

# МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

УДК 517.595

*В.Г. Городецкий*

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С АДДИТИВНЫМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

### Введение

Идентификация систем различного типа — одна из основных проблем теории моделирования. Такая задача предполагает определение вида и параметров модели при наличии информации о входе и выходе системы [1]. Значительная часть исследований, посвященных решению этой проблемы, касается линейных систем [2, 3]. Более широкие возможности дает использование подхода, учитывающего нелинейный характер систем, например, на основе моделей Винера–Гаммерштейна [4]. В последнее время все больше внимания уделяется исследованию нелинейных систем с внешним возбуждением, в том числе хаотических. Такие системы часто встречаются в медицине [5, 6], биологии [7], эпидемиологии [8], экологии [9], физике, технике [10, 11] и других областях.

При решении задачи идентификации таких систем не всегда применимы перечисленные выше классические методы. Часто для анализа доступна только одна наблюдаемая переменная процесса. Также наряду с неизвестными постоянными коэффициентами модели могут быть неизвестны и параметры входного воздействия. Кроме этого, одной из особенностей таких систем является возможный хаотический характер наблюдаемого временного ряда, что обуславливает высокую чувствительность модели к значениям ее параметров и начальным условиям. Упомянутые выше обстоятельства существенно усложняют проблему, даже если входное воздействие имеет периодический характер.

В последнее время для решения таких задач все чаще применяют методы нелинейной динамики [12]. Решение задачи идентификации на основе таких подходов рассматривалось в [13], где реальная реконструируемая система заменялась нейронной сетью, которая обеспечивала реализацию выхода системы — наблюдаемую переменную. В [14] предложен метод реконструкции не самой модели, а ее аттрактора, основанный на сдвиге единственной наблюдаемой переменной, базирующемся на известной теореме Такенса [15].

Следует также учитывать назначение искомой модели. Если она используется для получения сигнала управления или прогноза изменения переменной процесса, то такая модель может быть проще, чем модель, которая отражает реальную физику процесса. Именно последняя проблема и рассматривается в данной работе. Частный случай такой задачи — параметрическая идентификация при заданном общем виде модели.

### Постановка задачи

Предположим, неизвестная система имеет общий вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = C_0(t) + \sum_{j=1}^m c_j f_j(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

где  $x_1$  — единственная наблюдаемая переменная,  $f_j$  — непрерывные функции переменных  $x_1, \dots, x_n$ ,  $c_j$  — постоянные коэффициенты,  $j=1, \dots, m$ ,  $C_0(t)$  — аддитивное внешнее воздействие, которое будем считать периодическим. Очевидно, что к виду (1) может быть приведено дифференциальное уравнение высокого порядка:

$$\frac{d^n x}{dt^n} - \sum_{j=1}^m c_j f_j \left( x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right) = C_0(t).$$

Также, если неизвестная система в отличие от (1) имеет полиномы в правых частях всех уравнений, то будем считать, что она может быть приведена к виду (1) с использованием преобразований, предложенных в [12, 16]. Как известно [13], такая форма представления модели позволяет заменить неизвестные переменные процесса производными по времени наблюдаемой переменной. С другой стороны, в этом случае необходимость многократного численного дифференцирования реального временного ряда приводит к дополнительным вычислительным погрешностям [17]. Особенно этот эффект проявляется при численном дифференцировании зашумленных рядов. Поэтому в дальнейшем будем считать, что в системе (1)  $n \leq 3$ .

Согласно задаче идентификации для системы (1) в качестве известных на некотором временном интервале  $[t_b, t_e]$  примем наблюдаемую  $x_1(t)$ , ее производные  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$  и вид функций  $f_j$ . Необходимо определить постоянные коэффициенты  $c_j$  и функцию  $C_0(t)$ , которую, в отличие от типовых задач идентификации, будем также считать неизвестной.

### Обоснование алгоритма

Для решения поставленной задачи можно применить алгоритм, предложенный в [18]. Такой алгоритм предполагает перебор всех возможных значений периода  $T$  неизвестного гармонического воздействия. При этом для каждого  $T$  необходимо выполнить три операции:

- 1) решить обратную задачу [19], т.е. определить модель по временному ряду наблюдаемой переменной;
- 2) решить прямую задачу, т.е. решить полученные уравнения для получения реконструированного временного ряда;
- 3) сравнить оригинальный временной ряд с полученным в п. 2 для выбора наиболее точного вектора параметров.

Для решения сформулированной выше задачи предлагается более простой по сравнению с [18] алгоритм, требующий меньших затрат машинного времени. Он базируется на теоремах, доказанных в [20].

В случае  $C_0(t) = \text{const} = c_0$  сформулированная выше задача для системы (1) легко решается методами линейной алгебры, т.е. достаточно решить алгебраическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t_0) = c_0 + c_1 f_1(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)) + \dots + c_m f_m(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t_m) = c_0 + c_1 f_1(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)) + \dots + c_m f_m(x_1(t_m), \dots, x_n(t_m)), \end{cases} \quad (2)$$

где  $t_m$  — произвольные моменты времени, а неизвестными являются коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_m$ .

Если же  $C_0(t) \neq \text{const}$ , то задача таким способом неразрешима, так как каждое из уравнений системы (2) будет содержать неизвестную величину  $C_0(t)$ . В этом случае могут оказаться полезными теоремы 1 и 2 из [20]. Пусть

$$C_0(t) = p_T(t), \quad (3)$$

где  $p_T(t)$  — периодическая функция периода  $T$ . Выберем моменты времени  $t_0, \dots, t_m$  для формирования системы (2) таким образом, что

$$t_1 = t_0 + \tau, t_2 = t_0 + 2\tau, t_3 = t_0 + 3\tau, \dots, t_m = t_0 + m\tau, \quad (4)$$

где  $\tau$  — произвольное число. Введем обозначение:  $\mathbf{c}(t_0, \tau) = \{c_1(t_0, \tau), c_2(t_0, \tau), \dots, c_m(t_0, \tau)\}$ , где  $\mathbf{c}(t_0, \tau)$  — вектор искомых постоянных коэффициентов. Рассмотрим систему (2) для двух разных значений:  $t_0 = t_{01}$  и  $t_0 = t_{02}$ .

**Теорема 1.** Если выполняется соотношение (3) и моменты времени  $t_1, \dots, t_m$  в системе (2) выбираются согласно (4), то для того, чтобы  $\tau = T$ , необходимо, чтобы существовала хотя бы одна пара значений  $t_{01}$  и  $t_{02}$ , для которых выполняется равенство

$$\mathbf{c}(t_{01}, \tau) = \mathbf{c}(t_{02}, \tau). \quad (5)$$

**Теорема 2.** Если выполняется соотношение (3) и моменты времени  $t_1, \dots, t_m$  в системе (2) выбираются согласно (4), то для того, чтобы  $\tau = T$ , достаточно, чтобы для любых двух начальных значений  $t_{01}$  и  $t_{02}$  выполнялось равенство (5).

*Примечание.* Очевидно, что величины  $t_{01}$ ,  $t_{02}$  и  $\tau$  должны выбираться таким образом, что величина  $t_m$  из (4) должна подчиняться соотношению  $t_m \leq t_k$ .

Исходя из приведенных теорем, был разработан алгоритм, включающий следующие операции:

- 1) решение обратной задачи аналогично алгоритму [18], описанному выше;
- 2) сравнение векторов постоянных коэффициентов модели для разных  $t_0$  и  $\tau$ .

Как видно, среди перечисленных операций отсутствуют пп. 2 и 3 алгоритма [18], которые требуют значительных затрат машинного времени.

Для иллюстрации алгоритма, основанного на приведенных теоремах, использовался частный случай системы (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = C_0(t) + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1^2 + c_4x_1x_2 + c_5x_2^2 + c_6x_1^3 + c_7x_1^2x_2 + c_8x_1x_2^2 + c_9x_2^3, \end{cases} \quad (6)$$

где  $C_0(t) = a + c_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

Алгоритм применялся для идентификации обобщенной системы Дуффинга [21]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a + c_0 \cos(\omega t + \varphi) + c_1x_1 + c_2x_2 + c_6x_1^3 \end{cases} \quad (7)$$

с параметрами  $a = 11,3$ ,  $\omega = 1,113$ ,  $\varphi = 1,1047$ ,  $c_0 = 10$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -0,1$ ,  $c_6 = -1$ . Система (7) решалась на временном интервале 100 с с шагом  $10^{-3}$  с. Временные зависимости для переменных  $x_1$ ,  $x_2$  и фазовый портрет системы представлены на рис. 1, а–с соответственно.

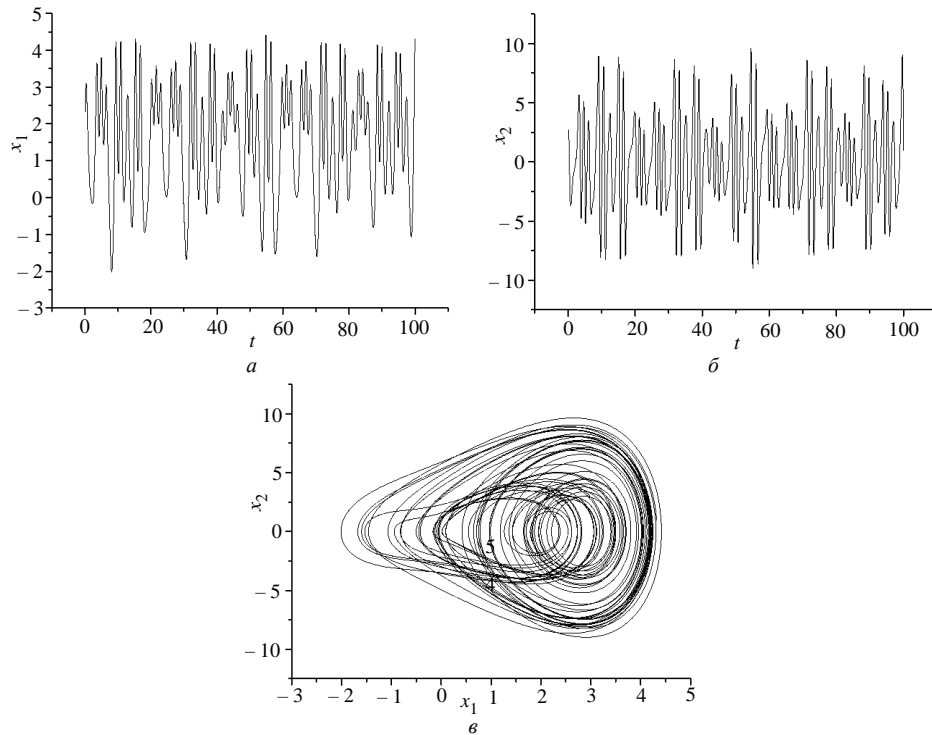


Рис. 1

### Оценка периода внешнего воздействия и постоянных коэффициентов модели

В некоторых случаях по графику изменения наблюдаемой переменной можно предварительно оценить величину периода внешнего воздействия и тем самым упростить решение поставленной задачи. В данном случае такая оценка затруднительна, так как зависимость  $x_1(t)$ , представленная на рис. 1, имеет хаотический характер. Для подтверждения этого факта на рис. 2 показан спектр (без постоянной составляющей) сигнала  $x_1(t)$ , где  $A$  и  $k$  — относительная амплитуда и номер гармоники соответственно. Этот спектр имеет непрерывный характер, который соответствует аperiodическим колебаниям. Такая частотная характеристика является одним из признаков детерминированного хаоса [22]. В то же время, как известно, многочастотные или периодические колебания имеют дискретный спектр. Для сравнения на рис. 3 показан спектр сигнала  $x_1(t)$  системы (7) при  $\omega = 1,47$ . Как видно из графика, в этом случае спектр имеет ярко выраженную первую и кратные ей гармоники. Еще одна особенность хаотических систем — их высокая чувствительность к начальным условиям и параметрам. Это обстоятельство повышает требования к точности определения значений коэффициентов модели.

Учитывая сказанное выше, для определения величины периода внешнего воздействия  $T$  необходимо перебрать весь диапазон его возможных значений. Согласно теореме 1 это необходимо сделать для двух произвольных значений  $t_0$ . Следует также предусмотреть возможность появления плохо обусловленной матрицы при ее формировании аналогично решению алгебраической системы (2). Поэтому целесообразно использовать для численной обработки некоторый диапазон значений  $t_0$  вместо отдельных точек  $t_{01}$  и  $t_{02}$ . Также для большей достоверности результата согласно теореме 2 следует проверить полученные первоначально значения параметров на других парах:  $t_{01}$  и  $t_{02}$ .

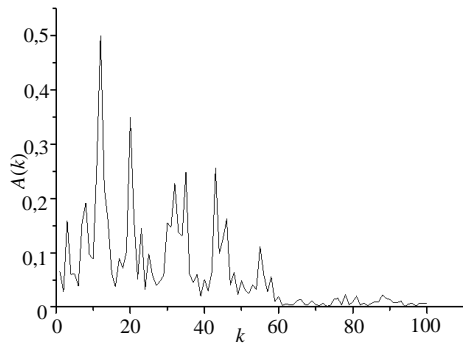


Рис. 2

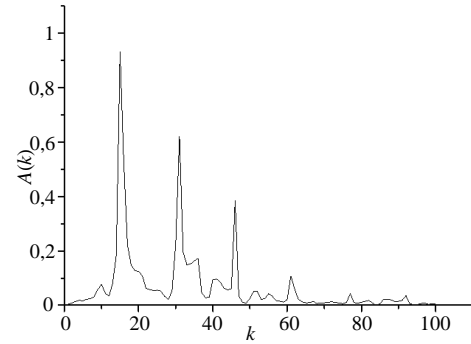


Рис. 3

В данном исследовании для решения обратной задачи исходными величинами для расчета были приняты значения, указанные в табл. 1. В результате вычислений получены величины, приведенные в табл. 2. Погрешность определения коэффициентов рассчитывалась по формуле

$$\delta = \sqrt{(c_{11} - c_{12})^2 + (c_{21} - c_{22})^2 + \dots + (c_{91} - c_{92})^2}, \quad (8)$$

где начальному моменту времени  $t_{01}$  соответствуют коэффициенты  $c_{11}, c_{21}, \dots, c_{91}$ , а моменту времени  $t_{02}$  — коэффициенты  $c_{12}, c_{22}, \dots, c_{92}$ .

Таблица 1

| Единица измерения            | Диапазон изменения, $T$ | Диапазон изменения, $t_{01}$ | Диапазон изменения, $t_{02}$ |
|------------------------------|-------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Секунды                      | 0,001 ... 10            | 0,200 ... 0,205              | 0,800 ... 0,805              |
| Номера точек временного ряда | 1 ... 10000             | 200 ... 205                  | 800 ... 805                  |

Таблица 2

| Коэффициенты | Значения коэффициентов для $t_{01} = 0,205$ | Значения коэффициентов для $t_{02} = 0,804$ | Погрешность, $\delta$ | Период, $T$ |
|--------------|---|---|-----------------------|-------------|
| $C_0$        | 3,713072                                    | 3,717566                                    | 0,026408              | 0,599 с     |
| $c_1$        | 8,653097                                    | 8,669384                                    |                       |             |
| $c_2$        | 1,987565                                    | 1,98610                                     |                       |             |
| $c_3$        | 5,114387                                    | 5,096896                                    |                       |             |
| $c_4$        | 0,146180                                    | 0,138807                                    |                       |             |
| $c_5$        | -0,811002                                   | -0,816470                                   |                       |             |
| $c_6$        | -2,660187                                   | -2,656515                                   |                       |             |
| $c_7$        | -0,802234                                   | -0,798412                                   |                       |             |
| $c_8$        | -0,217807                                   | -0,214709                                   |                       |             |
| $c_9$        | 0,146271                                    | 0,146212                                    |                       |             |

Согласно рекомендациям теоремы 2 необходимо проверить полученную величину периода  $T$  при другой паре значений:  $t_{01}$  и  $t_{02}$ . Вычисления производились при различных наборах этих величин. Результаты приведены в табл. 3. Как видно из таблицы, наиболее часто в результатах расчетов получены значения периода  $T$  из диапазона 5,623...5,649 с. Для уточнения реального значения  $T$  был произведен расчет при следующих условиях:  $T = 5,620...5,660$  с,  $t_{01} = 0,400...0,600$  с,  $t_{02} = 0,700...0,900$  с. Результаты этого расчета представлены в табл. 4.

Таблица 3

| №  | Диапазон изменения, $t_{01}$ | Диапазон изменения, $t_{02}$ | Погрешность, $\delta$ | Период, $T_3$ |
|----|------------------------------|------------------------------|-----------------------|---------------|
| 1  | 0,200...0,205                | 0,700...0,705                | 0,673321              | 5,645         |
| 2  | 0,300...0,305                | 0,700...0,705                | 0,403285              | 0,404         |
| 3  | 0,400...0,405                | 0,700...0,705                | 0,145675              | 0,297         |
| 4  | 0,500...0,505                | 0,700...0,705                | 0,488132              | 5,643         |
| 5  | 0,600...0,605                | 0,700...0,705                | 0,251983              | 5,623         |
| 6  | 0,200...0,205                | 0,800...0,805                | 0,026408              | 0,599         |
| 7  | 0,300...0,305                | 0,800...0,805                | 0,480441              | 5,631         |
| 8  | 0,400...0,405                | 0,800...0,805                | 0,425702              | 5,649         |
| 9  | 0,500...0,505                | 0,800...0,805                | 0,307811              | 5,643         |
| 10 | 0,600...0,605                | 0,800...0,805                | 0,406454              | 5,644         |

Таблица 4

| Коэффициенты | Значения коэффициентов для $t_{01} = 0,429$ | Значения коэффициентов для $t_{02} = 0,853$ | Погрешность, $\delta$ | Период, $T$ |
|--------------|---|---|-----------------------|-------------|
| $C_0$        | 11,106555                                   | 6,732771                                    | 0,095568              | 5,643 с     |
| $c_1$        | 1,68043                                     | 1,635059                                    |                       |             |
| $c_2$        | -0,147045                                   | -0,198436                                   |                       |             |
| $c_3$        | -0,512241                                   | -0,556418                                   |                       |             |
| $c_4$        | 0,230307                                    | 0,209618                                    |                       |             |
| $c_5$        | -0,005845                                   | 0,034121                                    |                       |             |
| $c_6$        | -0,899374                                   | -0,895939                                   |                       |             |
| $c_7$        | -0,04141                                    | -0,06191                                    |                       |             |
| $c_8$        | -0,016115                                   | -0,01749                                    |                       |             |
| $c_9$        | -0,007047                                   | -0,011816                                   |                       |             |

#### Упрощение модели

Для упрощения полученной модели можно попытаться приравнять нулю коэффициенты, значения которых согласно табл. 4 малы или существенно отличаются для разных значений  $t_{01}$  и  $t_{02}$ . Пусть  $c_5 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$ . Тогда система (6) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = C_0(t) + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1^2 + c_4x_1x_2 + c_6x_1^3. \end{cases} \quad (9)$$

Результаты расчета для системы (9) приведены в табл. 5.

Таблица 5

| Коэффициенты | Значения коэффициентов для $t_{01} = 0,429$ | Значения коэффициентов для $t_{02} = 0,853$ | Погрешность, $\delta$ | Период, $T$ |
|--------------|---|---|-----------------------|-------------|
| $C_0$        | 11,467768                                   | 7,425552                                    | 0,070702              | 5,648 с     |
| $c_1$        | 0,611095                                    | 0,611095                                    |                       |             |
| $c_2$        | -0,043543                                   | 0,020229                                    |                       |             |
| $c_3$        | 0,330448                                    | 0,330448                                    |                       |             |
| $c_4$        | -0,029758                                   | -0,043014                                   |                       |             |
| $c_6$        | -1,080863                                   | -1,069351                                   |                       |             |

При дальнейшем упрощении модели, как видно из табл. 5, можно попытаться пренебречь коэффициентами  $c_2$  и  $c_4$ . При  $c_2 = 0$  структура искомой системы примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = C_0(t) + c_1x_1 + c_3x_1^2 + c_4x_1x_2 + c_6x_1^3. \end{cases} \quad (10)$$

Расчеты для системы (10) при разных значениях  $t_{01}$  и  $t_{02}$  позволили получить значение  $T = 5,653...5,654$  с с погрешностью  $\delta \leq 0,05$ , что при отсутствии альтернативы можно считать приемлемым результатом. Если же принять дополнительно  $c_4 = 0$ , численный эксперимент приводит к значительному увеличению погрешности, что позволяет сделать вывод о неперспективности такой структуры.

Также был рассмотрен альтернативный вариант упрощения модели (9). Первоначально в ней было принято  $c_4 = 0$ , т.е. системой-кандидатом была модель

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = C_0(t) + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_1^2 + c_6x_1^3. \end{cases} \quad (11)$$

Применение алгоритма к этой системе привело к росту погрешности. Например, при  $t_{01} = 0,160...0,180$  с и  $t_{02} = 0,785...0,795$  с получены значения коэффициентов, представленные в табл. 6.

Как видно из таблицы, значения коэффициента  $c_3$  существенно отличаются для разных  $t_0$ . Это же расхождение наблюдается и для других диапазонов:  $t_{01}$  и  $t_{02}$ . Поэтому был рассмотрен вариант  $c_3 = 0$ . В результате получена структура, совпадающая с системой (7) и имеющая коэффициенты, значения которых представлены в табл. 7. По этим значениям видно, что погрешность существенно снизилась по сравнению со всеми предыдущими результатами. При других значениях  $t_{01}$  и  $t_{02}$  значение погрешности колебалось в пределах  $\delta = 0,001132...0,006056$ , а период  $T = 5,633...5,654$  с, что близко к заданному в системе (7), где  $T = 2\pi/\omega \cong 5,645$ .

Таблица 6

| Коэффициенты | Значения коэффициентов для $t_{01} = 0,178$ | Значения коэффициентов для $t_{02} = 0,795$ | Погрешность, $\delta$ | Период, $T$ |
|--------------|---|---|-----------------------|-------------|
| $C_0$        | 13,912322                                   | 6,983845                                    | 0,162155              | 5,653 с     |
| $c_1$        | 0,857084                                    | 0,742887                                    |                       |             |
| $c_2$        | -0,053211                                   | 0,053455                                    |                       |             |
| $c_3$        | 0,204035                                    | 0,319107                                    |                       |             |
| $c_6$        | -1,065965                                   | -1,062529                                   |                       |             |

Таблица 7

| Коэффициенты | Значения коэффициентов для $t_{01} = 0,063$ | Значения коэффициентов для $t_{02} = 0,889$ | Погрешность, $\delta$ | Период, $T$ |
|--------------|---|---|-----------------------|-------------|
| $C_0$        | 15,193969                                   | 6,202832                                    | 0,002906              | 5,641 с     |
| $c_1$        | 1,011063                                    | 1,009151                                    |                       |             |
| $c_2$        | -0,095997                                   | 0,097485                                    |                       |             |
| $c_6$        | -1,001658                                   | -1,000053                                   |                       |             |

### Определение параметров внешнего воздействия

На предыдущем этапе были определены значения постоянных коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_m$  и приблизительно оценена величина  $T$ . В то же время остальные параметры внешнего воздействия —  $a, c_0, \varphi$  — остаются неизвестными. Для определения этих величин использовалась вторая часть алгоритма. Согласно ей решалась алгебраическая система (2) для значений  $t_0$ , которые изменялись в диапазоне  $0...80$  с. При этом  $t_1, t_2, \dots$  выбирались согласно (4), где  $\tau = T$ . Фрагмент

зависимости  $C_0(t_0)$  представлен на рис. 4. Как видно из графика, в некоторых точках имеют место отклонения значений от синусоиды. Это объясняется плохой обусловленностью матрицы, сформированной для решения алгебраической системы (2) при некоторых  $t_0$  [20]. Данное обстоятельство послужило критерием для уточнения значения  $T$ . Оказалось, что наименьшее отклонение величины  $C_0(t_0)$  от синусоиды наблюдалось при  $T_1 = 5,645$  с и  $T_2 = 5,646$  с. Уточнение величины периода производилось при  $t_{01} = 0...0,500$  с,  $t_{02} = 0,501...1,000$  с. В результате для  $T_1$  погрешность составила  $\delta_1 = 0,000947$ , а для  $T_2$  —  $\delta_2 = 0,002070$ . Поэтому в качестве точного значения периода была принята величина  $T_1 = 5,645$  с.

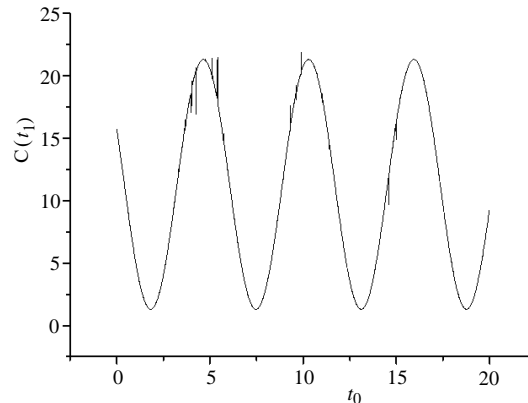


Рис. 4

Очевидно, что, зная  $C_0(t_0)$  в любой момент времени, несложно определить неизвестные параметры синусоиды. Кривая, представленная на рис. 4, получена для  $T = 5,645$  с. При этом оказалось, что  $a = 11,300085$ ,  $c_0 = 10,000083$ ,  $\omega = 1,113052$ ,  $\varphi = 1,104$ . После этого при известном  $T$  были уточнены значения постоянных коэффициентов, приведенные в табл. 8. Как видно, эти значения близки к заданным для системы (7), как и значения постоянных коэффициентов  $c_1, c_2, c_6$  из табл. 7.

На рис. 5, а для сравнения приведены временные зависимости на интервале 50 с для переменной  $x_1(t)$  системы (7) (сплошная линия) и реконструированной системы с коэффициентами  $c_1, c_2, c_6$ , полученными как средние значения из табл. 8 (точечная линия). На рис. 5, б приведен фазовый портрет реконструированной системы, который практически совпадает с исходным (рис. 1, в), что также подтверждает точность произведенной реконструкции модели.

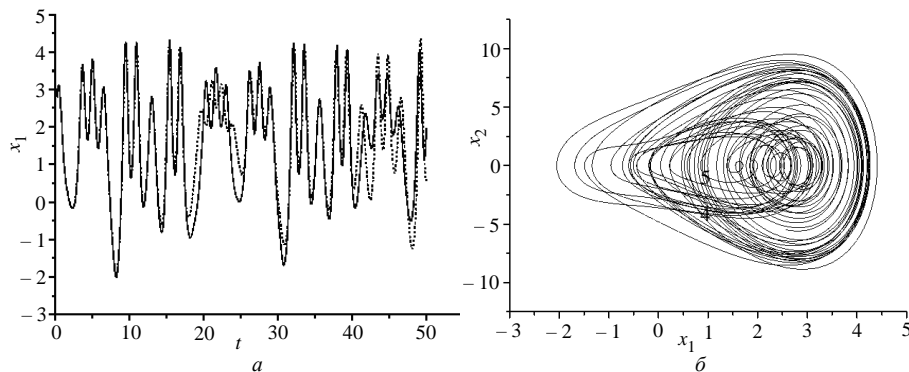




Рис. 5

Кроме этого, была проверена точность оценки величины периода  $T$  при изменении амплитуды внешнего воздействия  $a$ . Численный эксперимент проводился при величинах  $t_{01} = 0,140 \dots 0,780$  с,  $t_{02} = 0,800 \dots 1,400$  с. Результаты вычислений приведены в табл. 9. Относительное отклонение полученной величины периода от заданной определялось по формуле  $\Delta = |T_s - T|/T_s$ , где  $T_s$  — заданное значение периода,  $T_s = 5,645$  п,  $T$  — значение периода, полученное при различных амплитудах  $a$ .

Таблица 8

| Коэффициенты | Значения коэффициентов для $t_{01} = 0,146$ | Значения коэффициентов для $t_{02} = 9,22$ | Погрешность, $\delta$ | Период, $T$ |
|--------------|---|--|-----------------------|-------------|
| $C_0$        | 14,115864                                   | 5,939262                                   | 0,000947              | 5,645 с     |
| $c_1$        | 1,031476                                    | 1,030693                                   |                       |             |
| $c_2$        | -0,108376                                   | -0,108569                                  |                       |             |
| $c_6$        | -0,998054                                   | -0,998550                                  |                       |             |

Таблица 9

| Амплитуда, $c_0$ | Период, $T_s$ | Относительное отклонение периода, $\Delta$ |
|------------------|---------------|--|
| 2                | 5,670         | 0,004429                                   |
| 4                | 5,640         | 0,000886                                   |
| 6                | 5,654         | 0,001594                                   |
| 8                | 5,670         | 0,004429                                   |
| 10               | 5,649         | 0,000709                                   |
| 12               | 5,660         | 0,002657                                   |
| 14               | 5,638         | 0,00124                                    |

### Заключение

Теоретическое обоснование алгоритма в виде приведенных теорем позволило исключить возможный интуитивный подход. Благодаря отсутствию в процедуре операций, требующих значительных затрат машинного времени, несмотря на большой объем обрабатываемых массивов, алгоритм продемонстрировал хорошее быстродействие.

Также проведенный численный эксперимент продемонстрировал работоспособность и приемлемую точность алгоритма, несмотря на двукратное численное дифференцирование при формировании алгебраической системы типа (2) для решения обратной задачи. Если же применение данного алгоритма приведет к неудовлетворительно большим расхождениям реконструированного ряда с наблюдаемым, то можно дополнительно произвести реконструкцию по обычному алгоритму [18], в котором критерием точности вычислений будет не соотношение (8), а отклонение полученного временного ряда от наблюдаемого. В этом случае полученные предварительно с использованием данного алгоритма значения параметров искомой системы будут использованы как исходные для алгоритма [18], что значительно сократит расчетное время и повысит точность вычислений.

*В.Г. Городецкий*

### ІДЕНТИФІКАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З АДИТИВНИМ ЗОВНІШНІМ ВПЛИВОМ

Розглянуто задачу ідентифікації неавтономних нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь. Запропоновано алгоритм реконструкції системи при гармонійному зовнішньому збудженні, оптимальний з точки зору витрат ма-

шинного часу. Розглянуто приклади розв'язання задачі ідентифікації системи для узагальненої системи Дуффінга в режимі детермінованого хаосу.

V.G. Gorodetskyi

## IDENTIFICATION OF NONLINEAR SYSTEMS WITH ADDITIVE EXTERNAL ACTION

The problem of identification of nonautonomous nonlinear systems of ordinary differential equations is considered in the article. An algorithm for reconstructing a system under harmonic external excitation is proposed. This algorithm is optimal from the point of view of computing time. An example of the solution of the system identification problem for the generalized Duffing system in the regime of deterministic chaos is considered.

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. — М. : Наука, 1991. — 432 с.
2. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
3. *Кременецкий И.А., Сальников Н.Н.* Нестохастический подход к определению размерности и параметров линейных авторегрессионных моделей по результатам измерения входных и выходных переменных // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 1. — С. 63–75.
4. *Wills A., Schön T., Ljung L., Ninness B.* Identification of Hammerstein-Wiener models // *Automatica*. — 2013. — **49**, N 1. — P. 70–81.
5. *Stankovski T.* Tackling the inverse problem for nonautonomous systems: application to the life sciences. — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — 134 p.
6. *Kloeden P.E., Potzsche C.* Nonautonomous dynamical systems in the life sciences // *Lecture Notes in Mathematics*. — 2013. — **2102**. — 313 p.
7. *Idels L.V., Khokhlov A.* Nonautonomous food-limited fishery model with adaptive harvesting. — arXiv:1006.5431v1 [math. DS] — 2010. — 11 p.
8. *Maricheva M.* A nonautonomous multi-strain SIS epidemic model // *Journal of Biological Dynamics*. — 2009. — **3**, N 2–3. — P. 235–251.
9. *Fumin Z., Shujing G., Yujiang L., Yan Zhang.* Dynamics of a nonautonomous SIR model with time-varying impulsive release and general nonlinear incidence rate in a polluted environment // *Applied Mathematics*. — 2016. — **7**. — P. 681–693.
10. *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — Москва; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2008. — 208 с.
11. *Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series analysis / R. Hegger, H. Kantz, F. Schmuser, M. Diestelhorst, R.-P. Kapsch, H. Beige // Chaos*. — 1998. — **8**, N 3. — P. 727–754.
12. *Gouesbet G.* Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series // *Phys. Rev.* — 1991. — **A 43**. — P. 5321–5331.
13. *Verdult, V., Verhaegen, M., Scherpen, J.* Identification of nonlinear nonautonomous state space systems from input-output measurements // *Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Technology*. — 2000. — **1**. — P. 410–414.
14. *Sauer T.* Detection of periodic driving in nonautonomous difference equations // *Advanced Studies in Pure Mathematics*. — 2009. — **53**. — P. 301–309.
15. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture Notes in Mathematics*. — Berlin : Springer. — 1981. — **898**. — P. 336–381.
16. *Gorodetskyi V., Osadchuk M.* Analytic reconstruction of some dynamical systems // *Physics Letters A*. — 2013. — N 377. — P. 703–713.
17. *Unbehauen H., Rao G.P.* Identification of continuous-time systems // *Proceedings of IFAC symposium SYSID'97*. — 1997. — **3**. — P. 1023–1049.
18. *Bezruchko B., Smirnov D., Dikanov T., Syssoev I.* Construction of dynamical model equations for nonautonomous systems from time series (peculiarities and special techniques) // *Chaos and its reconstructions*. — Nova Science Publishers. — 2003. — P. 215–243.
19. *Tarantola A.* Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. — Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. — 344 p.
20. *Городецкий В.Г.* Реконструкция некоторых нелинейных неавтономных систем по скалярному временному ряду // *Вестник Запорожского национального университета. Физико-математические науки*. — 2016. — № 2. — С. 34–42.
21. *Ueda Y.* Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation // *J. Stat. Phys.* — 1979. — **20**. — P. 181–196.

22. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. — М. : Наука, 1990. — 272 с.

*Получено 24.05.2017  
После доработки 21.09.2017*