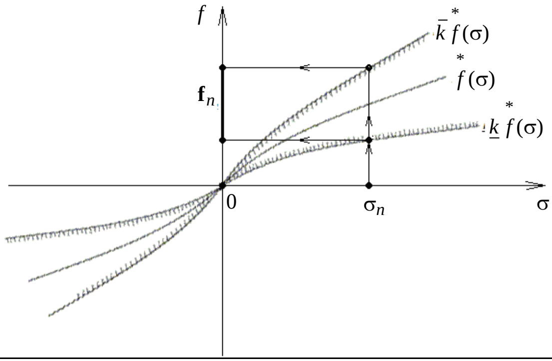

Рис. 2

Если для вектора X_n задана его оценка (10), то динамика семейства систем (55), (2) описывается нелинейным разностным включением

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ k_1 \le k \le k_2 > k_1}} [AX_n + k\overset{*}{f}(\sigma_n = C^{\mathrm{T}} X_n) + SU_n] + \mathbf{Z}. \qquad (56)$$

Так как множество

$$\mathbf{X}'_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ k_1 \le k \le k_2}} [AX_n + k\overset{*}{f}(\sigma_n = C^{\mathrm{T}} X_n) + SU_n]$$

неинтервальное, то, как и выше, аппроксимируем его интервальным множеством минимального объема (19), где величины $\underline{x}''_{1,n+1}$, $\overline{x}''_{1,n+1}$, в отличие от (21)–(25), определяются в виде

$$\underline{x}''_{1,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_1^T \in \mathbf{A}_1}} \{\psi_1(\cdot) = A_1^{\mathrm{T}} X_n + \eta(\sigma_n) B + \tilde{u}_{1n}\}, \qquad (57)$$

$$\overline{x}''_{1,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{X}_n \\ A_1^T \in \mathbf{A}_1}} \{\psi_1(\cdot) = A_1^{\mathrm{T}} X_n + \eta(\sigma_n) B + \tilde{u}_{1n}\}, \qquad (58)$$

а для величин $\underline{x}''_{i,n+1}$, $\overline{x}''_{i,n+1}$, $i = \overline{2; m}$, в силу оговоренных свойств функции $\overset{*}{f}(\cdot)$ и центрально-симметричности множеств $\overline{\mathbf{X}}_n$, справедливы равенства $\underline{x}''_{i,n+1} = \underline{x}'_{i,n+1}$, $\overline{x}''_{i,n+1} = \overline{x}'_{i,n+1}$, $i = \overline{2; m}$ (см. (24), (25)).

Экстремумы монотонной функции $\psi_1(\cdot)$ принадлежат вершинам X_n^s выпуклого центрально-симметрического множества $\overline{\mathbf{X}}_n$ и границам $k_1 = \underline{k}$, $k_2 = \bar{k}$ интервала значений k. Поэтому задачи (57), (58) заменим комбинаторными задачами

$$\underline{x}''_{1,n+1} = \min_{\substack{s=\overline{1;2^m}\\ l=\overline{1;2}}} \{A_1^{\mathrm{T}} X_n^s + k_l \overset{*}{f}(\sigma_n^s)\}, \quad \overline{x}''_{1,n+1} = \max_{\substack{s=\overline{1;2^m}\\ l=\overline{1;2}}} \{A_1^{\mathrm{T}} X_n^s + k_l \overset{*}{f}(\sigma_n^s)\}, \tag{59}$$

где $\sigma_n^s = C^{\mathrm{T}} X_n^s$.

Принимая во внимание невысокую размерность этих задач, их решения найдем полным перебором всех вариантов. Найденные величины $\underline{x}''_{i,n+1}$, $\overline{x}''_{i,n+1}$, $i=\overline{2;m}$, и величины $\underline{x}''_{1,n+1}$, $\overline{x}''_{1,n+1}$ определяют семейство интервальных множеств

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = G[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)].$$

Далее рассмотрим эволюцию интервальных множеств

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = G[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)] + \mathbf{Z}. \tag{60}$$

Для системы (60) решим задачу выбора управления $\tilde{U}_n$ из условия минимизации радиуса этой системы, а также задачи, аналогичные задачам (40), (41), с учетом особенностей системы (60)

$$\min_{\tilde{u}_{1,n}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n\\ A_1^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_1\\ k \notin \chi}} \left| A_1^{\mathrm{T}} X_n + k \overset{*}{f}[\sigma(X_n)] + \tilde{u}_{1,n} \right|, \tag{61}$$

$$\min_{\tilde{u}_{i,n}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n\\ A_i^{\mathrm{T}} \in \mathbf{A}_i}} \left| A_i^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{i,n} \right|, \; i=\overline{2;m}. \tag{62}$$

Представим множества $\mathbf{A}_i$, $i=\overline{1;m}$, и множество χ в центрированных формах (37)–(39), и минимаксные задачи (61), (62) запишем в виде

$$\min_{\tilde{u}_{1,n}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n\\ \Delta A_1^{\mathrm{T}} \in \delta\mathbf{A}_1\\ \Delta k \in \delta\chi}} \left| (\overset{\circ}{A}{}_1^{\mathrm{T}} + \Delta A_1^{\mathrm{T}}) X_n + (\overset{\circ}{k} + \Delta k) \overset{*}{f}[\sigma(X_n)] + \tilde{u}_{1,n} \right|, \tag{63}$$

$$\min_{\tilde{u}_{i,n}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n\\ \Delta A_i^{\mathrm{T}} \in \delta\mathbf{A}_i}} \left| (\overset{\circ}{A}{}_i^{\mathrm{T}} + \Delta A_i^{\mathrm{T}}) X_n + \tilde{u}_{i,n} \right|, \; i=\overline{2;m}. \tag{64}$$

С точностью до обозначений решения задач (63), (64) получены в [7], и они имеют вид

$$\tilde{u}_{1,n}^* = -\{\overset{\circ}{A}_1 X_n + \overset{\circ}{k} \overset{*}{f}[\sigma(X_n)]\}, \tag{65}$$

$$\tilde{u}_{i,n}^* = -\overset{\circ}{A}_i X_n, \; i=\overline{2;m}. \tag{66}$$

По определенному вектору $\tilde{U}_n^*$ находим искомый вектор управления $\overset{*}{U}_n = B^{-1}\tilde{U}_n^*$.

Замечание 3. Оптимальное управление, определяемое теоремой из работы [7], получено при решении задачи минимизации первой разности функции Ляпунова, принятой в виде $\upsilon_n = \| X_n \|_\infty = \sum_{i=1}^{m} |x_{i,n}|$, вычисляемой вдоль траектории движения семейства систем.

Подставив найденное управление $\overset{*}{U}_n$ в уравнение движения семейства систем (60), получим

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = G[\overline{\mathbf{X}}_n(\overset{*}{U}_n)] + \mathbf{Z}. \tag{67}$$

Приняв $\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{X}}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$ и подставив эти величины в (67), получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = G[\overset{*}{\mathbf{X}}(\overset{*}{U}_n)] + \mathbf{Z}, \tag{68}$$

решение которого определяет искомое интервальное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Система (68) имеет ограниченное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$ только тогда, когда автономная система

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = G[\overline{\mathbf{X}}_n(\overset{*}{U}_n)] \tag{69}$$

асимптотически устойчива в целом или в области, содержащей начало координат.

Подставив управление $\overset{*}{U}_n = B^{-1}\tilde{U}_n^*$ в (69), получим уравнение движения семейства автономных систем (69) в явном виде

$$X_{n+1} = \Delta A X_n + \Delta k \overset{*}{f}[\sigma(X_n)]B, \text{ где } \Delta A \in \delta\mathbf{A}, \ \ \Delta k \in \delta\chi. \tag{70}$$

Несмотря на то что управление $\overset{*}{U}_n$ оптимально в оговоренном смысле, это еще не означает, что оно гарантирует робастную устойчивость семейства нелинейных систем (70), так как это семейство систем в общем случае может быть настолько обширно (радиусы множеств $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\chi$ настолько велики), что не существует одного управления, обеспечивающего робастную устойчивость всего этого семейства.

Откажемся от избыточного в приложениях требования сохранения устойчивости в целом и ограничимся требованием устойчивости в области

$$X_n \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} = \{X : \|X\|_\infty \le \rho\}.$$

Для анализа устойчивости семейства автономных систем (70) используем такую характеристику множества $\mathbf{X}$, как его радиус $r(\mathbf{X})$, и воспользуемся результатом работы [8], в которой принцип сжатых отображений обобщен на класс нелинейных разностных включений.

Теорема 2 из [8]. Введем функцию Ляпунова в форме $r(\mathbf{X}_n)$. Если ее первая разность, вычисленная вдоль траектории системы (70), отрицательно определенная, т.е.

$$\Delta\upsilon_n = \upsilon_{n+1} - \upsilon_n = \rho[\mathbf{F}(\mathbf{X}_n)] - \rho(\mathbf{X}_n) < 0 \quad \forall n, \tag{71}$$

то тривиальное решение разностного включения (71) асимптотически устойчиво.

Следствие теоремы. Если начало координат — центр множества $\mathbf{X}_n$, т.е. центр сферы минимального радиуса, описанной вокруг $\mathbf{X}_n$, является началом координат, то значение функции $\rho(\mathbf{X}_n)$, вычисленной по уравнению (70) при использовании нормы $\|X\|_\infty$, совпадает с радиусом описанной сферы, и из выполнения неравенства (71) следует, что имеет место включение

$$\mathbf{X}_{n+1} \subset \mathbf{X}_n. \tag{72}$$

Нетрудно показать, что для интервальных множеств $\mathbf{X}_n$ и $\mathbf{X}_{n+1}$ с центрами в начале координат строгое включение (72) имеет место, если и только если, по крайней мере, одно из системы нестрогих неравенств $\underline{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}) \geq \underline{x}_{i,n}(\tilde{u}_{in})$, $\bar{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in}) \leq \bar{x}_{i,n}(\tilde{u}_{in})$, $i = \overline{1;m}$, является строгим.

Примем, что матрица A и многозначное отображение (54) таковы, что для множества $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ имеет место включение $\overline{\mathbf{X}}_{n+1} \subset \overline{\mathbf{X}}_n$, что является достаточным условием устойчивости семейства нелинейной системы (70) и необходимым условием существования ограниченного инвариантного множества системы (68).

Определить в аналитической форме решение нелинейного уравнения (68) относительно искомого множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ невозможно, и оно может быть найдено лишь с помощью какой-либо итерационной процедуры [8].

Эффективность применения той или иной итерационной процедуры существенно зависит от выбора начального приближения $\overset{*}{\mathbf{X}}_0$. Из (68) следует, что $r(\overset{*}{\mathbf{X}}) > r(\mathbf{Z})$, но насколько $r(\overset{*}{\mathbf{X}})$ больше $r(\mathbf{Z})$, по априорным данным установить невозможно. Поэтому в качестве нулевого приближения примем $\overset{*}{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{Z}$. Далее на первом шаге итераций определяем $G(\overset{*}{\mathbf{X}}_1)$ и находим величины $r_i(\overset{*}{\mathbf{X}}_0)$, $i = \overline{1;m}$, и $\Delta r_i = r_i(\overset{*}{\mathbf{X}}_0) - r_i[\overset{*}{\mathbf{X}}_{0i} = r(\mathbf{z}_i)]$, $i = \overline{1;m}$. Затем действуем по правилу деления отрезков $\Delta r_i(\cdot)$ пополам, а величины $r_i(\overset{*}{\mathbf{X}}_{i,k})$, $i = \overline{1;m}$, и k, где k — номер итерации, изменяем по алгоритму

$$r_{i,k+1}(\overset{*}{\mathbf{X}}_{i,k+1}) = r_i(\overset{*}{\mathbf{X}}_{i,k}) + 0{,}5\Delta r_i\,, \quad i = \overline{1;m}.$$

Этот итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не будут выполнены неравенства $|\Delta r_{i,k}| \leq \varepsilon_i$, $i = \overline{1;m}$, где ε — заданная допустимая погрешность.

Предложенный алгоритм обеспечивает сходимость процесса итераций со скоростью геометрической прогрессии.

Радиус $r(\overset{*}{\mathbf{X}})$ интервального инвариантного множества $\overset{*}{\mathbf{X}}$ равен

$$r(\overset{*}{\mathbf{X}}) = \sum_{i=1}^{m} r_i(\overset{*}{\mathbf{X}}).$$

3. Управление динамическими системами с оценками нелинейных функций по норме

Рассмотрим ту же систему (1), (2), но, как и зачастую в приложениях, с оценкой нелинейной функции $f(X_n)$ по норме

$$f(X_n) = k\|X_n\|_\infty \operatorname{sign}\sigma(X_n), \text{ где } \underline{k} \leq k \leq \bar{k}. \tag{73}$$

Здесь, как и выше, $\sigma(X_n) = C^{\mathrm{T}} X_n$, $\|C\| \neq 0$.

Цель управления семейством систем (1), (2), (73) — как и выше, минимизация радиуса интервального инвариантного множества этого семейства систем.

Для этого прежде всего найдем уравнение эволюции интервальных множеств этого семейства при условии, что для X_n, как и выше, задана его оценка (10), которую запишем в виде

$$X_n \in \mathbf{X}_{n+1} = \underset{s=1;2^m}{\underline{\text{conv}}} \{X_n^s\}, \text{ где } X_n^s \text{ — } s\text{-я вершина множества } \mathbf{X}_{n+1}. \tag{74}$$

Рассмотрим параметрическое множество

$$\mathbf{X}'_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ \underline{k} \le k \le \overline{k}}} [AX_n + k\|X_n\|_\infty \operatorname{sign} C^{\mathrm{T}} X_n B + \tilde{U}_n]. \tag{75}$$

Это множество неинтервальное, и поэтому, как и выше, аппроксимируем его интервальным множеством минимального объема $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$ (12), (13), где границы $\underline{x}_{i,n+1}$, $\overline{x}_{i,n+1}$, $i = \overline{2; m}$, интервальных множеств $\overline{\mathbf{x}}_{i,n+1}$, $i = \overline{2; m}$, определяются соотношениями (15), а границы $\underline{x}_{1,n+1}$, $\overline{x}_{1,n+1}$ интервального множества $\overline{\mathbf{x}}_{1,n+1}$ — как решения задач

$$\underline{x}_{1,n+1} = \underset{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ \underline{k} \le k \le \overline{k}}}{\underline{\min}} \left\{ \gamma(\cdot) = A_1^{\mathrm{T}} X_n + k \left(\sum_{i=1}^{m} |x_{i,n}| \right) \operatorname{sign} C^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{1n} \right\}, \tag{76}$$

$$\overline{x}_{1,n+1} = \underset{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ \underline{k} \le k \le \overline{k}}}{\underline{\max}} \left\{ \gamma(\cdot) = A_1^{\mathrm{T}} X_n + k \left(\sum_{i=1}^{m} |x_{i,n}| \right) \operatorname{sign} C^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{1n} \right\}. \tag{77}$$

Экстремумы выпуклой функции $\gamma(\cdot)$ принадлежат вершинам X_n^s множества $\overline{\mathbf{X}}_n$ и границам $k_1 = \underline{k}$, $k_2 = \overline{k}$ интервальных значений k. Поэтому задачи (76), (77) — комбинаторные задачи

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_{1,n+1}(\tilde{u}_{1,n}) &= \underset{\substack{s=1;2^m \\ l=1;2}}{\underline{\min}} \left\{ A_1^{\mathrm{T}} X_n^s + k_l \left(\sum_{i=1}^{m} | x_{i,n}^s | \right) \operatorname{sign} C^{\mathrm{T}} X_n^s + \tilde{u}_{1,n} \right\}, \\ \overline{x}_{1,n+1}(\tilde{u}_{1,n}) &= \underset{\substack{s=1;2^m \\ l=1;2}}{\underline{\max}} \left\{ A_1^{\mathrm{T}} X_n^s + k_l \left(\sum_{i=1}^{m} | x_{i,n}^s | \right) \operatorname{sign} C^{\mathrm{T}} X_n^s + \tilde{u}_{1,n} \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{78}$$

Принимая во внимание невысокую размерность задач (78), их решения найдем полным перебором всех вариантов.

Так как для функции $\overset{*}{f}(X)$ справедливо равенство $\overset{*}{f}(-X) = -\overset{*}{f}(X)$, размерность задач (77) можно существенно понизить, определяя их решения только для тех вершин X_n^s, для которых справедливо соотношение $C^{\mathrm{T}} X_n^s \ge 0$. При этом справедливо равенство $\underline{x}_{1,n+1} = -\overline{x}_{1,n+1}$. Поэтому определение величин $\underline{x}_{i,n+1}$, $\overline{x}_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m}$, требует решения лишь задач

$$\overline{x}_{i,n+1} = \underset{l=1;2}{\underline{\max}} \left\{ A_1^{\mathrm{T}} X_n^s + k_l \left(\sum_{i=1}^{m} | x_{i,n}^s | \right) + \tilde{u}_{1n} \right\} \tag{79}$$

только для таких X_n^s, для которых справедливо нестрогое неравенство $C^{\mathrm{T}} X_n^s \ge 0$.

 ISSN 0572-2691

Найденные величины $\underline{x}_{i,n+1}$, $\overline{x}_{i,n+1}$, $i = \overline{1; m}$, определяют семейство интервальных множеств

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \Phi[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)]. \tag{80}$$

Далее рассмотрим эволюцию интервальных множеств

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \Phi[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)] + \mathbf{Z}. \tag{81}$$

Для системы (81) решим задачу выбора управления $\tilde{U}_n$ из условия минимизации радиуса этой системы, а также задачи, аналогичные задачам (40), (41), с учетом особенностей системы (81).

Как и выше, цель управления $\tilde{U}_n$ — минимизация радиуса множества $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Из (12)–(14) следует, что эта задача сводится к задаче

$$\min_{\tilde{U}_n} R\{\Phi[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)]\}, \tag{82}$$

где

$$R\{\Phi[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{U}_n)]\} = r_1\{\varphi_1[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{1n})]\} \times \ldots \times r_m\{\varphi_m[\overline{\mathbf{X}}_n(\tilde{u}_{mn})]\}. \tag{83}$$

Так как множество $\overline{\mathbf{X}}_n$ центрально-симметрическое, справедливы неравенства

$$\underline{x}_{i,n+1} = -\overline{x}_{i,n+1}, \;\; i = \overline{1; m}, \tag{84}$$

и, следовательно, в соответствии с (12), (13)

$$r_i[\varphi_i(\overline{\mathbf{X}}_n)] = 2[\overline{x}_{i,n+1}(\tilde{u}_{in})], \;\; i = \overline{1; m}. \tag{85}$$

Искомые оптимальные управления $\tilde{u}_i = B_i^{\mathrm{T}} U_n$, $i = \overline{1; m}$, являются решениями задач

$$\min_{\tilde{u}_{1n}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A_1^T \in \mathbf{A}_1 \\ k \in \chi}} \left| A_1^{\mathrm{T}} X_n + k \left(\sum_{i=1}^{m} |x_{i,n}| \right) \operatorname{sign} C^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{1n} \right|, \tag{86}$$

$$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ A_i^T \in \mathbf{A}_i}} \left| (A_i^{\mathrm{T}} X_n + \tilde{u}_{in} \right|, \;\; i = \overline{2; m}. \tag{87}$$

Так же как и выше, представим множества $\mathbf{A}_i$, $i = \overline{1; m}$, и множество χ в центрированных формах (37)–(39) и перепишем минимаксные задачи (81), (82) в виде

$$\min_{\tilde{u}_{1n}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ \Delta A_1^T \in \delta\mathbf{A}_1 \\ \Delta k \in \delta\chi}} \left| (\mathring{A}_1^{\mathrm{T}} + \Delta A_1^{\mathrm{T}})\, X_n + (\mathring{k} + \Delta k) \left(\sum_{i=1}^{m} |x_{i,n}| \operatorname{sign} x_{1n} \right) + \tilde{u}_{1n} \right|, \tag{88}$$

$$\min_{\tilde{u}_{in}} \max_{\substack{X_n \in \overline{\mathbf{X}}_n \\ \Delta A_i^T \in \delta\mathbf{A}_i}} \left| (\mathring{A}_i^{\mathrm{T}} + \Delta A_i^{\mathrm{T}})\, X_n + \tilde{u}_{in} \right|, \;\; i = \overline{2; m}. \tag{89}$$

С точностью до обозначений решения задач (88), (89) получены в [7], и они имеют вид

$$\tilde{u}_{1n}^{*} = -\left\{ \overset{\circ}{A}{}_{1}^{\mathrm{T}} X_{n} + \overset{\circ}{k} \left(\sum_{i=1}^{m} \left| x_{i,n} \right| \right) \operatorname{sign} x_{1n} \right\}, \tag{90}$$

$$\tilde{u}_{in}^{*} = -\{ \overset{\circ}{A}{}_{i}^{\mathrm{T}} X_{n} \}, \; i = \overline{2; m}. \tag{91}$$

По определенному вектору $\tilde{U}_{n}^{*}$ находим искомый вектор управления

$$\overset{*}{U}_{n} = B^{-1} \tilde{U}_{n}^{*}. \tag{92}$$

Подставив управление $\overset{*}{U}_{n}$ в уравнение движения системы (81), получим

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \Phi[\overline{\mathbf{X}}_{n}(\overset{*}{U}_{n})] + \mathbf{Z}. \tag{93}$$

Приняв $\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = \overline{\mathbf{X}}_{n} = \overset{*}{\mathbf{X}}$ и подставив эти величины в (93), получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \Phi[\overline{\mathbf{X}}_{n}(\overset{*}{U}_{n})] + \mathbf{Z}, \tag{94}$$

решение которого определяет искомое интервальное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Система (94) имеет ограниченное инвариантное множество только тогда, когда соответствующая ей автономная система

$$\overline{\mathbf{X}}_{n+1} = [\overline{\mathbf{X}}_{n}(\overset{*}{U}_{n})] \tag{95}$$

асимптотически устойчива в целом или в заданной области $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$.

Для класса нелинейных вектор-функций, которые могут быть представлены в квазилинейной форме

$$X_{n+1} = F(X_{n}, A, k) = A(X_{n}, k) X_{n}, \text{ где } A \in \mathbf{A}, \; k \in \chi, \tag{96}$$

задача анализа их устойчивости решается достаточно просто.

Для семейства систем (96) достаточным условием их устойчивости в области $\overset{\circ}{\mathbf{X}}$ является выполнение неравенства (принципа сжатых отображений)

$$\max_{\substack{X_{n} \in \overset{\circ}{\mathbf{X}} \\ k \in \chi}} \left\| A(X_{n}), k \right\| \le q < 1,$$

проверяемого элементарно. Но функция $\tilde{f}(X) = k\left(\left\| X \right\|_{\infty} = \sum_{i=1}^{m} \left| x_{i} \right| \right)$ непредставима в квазилинейной форме $\tilde{f}(X) = A(X) X$.

Действительно, примем, что

$$A(X) = \operatorname{diag}\{a_{ii}(X)\}_{i=1}^{m}, \text{ где } a_{ii}(X) = \frac{\left| x_{i} \right|}{x_{i}}, \; i = \overline{1; m}.$$

Так как при $X = 0$ имеем 0/0, а функция $\tilde{f}(x_{i}) = \left| x_{i} \right|$ недифференцируема, то избавиться от неопределенности 0/0 невозможно.

Как и выше, откажемся от избыточного в приложениях требования обеспечения устойчивости «в целом» синтезированных выше семейств нелинейных систем и ограничимся требованием их устойчивости лишь в области

ISSN 0572-2691

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \{X : \max_{X \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}} \| X \| \le \overset{\circ}{\rho}\}.$$

Для проверки устойчивости семейства систем (96) воспользуемся достаточными условиями, следующими из принципа сжатых отображений

$$\| AX_n + \bar{k} \cdot \| X_n \|_\infty \|_\infty < \| X_n \|_\infty, \ \ (\left\| A_1^{\mathrm{T}} \right\| + \bar{k}) \le q_1 < 1, \ \ \| A_i^{\mathrm{T}} \| \le q_1 < 1, \ \ i = \overline{2;m}, \tag{97}$$

и примем, что матрица A и параметр $\bar{k}$ таковы, что эти неравенства справедливы.

Приняв, что $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n = \overset{*}{\mathbf{X}}$, и подставив эти обозначения в (94), получим уравнение

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \Phi(\overset{*}{\mathbf{X}}) + \mathbf{Z}, \tag{98}$$

решение которого определяет искомое интервальное инвариантное множество $\overset{*}{\mathbf{X}}$.

Решения уравнения (98) в аналитической форме не существует, поэтому для его определения воспользуемся итерационной процедурой, подробно описанной выше.

В приложении приведен пример, иллюстрирующий описанный выше итерационный метод определения интервального инвариантного множества.

Заключение

Решена задача минимизации воздействия ограниченных возмущений для некоторых классов семейств нелинейных дискретных динамических систем. Мерой оценки воздействия ограниченных возмущений принят радиус интервальных инвариантных множеств — аналог величины дисперсии при вероятностной природе возмущений.

Рассмотрены те часто встречающиеся в приложениях случаи, когда для нелинейных функций заданы лишь те или иные их оценки. Описаны три часто встречающихся случая, когда для нелинейных функций заданы двухсторонние ограничения, образующие многозначные отображения с заданными оценками по норме.

Для ограниченных возмущений, действующих на системы, приняты оценки в виде интервальных множеств.

Задача минимизации радиуса инвариантного множества естественным образом распадается на две самостоятельные задачи: 1) определение уравнения эволюции семейства интервальных множеств нелинейных дискретных систем и 2) определение уравнений, минимизирующих радиусы интервальных инвариантных множеств.

Эволюционирующие множества систем — в общем случае невыпуклые множества, определение которых связано с существенными трудностями вычислительного характера, а кроме того, для их дальнейшего исследования не существует конструктивных методов. Поэтому эти множества аппроксимированы интервальными множествами минимального объема.

Определение управления, обеспечивающего получение гарантированного результата при минимизации радиуса интервального множества, сводится к решению минимаксных задач. Установлено, что эти задачи с точностью до обозначений совпадают с минимаксными задачами, решения которых в аналитической форме получены ранее.

Приведен пример, иллюстрирующий предложенный метод решения поставленной оптимизационной задачи.

Полученные результаты очевидным образом обобщаются на случаи систем со многими нелинейностями рассмотренных видов.

Приложение

Определим интервальное инвариантное множество системы (75) при $m=2$

$$X_{n+1}=\Delta AX_n+\Delta k\left(\sum_{i=1}^{2}|x_{in}|\right)B+Z_n, \qquad (\text{П.1})$$

где

$$\Delta A=\begin{Vmatrix}\Delta a_{11} & \Delta a_{12}\\ \Delta a_{21} & \Delta a_{22}\end{Vmatrix},\ B^{\mathrm{T}}=(0,\ldots,0,1), \qquad (\text{П.2})$$

$$\Delta a_{11}\in\delta\alpha_{11}=\{\Delta a_{11}:0{,}1\le\Delta a_{11}\le 0{,}3\},\ \Delta a_{12}\in\delta\alpha_{12}=\{\Delta a_{12}:0{,}15\le\Delta a_{12}\le 0{,}4\}, \qquad (\text{П.3})$$

$$\Delta a_{21}\in\delta\alpha_{21}=\{\Delta a_{21}:0{,}15\le\Delta a_{21}\le 0{,}4\},\ \Delta a_{22}\in\delta\alpha_{22}=\{\Delta a_{22}:0{,}15\le\Delta a_{22}\le 0{,}3\}, \qquad (\text{П.4})$$

$$\Delta k\in\delta\chi=\{\Delta k:0{,}1\le\Delta k\le 0{,}2\},\ |z_{in}|\le 0{,}2,\ i=\overline{1;2}. \qquad (\text{П.5})$$

Достаточное условие робастной устойчивости (97) нелинейной системы (П.1)–(П.5) выполняется, и, следовательно, существует ее ограниченное инвариантное множество.

Для определения интервального инвариантного множества системы (П.1)–(П.5) как решения уравнения (98) воспользуемся описанной выше итерационной процедурой, приняв в качестве нулевого приближения множество

$$\overset{*}{\mathbf{X}}_0=\underset{i=1;4}{\underline{\mathrm{conv}}}\left\{\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-1\\-1\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}1\\-1\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-1\\1\end{Vmatrix}\right\}. \qquad (\text{П.6})$$

Определив решения задач (78), (79) для множества $\overset{*}{\mathbf{X}}_0$, получим

$$\overset{*}{\mathbf{X}}_1=\Phi(\overset{*}{\mathbf{X}}_0)+\mathbf{Z}=\underset{i=1;4}{\underline{\mathrm{conv}}}\left\{\begin{Vmatrix}0{,}9\\1{,}3\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-0{,}9\\-1{,}3\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}0{,}9\\-1{,}3\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-0{,}9\\1{,}3\end{Vmatrix}\right\}. \qquad (\text{П.7})$$

Примем в качестве множества $\overset{*}{\mathbf{X}}_2$ такое множество, что $R(\overset{*}{\mathbf{X}}_2)<R(\overset{*}{\mathbf{X}}_0)$

$$\overset{*}{\mathbf{X}}_2=\underset{i=1;4}{\underline{\mathrm{conv}}}\left\{\begin{Vmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}0{,}5\\-0{,}5\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-0{,}5\\0{,}5\end{Vmatrix}\right\}. \qquad (\text{П.8})$$

Найдя решения задач (78), (79) для множества $\overset{*}{\mathbf{X}}_2$, получим

$$\overset{*}{\mathbf{X}}_3=\Phi(\overset{*}{\mathbf{X}}_2)+\mathbf{Z}=\underset{i=1;4}{\underline{\mathrm{conv}}}\left\{\begin{Vmatrix}0{,}55\\0{,}75\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-0{,}55\\-0{,}75\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}0{,}55\\-0{,}75\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}-0{,}55\\0{,}75\end{Vmatrix}\right\}. \qquad (\text{П.9})$$

Далее, определив величины

$$\Delta r(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i3})=r(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i3})-r(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i2}),\ i=\overline{1;4},$$

где $r(\overset{*}{\mathbf{x}}_{i,3})=2{,}6$; $r(\overset{*}{\mathbf{x}}_{2,3})=1{,}5$; $r(\overset{*}{\mathbf{x}}_{3,3})=1{,}8$; $r(\overset{*}{\mathbf{x}}_{4,3})=1{,}1$ и воспользовавшись описанной выше итерационной процедурой (*), после трех шагов итераций с заданной точностью

$$\mu=\left|\frac{\Delta r(\overset{*}{\mathbf{X}}_i)}{r(\overset{*}{\mathbf{X}}_i)}\right|\le 0{,}05$$

ISSN 0572-2691

получим интервальное инвариантное множество системы (П.1)–(П.5)

$$\overset{*}{\mathbf{X}} = \underset{i=\overline{1;4}}{\mathrm{conv}}\left\{\begin{Vmatrix}0{,}53\\0{,}83\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}-0{,}53\\-0{,}83\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}0{,}53\\-0{,}83\end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix}-0{,}53\\0{,}83\end{Vmatrix}\right\}.$$

В.М. Кунцевич

МІНІМІЗАЦІЯ ВПЛИВУ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ НА НЕЛІНІЙНІ ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ

Розв’язано задачу мінімізації впливу обмежених збурень на динамічні системи, для яких на нелінійні функції задано лише їх двосторонні лінійні і нелінійні обмеження або їх оцінки за нормою. Як міру впливу збурень на динамічні системи прийнято радіус їх інтервальних інваріантних множин — аналогів величин дисперсії за ймовірністю природи збурень. Розглянуто тільки випадки, коли для нелінійних функцій задано їх оцінки, що утворюють багатозначні відображення. Наведено ілюстративний приклад.

V.M. Kuntsevich

MINIMIZATION OF IMPACT OF BOUNDED PERTURBATIONS ON NONLINEAR DISCRETE SYSTEMS

The paper considers nonlinear dynamic systems with linear/nonlinear bilateral constraints and/or norm bounds, and it presents the solution to the problem of minimization of impact of bounded perturbations on these systems. The radius of interval invariant set, which is an analogue to the variance in case of probabilistic nature of perturbations, is used as measure of the impact of perturbations on dynamic systems. Consideration is given to the cases when the given estimates for non-linear functions are multivalued mappings. An illustrative example is presented as well.

1. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. — М. : ЛЕНАНД, 2014. — 560 с.
2. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 11. — С. 9–59.
3. *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. — 2016. — **102**. — 332 с.
4. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. — 1944. — **8**, вып. 3. — С. 246–248.
5. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М. : Изд-во АН СССР, 1963. — 261 с.
6. *Кунцевич В.М., Куржанский А.Б.* Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управление ими // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 1. — С. 5–21.
7. *Кунцевич В.М.* Управление семейством нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами // Труды ИММ УрО РАН. — 2014. — **20**, № 14. — С. 178–186.
8. *Кунцевич А.В., Кунцевич В.М.* Устойчивость в области нелинейных разностных включений // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 11–17.

Получено 22.11.2017