

КОСМИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ

УДК 631.3:528.8:681.518

А.А. Броварец

МЕТОДИКА ТРОЙНОЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕРХТОЧНЫХ КООРДИНАТ МЕСТОНАХОЖДЕНИЯ ОБЪЕКТА

Введение

Космическая навигация становится неотъемлемой составляющей функционирования многих систем человеческой деятельности. Определение местоположения, прокладки курса, вождения агрегатов заданным курсом с минимальным отклонением — далеко неполный перечень применения GPS-навигации. Большое значение имеет точность определения местонахождения GPS-приемника. Координаты приемника не могут быть определены абсолютно точно, но погрешность должна быть минимальной. Она может быть уменьшена, если известны точные координаты определенной наземной станции или, по крайней мере, определены достаточно точно. В настоящей работе рассматриваются разные подходы определения координат базовой станции на основе определенных с погрешностями координат нескольких точек.

Система наземных станций траекторных измерений для навигационно-баллистического обеспечения космических аппаратов имеет ограниченные возможности по зоне действия и точным характеристикам.

В последнее время актуальными стали задачи создания бортовых навигационных систем с использованием спутниковой навигации. Успехи технологий спутниковой навигации позволили, кроме определения координат и скорости носителя навигационного приемника, реализовать такие задачи, как определение угловой ориентации собственной системы координат объекта относительно топосцентричной (локальной) системы координат [1] благодаря использованию вспомогательных устройств и алгоритмов. Но успешное решение перечисленных задач возможно, если навигационный приемник примет сигналы не менее чем от четырех спутников. В то же время при движении космического аппарата по высокоэллиптической орбите эти условия часто не выполняются.

Известен способ корректировки изысканий с помощью спутниковой навигационной системы [2], состоящей из определения координат искомой точки, которая вставляется в опорную сеть известных точек относительно их координат, а координаты искомой точки определяются с помощью спутниковой навигационной системы. На искомой точке сети закладываются пункты, измеряются углы. Координаты известных точек и измеренные углы на искомой точке позволяют определить координаты искомой точки.

Аналог не позволяет исключить искажения сигналов от спутников навигационной системы из-за высоких зданий, линий электропередач, деревьев.

Имеется способ корректировки измерений при детальных распределительных работах на высоких монтажных горизонтах [3], заключающийся в определении

© А.А. БРОВАРЕЦ, 2018

электронным тахеометром мест расположения характерных точек сооружения только по их координатам, которые определяют прокладкой тахеометрического хода, при введении поправок в координаты точек.

Наиболее близкий аналог не дает возможности сокращать затраты при исключении искажений сигналов от спутниковой навигационной системы.

Известный способ определения пространственных координат центра проекции съёмочной камеры заключается в том, что на земной поверхности в районе аэрофотосъёмки устанавливают GPS-приемник, на борту подвижного объекта — съёмочную камеру и бортовой GPS-приемник, соединяют их между собой, принимают сигналы из бортового GPS-приемника и руководят съёмочной камерой [4].

Однако это не всегда обеспечивает точность определения пространственных координат, необходимую для составления карт больших масштабов. Съёмочная камера, которую устанавливают на борту подвижного объекта, например самолета, выполняет съёмку земной поверхности в некоторые промежутки времени с интервалами, связанными с технической необходимостью подготовки камеры к съёмке. Координаты центра проекции съёмочной камеры определяют бортовым GPS-приемником, который устанавливают на борту этого же подвижного объекта.

Существует способ корректировки измерений при детальных распределительных работах на высоких монтажных горизонтах [5], определяющий тахеометрическим ходом координаты искомым характерных точек сооружения, расположенных на промежуточных этажах и крышах, по координатам ближайших известных пунктов.

Аналог не определяет координаты искомым характерных точек сооружения с помощью наблюдений сигналов спутников навигационной системы.

Известен способ определения координат искомым точек при выполнении изысканий с помощью спутниковой системы [6], которая включает рекогносцировку ближайших известных пунктов геодезической сети и объекта съёмки, расположения искомым точек на верхних частях конструкций и внешних частях фасадов домов и на земной поверхности, определение необходимой точности характерных и исходной искомым точек, прием сигналов спутниковой навигационной системы в характерных точках, выполнение измерений.

Наиболее близкий аналог представляет значительную опасность при приеме сигналов спутниковой навигационной системы в характерных искомым точках непосредственно на краю крыши высотного здания.

Для определения координат точек на земной поверхности проводят полевую рекогносцировку местности, помечают на местности точки геодезической сети, определяют оптимальную схему измерений максимальной информативности, формируют оптимально необходимые сессии измерений, устанавливают системы GPS в точках сети, выполняют измерения и определяют положение точек на земной поверхности [7].

Однако на точность определения плановых координат точек на земной поверхности системами GPS влияют разнообразные факторы, в частности инструментальные погрешности GPS-приемников. Результаты высокоточных измерений, выполненных GPS-приемниками, искажаются в результате того, что фазовый центр спутниковой антенны не совпадает с ее осью вращения. Величина рассогласованности может достигать нескольких миллиметров. Поэтому в прецизионных GPS-измерениях субмиллиметровой точности такие величины искажений необходимо учитывать. Данные измерений обрабатываются программными пакетами фирм производителей GPS-аппаратуры с обязательным совмещением исходной и конечной точек.

Известны GPS-способы определения координат статического тела, которые обеспечивают высокую точность определения координат при условии длительных по времени измерений на неподвижной основе [8]. Существуют также GPS-способы, которые позволяют выполнять определение координат в режиме движения с короткими

остановками в необходимых точках [9]. Недостатком предложенных способов является низкая точность и статическое измерение для точного определения координат, которое делает невозможным их использование на подвижных объектах.

Известны навигационные GPS-способы, которые работают в условиях динамики подвижных объектов [9, 10]. Аналогом изобретения, которое заявляется, является способ определения координат точек на земной поверхности. Он заключается в том, что устанавливают устройство для закрепления антенны GPS-приемника с возможностью перемещения ее по заданной траектории с центром на отвесной линии, проходящей через точку, координаты которой устанавливают, определяет ли измерение положение центра антенны [11].

Наиболее близкий аналог предложенного способа, который можно принять за прототип, — способ GPS-определения координат на подвижном объекте [10], основанный на определении координат одновременно группой GPS-приемников. Недостаток предложенного способа — отсутствие четкой методики определения координат группой GPS-приемников с учетом их взаимного размещения.

Анализ последних исследований и публикаций

Координаты точки, в которой находится GPS-приемник, будут определены с погрешностью, как и других точек (рис. 1). Чтобы найти уточненное значение координат определенной точки на основе координат других точек, нужно опираться на известные факты, например, расстояния между GPS-приемниками, углы между линиями, которые их соединяют, и тому подобное. Один из вариантов

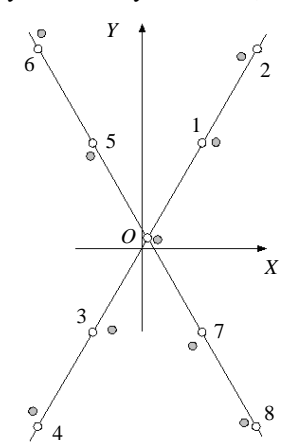


Рис. 1

— размещение приемников на прямых линиях, пересекающихся в точке, координаты которой определяем. После обработки принятых сигналов и получения координат точек размещения приемников построенные точки по полученным координатам не будут лежать на этих линиях, а находиться возле них (возможен вариант, что какая-то точка попадет на прямую). Из массива этих точек нужно провести какую-то усредненную прямую, которая в идеальном случае должна совпадать с известной. На пересечении двух усредненных прямых будет находиться точка с уточненными координатами. Чем больше точек на прямой будут избраны для эксперимента, тем точнее будет определено положение усредненной прямой.

Цель исследований — разработать методику тройной трилатерации определения сверхточных координат местонахождения объекта для повышения точности определения координат объекта, используя стандартный сигнал от спутника и известные координаты. Точность определения заданных координат опорных точек составляет 1–5 м, с использованием метода может достичь 1–5 см, этого достаточно для точного позиционирования объекта.

Изложение основного материала

Для нахождения усредненной прямой по заданным массивам экспериментальных точек используется метод наименьших квадратов. Его суть заключается в том, что оценивается суммарная величина отклонений ординат каждой точки от отыскиваемой прямой и находится такая прямая, для которой эта сумма минимальна.

Пусть прямая задана параметрическими уравнениями:

$$x = u \cos \alpha + x_0; \quad y = u \sin \alpha + y_0, \quad (1)$$

где u — длина отрезка на прямой, отсчет которого начинается из точки с координатами x_0, y_0 , α — угол наклона прямой к оси OY .

Возьмем две прямые, наклоненные к оси X под углом $\pm 60^\circ$ (они будут симметричны относительно оси Y). На этих прямых найдем по две точки на расстоянии 100 и 200 линейных единиц в обе стороны от точки пересечения прямых. Пусть это будут точки $x_0=5, y_0=10$. Подставляя эти данные в уравнение (1), получаем координаты четырех точек на каждой из двух прямых. Одна точка № 0 ($x_0=5, y_0=10$) будет общей (табл. 1).

Таблица 1

Точка	Прямая для $B=600$				Прямая для $B=-600$				Общая точка 0
	1	2	3	4	5	6	7	8	
x	55	105	-45	-95	-45	-95	55	105	5
y	96,6	183,2	-76,6	-163,2	96,6	183,2	-76,6	-163,2	10

На рис. 1 построены прямые с точками, которые им принадлежат. В каждой из этих точек находится GPS-приемник, который показал свое местонахождение с определенной погрешностью (точки неточного местонахождения закрашены в серый цвет). Координаты этих точек, вычисленные после поступления сигнала на GPS-приемник, приведены в табл. 2 (их нумерация так же, а для отличия над цифрой стоит черточка).

Таблица 2

Точка	Номер точки								
	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$
x	67,7	90,9	-27,2	-99,7	-47	-91,8	46,4	93,5	14,5
y	97,5	175,9	-74,3	-148,8	84,6	197	-89,1	-159,4	8,3

Применим метод наименьших квадратов. Он заключается в минимизации суммы

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2, \quad (2)$$

где $y = ax_i + b$ — уравнение прямой, которая проходит через i -ю точку. Нужно найти такую функцию $F = F(a, b)$, чтобы сумма (2) была минимальной. Раскрываем сумму (2):

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (3)$$

Решаем систему (4) относительно a и b :

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (4)$$

где n — число точек.

Найдем уравнения прямые в явном виде: $y = ax + b$. Например, для первой прямой, которая проходит через точки 1–4, возьмем две из них (например, точки 1 и 2) и по очереди подставим их координаты в уравнение прямой: $96,6y = 55a + b$ и $183,2y = 105a + b$. Решаем полученную систему и находим: $a = 1,732, b = 1,34$. Аналогично находим эти коэффициенты для второй кривой. Запишем:

$$\text{первая прямая: } y = 1,732x + 1,34; \text{ вторая прямая: } y = -1,732x + 18,66. \quad (5)$$

Найдем коэффициенты a и b для усредненных прямых по формуле (4), воспользовавшись средой Mathematica. Ниже приведена формула для определения коэффициента a первой прямой:

$$\begin{aligned} n &= 5; x_0 = 14,5; x_1 = 67,7; x_2 = 90,9; x_3 = -27,2; x_4 = -99,7; \\ y_0 &= 8,3; y_1 = 97,5; y_2 = 175,9; y_3 = -74,3; y_4 = -148,8; \end{aligned} \quad (6)$$

$$N \left[\frac{n * (x_0 * y_0 + x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + x_3 * y_3 + x_4 * y_4) - (x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4) * (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{n * (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - (x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2} \right].$$

Результат выполнения — $a = 1,674$. Воспользуемся вторым выражением формулы (4), предварительно присвоив a найденное значение:

$$\begin{aligned} a &= 1,674; n = 5; x_0 = 14,5; x_1 = 67,7; x_2 = 90,9; x_3 = -27,2; x_4 = -99,7; \\ y_0 &= 8,3; y_1 = 97,5; y_2 = 175,9; y_3 = -74,3; y_4 = -148,8; \end{aligned} \quad (7)$$

$$N \left[\frac{(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - a(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{n} \right].$$

В результате вычислений (6) получаем: $b = -3,748$. Аналогично находим коэффициенты для второй усредненной прямой, задав значение координат точек 0, 5–8: $a = -1,895$; $b = 14,192$. Запишем явные уравнения усредненных прямых:

$$\text{первая прямая: } y = 1,674x - 3,748; \text{ вторая прямая: } y = -1,895x + 14,192. \quad (8)$$

Если в формулы (5), (6) ввести значение координат точек, которые лежат на прямой, то получим коэффициенты, как в уравнениях (4). Уравнения (7) значительно отличаются от уравнений (4), однако это еще ничего не означает, поскольку нужно сравнить точку пересечения этих прямых с точкой 0 (5, 10). Для нахождения точки пересечения сравниваем составные части уравнения (7): $1,674x - 3,748 = -1,895x + 14,192$. Отсюда находим: $x = 5,04$. Следовательно, первая координата найдена достаточно точно. Подставив ее в одно из уравнений (7), получим $y = 4,66$, следовательно, вторая координата имеет значительную погрешность. Для наглядности построим усредненные прямые и сравним их точку пересечения с известной точкой. На рис. 2 построен ограниченный фрагмент точек, представленных на рис. 1, а также усредненные прямые, изображенные штриховой линией. Их точка пересечения O_1 больше приближена к точному значению (точки 0) по сравнению с приближением каждой отдельной точки к своему точному расположению, однако погрешность достаточно значительная. Будем искать другие пути уменьшения погрешности. Можно искать не два коэффициента (a и b) для прямых, а только один — b , поскольку точное значение коэффициента a , который определяет наклон прямых, известно: $b = \pm 1,732$. В этом случае усредненные прямые будут пересекаться под тем же углом, что и начальные прямые, а с помощью коэффициента b будет найдена такая высота подъема этих прямых, которая обеспечит минимальную величину суммарного отклонения серых точек (см. рис. 2) от них. В этом случае оптимизация по a не проводится, т.е. первая производная части в (3) не берется, а используется только второе уравнение (5). В выражение (6) подставляем $a = 1,732$ и находим $b = -4,28$. Аналогично находим b для второй прямой

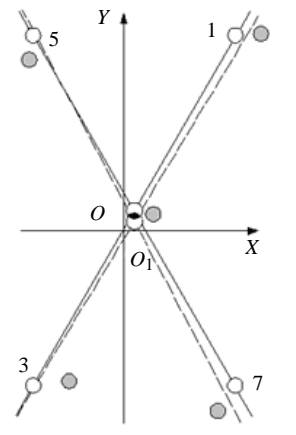


Рис. 2

при $a = -1,732$ и координатах точек 0, 5–8: $b = 13,68$. Пересечение найденных прямых дает точку с координатами (5,18; 19,41). Без построения точки видно, что погрешность увеличилась.

Две четверки точек находятся на одинаковом расстоянии от точки 0 точки 1, 3, 5, 7 на расстоянии 100 линейных единиц и точки 2, 4, 6, 8 — на расстоянии 200 линейных единиц. Известно, что через три точки можно провести окружность. Таким образом, через каждую четверку точек можно провести четыре окружности, т.е. в целом восемь, все центры которых должны быть расположены возле точки 0. Найдем выражения для определения радиуса и центра окружности, заданного тремя точками. Неявное уравнение радиуса R с координатами центра x_0, y_0 окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (9)$$

Подставив в (8) по очереди координаты каждой из трех точек, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными: x_0, y_0 и R . С помощью программного продукта Mathematica получим следующее решение:

$$R = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2][(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2][(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2]}}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)}; \quad (10)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{(x_1^2 + y_1^2)(y_2 - y_3) + (x_2^2 + y_2^2)(y_3 - y_1) + (x_3^2 + y_3^2)(y_1 - y_2)}{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}; \quad (11)$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_3 - x_2) + (x_2^2 + y_2^2)(x_1 - x_3) + (x_3^2 + y_3^2)(x_2 - x_1)}{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}. \quad (12)$$

С помощью формул (10)–(12) найдены радиусы всех восьми окружностей и координаты их центров (табл. 3).

Таблица 3

Точка	Окружности радиуса $R = 100$				Окружности радиуса $R = 200$			
	1, 3, 5	3, 5, 7	1, 3, 7	1, 5, 7	2, 4, 6	4, 6, 8	2, 6, 8	2, 4, 8
R	98,1	104	98,5	101,1	189,1	200,9	202,4	188,6
x_0	19,2	28,7	27,6	19,6	-19,4	6,5	-21,1	5,8
y_0	12,1	13,4	7,6	8,4	22,4	21,8	7,4	7,6

Для наглядности центры всех восьми окружностей в масштабе построены на рис. 3. Степень отклонения от точного значения показана точкой 0 (черный цвет) и точкой 01 (серый цвет) (см. рис. 2). Анализируя расположение точек, можно сделать вывод, что они не могут быть основой для отыскания усредненной точки, которая максимально приближалась бы к точке 0. Все они расположены хаотично на значительном расстоянии от точки 0, кроме одной точки, которая хорошо приближена к ней.

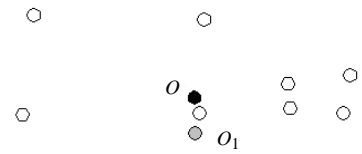


Рис. 3

Применим метод наименьших квадратов к точкам, расположенным возле окружностей заданного радиуса. Эти точки получим, если GPS-приемники разместим на окружности в точках с известными координатами. Координаты этих приемников после обработки сигнала будут указывать на точку, которая с определенной погрешностью будет находиться рядом с приемником, т.е. недалеко от окружности. Для обработки массива таких точек нужно составить целевую функцию, подобную (1). Из (9) находим

$$y = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0. \quad (13)$$

По аналогии с уравнением (1) запишем

$$F(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^n [y_i - (\sqrt{R^2 - (x_i - x_0)^2} + y_0)]^2. \quad (14)$$

Затем нужно брать производные частей по x_0 и y_0 , приравнять их к нулю и решать систему уравнений относительно x_0 и y_0 . Поиск в этом направлении показал, что система не имеет аналитического решения, и даже численными методами современные математические пакеты ее не решают, несмотря на небольшое количество задействованных точек. Можно пойти другим путем: минимизировать не разницу ординат, а разницу расстояний от точек к окружности, отрезки которых будут приблизительно перпендикулярны ему. В таком случае расстояние от центра окружности к точке запишем

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (15)$$

Знак равенства в (15) справедливый для точек, которые принадлежат окружности. Если точки будут за пределами окружности, возникнет определенная разница в расстоянии, и сумму этих разниц нужно минимизировать. Следовательно, можем записать

$$F(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^n (\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - R)^2. \quad (16)$$

Минимизация выражения (16), как и минимизация выражения (15), проблематична. Это объясняется наличием в целевой функции подкорневого выражения. Однако минимизации можно добиться не разницей расстояний, а квадратом этой разницы, причем проводить минимизацию не только по x_0 и y_0 , а и по R . Следовательно, запишем

$$F(x_0, y_0, R) = \sum_{i=1}^n [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2]^2. \quad (17)$$

Приравняв производные к нулю, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными: x_0 и y_0 и R :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2](x_i - x_0) = 0; \\ \sum_{i=1}^n [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2](y_i - y_0) = 0; \\ \sum_{i=1}^n [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2] = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Применим систему (18) к нахождению координат точки O по точкам 1, 3, 5, 7 и 2, 4, 6, 8, которые лежат на окружности. Ниже приведена система в среде Mathematica с заданными координатами точек для меньшей окружности (для удобства они перечислены по порядку) и результат решения. Решение подчеркнуто.

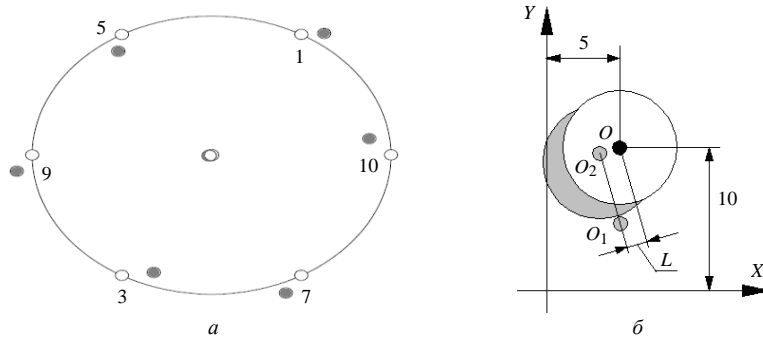


Рис. 4

Следовательно, несмотря на достаточно точное значение радиуса $R=100,1$, координаты точки $O(23,3; 10,0)$, а именно координата x , имеют значительную погрешность. Применение системы (18) для большой окружности тоже дает значительную погрешность.

Очевидно, что точность вычислений должна улучшаться по мере увеличения точек, которые принадлежат окружности. Дополним точки 1, 3, 5, 7 еще двумя: 9 и 10, которые имеют точные координаты на окружности: $9(-90, 10)$, $10(110, 10)$. Пусть GPS-приемники предоставили следующие координаты этих точек: $\bar{9}(-103,5, -1,5)$, $\bar{10}(92,9, 21,8)$. К отмеченным четырем точкам добавим еще две: $\bar{9}$ и $\bar{10}$. Применив систему (18), получим $R=99,4$; $x_0=3,6$; $y_0=9,6$. Если учесть, что радиус известен ($R=100$) и решить систему (18) с двумя последними уравнениями, то результат с одним знаком после запятой будет тот же. Он достаточно точен. Для наглядности на рис. 4, а в масштабе построены точки с точными координатами (светл.) и на основе обработки сигнала GPS-приемников (серые), а также центр окружности (точное и усредненное значение). Радиус всех окружностей, которыми обозначены точки, равен 4 линейным единицам.

Точное и усредненное положения точки O достаточно приближены (окружности, что их изображают, почти совпадают). Из рис. 4, а видно, что найденные координаты усредненной точки центра окружности достаточно хорошо согласуются с его точным расположением. На рис. 4, б в масштабе показано расположение, точное O и приближенное O_2 центров окружностей. Кроме того, показана точка O_1 пересечения усредненных прямых (7). Точки O и O_2 изображены двумя окружностями, большие из них имеют радиус 4 линейных единиц.

In[6]=

```
x1 = 67.7; x2 = -27.2; x3 = -47; x4 = 46.4; y1 = 97.5; y2 = -74.3; y3 = 84.6;
y4 = -89.1;
```

```
NSolve[
```

$$\begin{aligned} & \{ (-r^2 + (-a + x1)^2 + (-b + y1)^2) + (-r^2 + (-a + x2)^2 + (-b + y2)^2) + \\ & (-r^2 + (-a + x3)^2 + (-b + y3)^2) + (-r^2 + (-a + x4)^2 + (-b + y4)^2) + \\ & (-r^2 + (-a + x5)^2 + (-b + y5)^2) + (-r^2 + (-a + x6)^2 + (-b + y6)^2) = 0, \\ & (-b + y1) * (-100^2 + (-a + x1)^2 + (-b + y1)^2) + \\ & (-b + y2) * (-r^2 + (-a + x2)^2 + (-b + y2)^2) + \\ & (-b + y3) * (-r^2 + (-a + x3)^2 + (-b + y3)^2) + \\ & (-b + y4) * (-r^2 + (-a + x4)^2 + (-b + y4)^2) + \\ & (-b + y5) * (-r^2 + (-a + x5)^2 + (-b + y5)^2) + \\ & (-b + y6) * (-r^2 + (-a + x6)^2 + (-b + y6)^2) = 0, \\ & (-a + x1) * (-r^2 + (-a + x1)^2 + (-b + y1)^2) + \\ & (-a + x2) * (-r^2 + (-a + x2)^2 + (-b + y2)^2) + \\ & (-a + x3) * (-r^2 + (-a + x3)^2 + (-b + y3)^2) + \\ & (-a + x4) * (-r^2 + (-a + x4)^2 + (-b + y4)^2) + \\ & (-a + x5) * (-r^2 + (-a + x5)^2 + (-b + y5)^2) + \\ & (-a + x6) * (-r^2 + (-a + x6)^2 + (-b + y6)^2) = 0 \}, \{r, a, b\} \end{aligned}$$

```
Out[6]= {{r -> -46.533 + 255.956 i, a -> 23.4792 - 4.00999 i, b -> 19.4377 - 272.206 i},
{r -> -46.533 - 255.956 i, a -> 23.4792 + 4.00999 i, b -> 19.4377 + 272.206 i},
{r -> -100.139, a -> 23.3403, b -> 10.0087},
{r -> 100.139, a -> 23.3403, b -> 10.0087},
{r -> 46.533 + 255.956 i, a -> 23.4792 + 4.00999 i, b -> 19.4377 + 272.206 i},
{r -> 46.533 - 255.956 i, a -> 23.4792 - 4.00999 i, b -> 19.4377 - 272.206 i}}
```


Для оценки точности найденного решения можно сравнить степень отклонения разницы L между точным и приближенным расположением центров (рис. 4, б) и средним отклонением L_{av} между точным и приближенным расположением каждой из шести ($n = 6$ в данном случае) точек. Абсолютное значение среднего отклонения найдем по формуле

$$L_{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\bar{x}_i - x_i)^2 + (\bar{y}_i - y_i)^2}. \quad (19)$$

Подставив в (18) значение координат шести точек, полученных из GPS-приемника, и координаты соответствующих точек точного расположения их на окружностях, находим абсолютное значение средней погрешности: $L_{av} = 16,1$ линейными единицами. По формуле (18) при $n = 6$ находим абсолютное значение L (см. рис. 4, б): $L = \sqrt{(3,6 - 5)^2 + (9,6 - 10)^2} = 1,5$. Таким образом, погрешность нахождения точного расположения центра окружностей составляет $1,5 * 100 / 16,1 = 9,3\%$ в сравнении со средней погрешностью нахождения координат отдельных точек. Значит, для нашего конкретного случая точность измерения увеличилась приблизительно в десять раз по сравнению с отдельными точками.

Заключение

Для определения уточненных значений координат определенной точки по данным приближенных значений GPS-съемки нескольких точек нужно отталкиваться от известного расположения: на прямых линиях, на окружностях и тому подобное. Для этого целесообразно применять метод наименьших квадратов. При расположении GPS-приемников на прямых линиях усреднена точка пересечения найденных усредненных прямых, она имеет аналитическое выражение для нахождения координат, которое ускоряет их определение. При расположении GPS-приемников на окружностях координаты усредненной точки (центра окружности) нужно искать с помощью численных методов, однако при этом увеличивается точность определения координат. Она также увеличивается по мере увеличения числа точек — мест расположения GPS-приемников.

О.О. Броварець

МЕТОДИКА ПОТРІЙНОЇ ТРИЛАТЕРАЦІЇ ВИЗНАЧЕННЯ НАДТОЧНИХ КООРДИНАТ МІСЦЕЗНАХОДЖЕННЯ ОБ'ЄКТА

Методика потрійної трилатерації визначення надточних координат місцезнаходження об'єкта належить до галузі фізики, геодезичних і навігаційних вимірювань і застосовується в авіації, космонавтиці, машинобудуванні, будівництві та в інших галузях техніки, системах пошуку об'єктів, транспортних засобів, навігації і контролю автоперевезень. Дана методика також використовується для визначення прямокутних координат способом і пристроєм для визначення кутових координат цілі, координат точок на поверхні землі, площинних прямокутних координат контурних точок місцевості, географічних координат об'єктів, транспортних засобів відносно базових станцій, геодезичного забезпечення розвідки у містах, розвідках на майданчиках промислового і житлового будівництва підземних комунікацій, землеустрої меліорації земель, при побудові систем цілепоказання.

METHOD OF TRIPLE THREEELATERATION OF DETERMINATION OF SUPERPRECISION COORDINATES OF OBJECT LOCATION

The method of triple whole pointing determination of superprecision coordinates of location of object refers to the field of physics, geodesic and navigation measurings and can be applied in aviation, cosmonautics, engineering, building and other industries of technique, systems of search of objects, transport vehicles, navigation and control of autotransportations, for determination of rectangular coordinates, method is built with the aim of determination of angular coordinates, coordinates of points on an earth surface, flat rectangular coordinates of contour points of locality, geographical coordinates of objects, transport vehicles in relation to the base stations, geodesic providing in cities, settlements, at different pretentious novelties, on construction of industrial and housing buildings, at building of underground communications, in surveying works, at organization of the use of land, land cadastre, at constructions of the systems of target indication.

1. *Инструкция по фотограмметрическим работам при создании топографических карт и планов.* — М. : Недра, 1974.
2. *Геодезия. Часть первая / С.Г. Могильный, Ю.М. Гавриленко, Л.И. Ахонина, Ю.Ф. Кренида.* — Донецк, 2009. — 514 с.
3. *Патент РФ №2269095, МПК 7, G01C07/02, E04B1/18.* Хакимуллин Н.М. и др. 19.03.2004.
4. *Дорожинський О.Л. Основи фотограмметрії.* — Львів : Львівська політехніка, 2003. — С. 47–49.
5. *Патент РФ № 2269095, МПК G01C 07/02, E04B 1/18 от 19.03.2004.*
6. *Патент Украины. Изобретения № 98396, МПК G01C 21/00, от 10.05.2012.*
7. *Способ определения положения точек на земной поверхности. Декларационный патент на изобретение 42431. Украина, МПК G01C5/00/ К.Х. Третьяк.* — № 2001021169; Заявл. 19.02.2001; Оpubл. 15.10.2001. № 9. — 5 с.
8. *Гофманн-Велленгоф Б., Лихтенеггер Г., Коллинз Д. Глобальная система определения местоположения (GPS). Теория и практика / под ред. Я.С. Яцкива.* — Киев : Наук. думка, 1995. — 380 с.
9. *Место ГИС-технологий в системах управления взаимодействием в подразделениях сухопутных войск тактического звена / В.М. Жигулин, В.М. Королев, П.И. Волчко, В.Д. Макаревич, В.Т. Липский // Инженерная геодезия.* — 2003. — № 49. — С. 95–101.
10. *Королев В.М. К вопросу комплексования автономной системы навигации со спутниковой радионавигационной системой в интересах навигации наземного подвижного объекта // Вестник геодезии и картографии.* — 2005. — № 1. — С. 8–13.
11. *Патент RU N2116656 G01S7/36, H01G3/02, Оpubл. 27.07.1998. Способ проведения геодезических измерений с использованием глобальных спутниковых радионавигационных систем и устройство для его осуществления.*

Получено 13.10.2017
После доработки 16.01.2018