

УДК 528.88:519.2:530.1

М.В. Артюшенко

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕГЛАДКИХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ДАННЫМ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Введение. Одной из задач мониторинга земной, водной поверхности и атмосферы методами аэрокосмического дистанционного зондирования (ДЗ) является контроль и анализ развития различных природных и техногенных процессов, которые происходят на региональном и глобальном уровнях. В результате ДЗ создаются и анализируются на цифровых аэро- или космических снимках в разных спектральных диапазонах образы естественных и искусственных (активная локация) физических полей: спектральных яркостей, радиолокационных, лидарных измерений и др. В частности, в инфракрасной и микроволновой области спектра формируется поле радиационной температуры, структура температурного поля ландшафта с залежью торфа подробно анализируется далее на примере. Пространственные распределения каких-либо физических величин на геометрических носителях удобно формулировать в терминах поля. Ограничением является лишь то, чтобы эти поля были наблюдаемы дистанционными методами. Построение математических моделей на основе геофизической информации основано на подробном анализе структуры пространственно-распределенных данных.

Физическое поле называется негладким, если функция поля недифференцируема. В процессе компьютерной обработки данных, представленных космическими снимками, выявляется зависимость наблюдаемой структуры поля от пространственного разрешения. С увеличением пространственного разрешения изменчивость геофизических полей возрастает; ограничения на гладкость и дифференцируемость функции поля, на которых построена прикладная теория поля, становятся мало обоснованными. Зависимости характеристик геосистем от масштаба измерений объективно отображают неоднородность и неізотропность среды зондирования. Такие особенности характерны для ландшафтов, наблюдаемых на космических панхроматических снимках с высоким пространственным разрешением, а также фиксируются в структурах температурных полей на изображениях городов, площадях с залежами торфа и территориях с гетерогенным ландшафтом. Причина возникновения негладких полей состоит в том, что при повышении пространственного разрешения, в частности, инфракрасной съемки наблюдаются хаотически расположенные объекты, которые имеют различные характеристики тепловых излучений. Для городов это — различие в материалах покрытия зданий, в применении энергосберегающих материалов, характеристиках дорожных покрытий, парковой и приусадебной растительности. Применительно к площадям, которые имеют гетерогенную ландшафтную структуру с залежами торфа, формирование негладких температурных полей поверхности происходит не только под действием солнечной радиации, но и во многом определяется внутренними экзотермическими процессами в залежах. Экзотермические химические и биохимические процессы в залежах торфа сопровождаются переносом теплоты в

© М.В. АРТЮШЕНКО, 2018

верхние слои почвы, что приводит к локальным всплескам аномальных температур, которые обнаруживаются по инфракрасным каналам сенсоров, установленных на космических аппаратах. Проследить за экзотермическими процессами в залежах торфа, которые периодически сопровождаются торфяными пожарами, можно по распределению температуры на космических снимках. Перечисленные факторы приводят к тому, что с увеличением масштаба рассмотрения наблюдается нерегулярное поведение (скачки) функции поля на множестве элементарных площадок (пикселах изображения), принимаемых за точки поля. Следовательно, такое поле имеет множество особых точек, в которых функция поля недифференцируема.

Недифференцируемые функции и их графики не являются гладкими. Если их дробные размерности по Хаусдорфу выше топологических, то объекты, которыми описываются такие функции, фрактальны. При описании негладких объектов вместо производной используется показатель сингулярности Гельдера α (дробная производная), а вместо топологической размерности — размерность Хаусдорфа, которая обычно принимается за фрактальную. Для описания сингулярных структур со скейлинговыми (масштабно-инвариантными) свойствами учеными развита теория мультифрактальных мер, которая в сжатом виде изложена в монографии [1]. Фрактальные и мультифрактальные статистические методы, основанные на сингулярных мерах, с успехом применяются в разных областях науки для описания свойств самоподобия и сложного скейлинга; используются в физике и экономике [1, 2], информатике, области обработки сигналов и изображений [3, 4], социологии [5], экологии [6] и геологии [7–9]. В настоящее время число публикаций, посвященных нетрадиционным статистическим методам обработки и интерпретации информации, неуклонно возрастает. Очевидно, что полное описание процессов современной обработки сигналов и полей невозможно с помощью формул классической математики, полученных на основе представления сигналов в пространстве целочисленной меры и гладких функций [3]. Наличие в уравнениях дробной производной интерпретируется как отображение особых свойств неэргодичности и долговременной памяти в динамических системах, а также как возможное описание немарковских процессов с памятью.

В статье демонстрируется применение теории статистических фракталов и мультифрактальных мер в задачах интерпретации космической информации. Для анализа структуры поля, представленного цифровым изображением, устанавливаются скейлинговые свойства структуры — инварианты масштабных преобразований, и применяется мультифрактальный формализм [1], который позволяет представить поле как множество взаимосвязанных областей, каждая из которых характеризуется своим показателем Гельдера α и имеет свою фрактальную размерность $f(\alpha)$. Функция $f(\alpha)$ — функция мультифрактального спектра, задает спектр сингулярностей (особенностей) мультифрактала (мультифрактальной структуры поля). Множество значений этой функции описывают спектр фрактальных размерностей поля. Функция $f(\alpha)$ является характеристикой структуры поля. Нахождение функции мультифрактального спектра выполняется по экспериментальным данным посредством вычисления обобщенных фрактальных размерностей (размерностей Реньи) и масштабных инвариантов с одновременной проверкой необходимых условий существования мультифрактальной структуры поля. Далее применяется преобразование Лежандра, которое позволяет перейти от размерностей Реньи к хаусдорфовым размерностям $f(\alpha)$. Спектр размерностей Реньи, так же как и мультифрактальный спектр, характеризует структуру поля.

По вариабельности спектра размерностей Реньи количественно определяется информационная дивергенция стационарного поля относительно однородного пространственного распределения физической величины. Контроль развития процессов в нестационарных полях предполагает обработку данных нескольких снимков одной и той же территории в разное время, что позволяет представить поле в виде серии цифровых изображений. Для каждого изображения определяет-

ся спектр размерностей Реньи и вводятся инвариантные относительно масштабных преобразований информационные меры различия структуры поля; эти меры используются как индикаторные признаки для определения тренда развития процесса в нестационарных полях. Применяемый подход к интерпретации космической информации иллюстрируется численным примером статистического анализа цифровых изображений, полученных в результате обработки снимков из космоса, — температурного поля земной поверхности при развитии торфяного пожара.

1. Анализ негладких геофизических полей по наблюдениям с космических аппаратов. Нестационарное скалярное поле определяется скалярной функцией $U = f(P, t)$, $P \in V$, где P — точка, V — область некоторого пространства, поле зависит от времени t . Рассматривается неоднородное поле, численные значения которого в разных точках области V могут быть различными. Если U — поле температуры, то неоднородность поля обеспечивает теплообмен между его точками. Особенностью дальнейшего рассмотрения является то, что функция поля $f(x, y, z, c)$ в каждый фиксированный момент времени $t = c$ может быть негладкой и, соответственно, недифференцируемой. Такой подход к анализу поля, в том числе по космическим снимкам, в большей мере соответствует наблюдаемым природным структурам.

При геомониторинге из космоса в каждый дискретный момент времени область земной поверхности V , после соответствующей обработки данных, отображается в кадре \tilde{V} цифрового изображения, образом которого является стационарное поле $U = f(x, y)$. Цифровое изображение поля размером $m \times n$, построенное на растре пикселей, задается матрицей \mathbf{K} . Значения матрицы $K(i, j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, равны квантованным яркостям пикселей в «точках» $(i, j) \in \tilde{V}$ и соответствуют значениям поля с площадей, равных проекциям пикселей на область V . Цифровая функция $K(i, j)$ — это и есть цифровое изображение рассматриваемого далее двумерного скалярного геофизического поля.

Рассмотрим распределение значений U двумерного поля области V и характеристики этого распределения, которые определяются по распределению яркостей в кадре \tilde{V} цифрового изображения. Пример представления нестационарного поля температуры земной поверхности цифровыми изображениями рассмотрен в разд. 4 и приведен на рис. 1, а–в. Если термин «распределение» понимается в вероятностном смысле как соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, то для описания свойств распределения употребляются числовые характеристики, такие как моменты распределения случайной величины. Начальный момент α_q порядка q случайной дискретной величины X с n значениями x_i и вероятностями этих значений v_i определяется согласно выражению

$$\alpha_q = \sum_{i=1}^n x_i^q v_i, \quad (1)$$

где q принадлежит множеству натуральных чисел.

Для дальнейшего рассмотрения понятие моментов обобщается на множество вещественных чисел: $q \in R$. Пусть некоторая физическая величина распределена по объекту земной поверхности и представлена цифровым изображением поля объекта, занимающего часть квадратного кадра. Разобьем кадр \tilde{V} со стороны размером m на $\tilde{N}(r)$ равных квадратных клеток со стороной клетки $r = r_i$, выра-

женной в относительных единицах (долях) размера кадра. Этим разбиением площади клеток r_i^d также нормированы на единицу: $\sum_{i=1}^{N(r)} r_i^d = \tilde{N}(r) r^d = 1$, где i —

номера клеток; d — размерность. Пусть поле объекта представлено на изображении в градациях яркости. Для характеристики распределения яркости по изображению поля объекта, значения яркости во всех клетках нормируются на единицу:

$$\sum_{i=1}^{N(r)} k_i(r) = K, \quad p_i(r) = \frac{k_i(r)}{K}, \quad p_i(r) > 0, \quad \sum_{i=1}^{N(r)} p_i(r) = 1, \quad (2)$$

где $p_i(r)$ — нормированные значения яркости в i -й клетке изображения; $k_i(r)$ — квантованные значения яркости клетки с номером i ; K — общая яркость квантованных значений изображения поля, которая не зависит от размера клеток разбиения кадра; $N(r)$ — суммарное количество занятых изображением поля клеток, которое зависит от размера r .

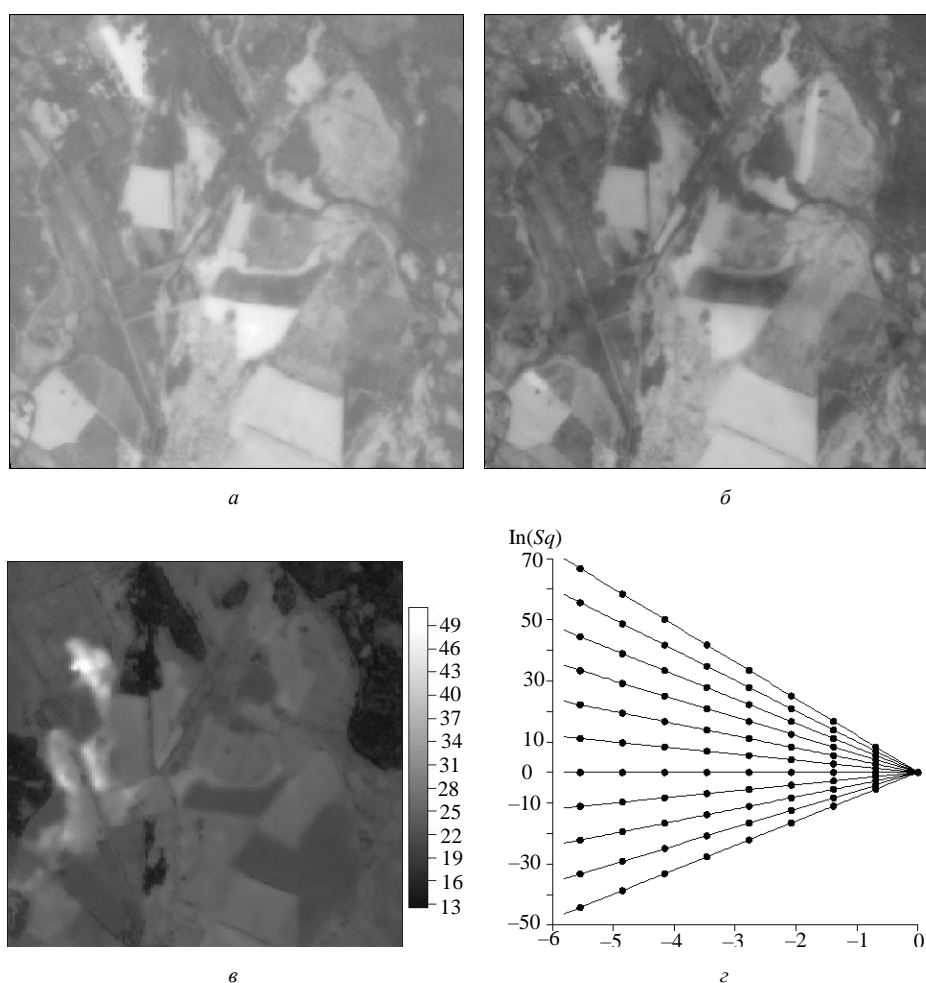


Рис. 1

Задав размер клетки, равный квадратному пикселу, можно получить характеристику распределения яркости. Полный набор $\{p_i(r)\}_{i=1}^{N(r)}$ при минимальном значении r дает описание распределения яркости изображения поля. Однако количество клеток, равное $N(r)$, избыточно большое и зависит от размера клетки.

Такая характеристика не позволит сравнивать поля по их распределениям — необходимо получить масштабно-инвариантную характеристику, а также меры распределения яркости. Введение таких мер должно позволить не только сравнивать стационарные поля, но и характеризовать динамику процессов в среде нестационарного поля.

2. Мультифрактальные структуры полей. Две нормированные на единицу величины — площадь клетки покрытия r^d и относительные яркости в клетках $p_i(r)$, каждая из которых может рассматриваться как вероятность, позволяют по аналогии с формулой моментов (1) ввести мультифрактальную d -меру [1], которая обозначается как $M_d(q, r)$:

$$M_d(q, r) = \sum_{i=1}^{N(r)} p_i^q(r) r^d = S(q, r) r^d \xrightarrow{r \rightarrow 0} \begin{cases} d \rightarrow \tau(q) \\ c(q) \end{cases}, \quad (3)$$

$$S(q, r) = \sum_{i=1}^{N(r)} p_i^q(r), \quad (4)$$

где $S(q, r)$ — статистическая сумма, q — порядок обобщенного момента $-\infty < q < \infty$, $q \in R$. Моменты построены только на вероятностях, а порядок моментов обобщается на отрицательные значения. Когда размер клетки $r \rightarrow 0$, размерность d стремится к значению степенного показателя $\tau(q)$, который зависит от порядка выбранного момента q , при котором мера сходится к неотрицательным значениям $c(q)$. Значения вероятностей $p_i(r)$ являются весовыми коэффициентами каждой i -й клетки и учитывают несоответствие вероятностей геометрическим размерам клеток.

Из соотношений (3) определяется, что для малых значений $r \ll 1$, для каждого фиксированного q мера постоянна и имеют место приближенные равенства

$$M_d(q, r) \approx S(q, r) r^{\tau(q)} \approx c(q).$$

Приближенно из равенств следует степенная зависимость статистической суммы от размера клетки или линейная зависимость этих величин в билогарифмических координатах

$$S(q, r) = c(q) r^{-\tau(q)}, \quad \ln S(q, r) = \ln c(q) - \tau(q) \ln r, \quad -\infty < q < \infty. \quad (5)$$

Если существует предел $\tau(q)$ при $r \rightarrow 0$, $\ln r \rightarrow -\infty$

$$\tau(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{-\ln S(q, r)}{\ln r} + \frac{\ln c(q)}{\ln r} \right] = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln S(q, r)}{\ln r}, \quad S(q, r) \approx r^{-\tau(q)}, \quad (6)$$

то степенной показатель $\tau(q)$ численно определяется из выражений (5). Из предельного соотношения (6) следует, что асимптотически статистическая сумма для каждого фиксированного значения q при малых значениях размера клетки r характеризуется степенной зависимостью. В этом случае распределение яркости изображения геофизического поля в кадре определяется спектром (множеством) D_q размерностей Реньи

$$D_q = \tau(q)/(1-q) \quad (7)$$

и геофизическое поле объекта имеет статистическую мультифрактальную структуру. Геометрически функция $\tau(q)$ определяется как коэффициенты наклона билогарифмических прямых, заданных уравнением (5). Пример приведен в разд. 4 и ил-

люстрируется рис. 1, з. Уравнение (5) и соотношение (7) используются для вычисления значений $\tau(q)$ и D_q по экспериментальным данным. Наличие мультифрактальной структуры предусматривает выполнение следующих условий.

Условие 1. Для каждого значения показателя степени q существует степенная зависимость (5) статистической суммы $S(q, r)$ от размера клетки r или линейная билогарифмическая зависимость этих величин.

Условие 2. Размерности Реньи D_q , определяемые соотношением (7), — невозрастающая функция (числовая последовательность), значения которой монотонно убывают или остаются постоянными с увеличением показателя степени q , $D_q \geq D_{q'}$, $q' > q$ (см. рис. 2, а). Для неоднородного распределения $D_q > D_{q'}$. Знак равенства $D_q = D_{q'}$ имеет место только при однородном распределении; максимального значения функция достигает при $q \rightarrow -\infty$, $\lim_{q \rightarrow -\infty} (D_q) = \max(D_q) = D_{-\infty}$, а минимального значения — при $q \rightarrow \infty$, $\min(D_q) = D_{\infty}$.

Свойства статистической суммы и размерностей D_q . Рассмотрим следующие важные свойства статистической суммы $S(q, r)$ и размерностей D_q :

а) выбор больших значений $q \gg 1$, $q \rightarrow +\infty$, способствует повышению вклада в $S(q, r)$ клеток с относительно большими значениями p_i , что приводит к уменьшению значений D_q , поскольку при $q \gg 1$ и $p_i > p_j$ неравенство усиливается $p_i^q \gg p_j^q$, и правая ветвь спектра размерностей Реньи значительно отклоняется от линии однородного распределения в сторону малых значений размерностей (см. рис. 2, а);

б) при выборе малых значений $q \ll 1$, $q \rightarrow -\infty$, доминирующий вклад в статистическую сумму $S(q, r)$ оказывают ячейки с относительно малыми значениями p_i , что приводит к увеличению значений D_q и способствует значительному отклонению левой ветви спектра Реньи от линии однородного распределения в сторону больших значений размерностей.

Следовательно, функция D_q может служить индикатором того, насколько неравномерно заполнены клетки. Это свойство используется для детального анализа изменений в структуре нестационарного поля с помощью меры R_q , которая вводится в рассмотрение в разд. 3, а в разд. 4 используется как индикаторный признак для определения возникновения торфяного пожара по распределению температуры.

Поле рассматривается на геометрическом носителе (support), который является объектом земной поверхности, и имеет свою фрактальную размерность $D_{\text{support}} = D_{q=0}$, равную размерности Хаусдорфа D . Такими объектами могут быть, например, береговые линии моря и устья рек [9]. Размерность D_0 вычисляется по подсчету числа клеток $N(r)$ при $q = 0$ (см. (4)). Вычисленная этим методом клеточная размерность (box dimension) принимается за размерность Хаусдорфа. Для малых значений r выполняются приближенные равенства

$$D_0 \approx D, N(r) \approx r^{-D}. \quad (8)$$

При однородном распределении величины по объекту, структура поля определяется только размерностью носителя и все размерности Реньи D_q равны D . В этом случае во всех клетках изображения содержатся равные значения яркос-

тей k_i и, соответственно, все p_i равны. Единица вероятности равномерно распределена по всем клеткам $p_i = 1/N(r)$, и статистическая сумма (4) имеет вид

$$S(q, r) = N^{1-q}(r). \quad (9)$$

Подставляя $N(r)$ из выражения (8) в (9) и сравнивая его с выражением (6): $S(q, r) = r^{-D(1-q)} = r^{-\tau(q)}$, определяем $\tau(q) = D(1-q)$ и, подставляя этот результат в соотношение (7), находим $D_q = D(1-q)/(1-q) = D$. Значения размерностей $D_q = D$ не зависят от порядка момента и равны фрактальной размерности носителя D_0 ; график функции размерностей Реньи $D_q = D_{\text{support}}$ вырождается в прямую линию, параллельную оси q (см. рис. 2, а). Этим объясняется введение в формулу размерностей (7) множителя $(1-q)$. Рассмотренное свойство спектра размерностей Реньи позволяет ввести меру для оценки степени неоднородности стационарного поля мультифрактальной структуры (см. разд. 3), получившую название «вариабельность спектра размерностей Реньи».

Связь мультифрактального анализа с методами статистической термодинамики неравновесных систем [10] устанавливается посредством формулы энтропии Реньи $H_q^{(R)}$:

$$H_q^{(R)} = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^N p_i^q, \quad q > 0, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad (10)$$

которая обобщается на отрицательные значения степени q : $-\infty < q < \infty$, где N — количество фрагментов, на которые разбито анализируемое пространство. Размерности Реньи (7) выражаются через обобщенную энтропию Реньи

$$D_q = - \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{H_q^{(R)}}{\ln r} \right]. \quad (11)$$

При $q = 1$, в силу условия нормировки вероятностей p_i , значение логарифма статистической суммы в формуле (10) энтропии Реньи равно нулю. В этом случае в выражении возникает неопределенность, раскрытие которой, при условии $q \rightarrow 1$, приводит к формуле информационной энтропии Гиббса–Шеннона [10] с точностью до постоянного множителя

$$H^{(sh)} = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (12)$$

При однородном распределении яркостей изображения по клеткам информационная энтропия (12) принимает максимально возможное значение.

Размерности D_q , в терминах которых проводится статистический анализ поля по изображениям, (за исключением размерности Реньи D_0) не являются хаусдорфовыми. В силу этого для них используется термин «размерности Реньи» или «обобщенные фрактальные размерности». Для того чтобы привести размерности Реньи к фрактальным размерностям мультифрактала, сопоставимым с размерностями Хаусдорфа, и вычислить мультифрактальный спектр, используется функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$. Значения этой функции равны фрактальным (хаусдорфовым) размерностям отдельных фрагментов мультифрактала. Функция

мультифрактального спектра $f(\alpha)$ определяется с помощью преобразования Лежандра по найденным из соотношения (5) значениям $\tau(q)$. Пара уравнений задает это преобразование от величин τ и q к величинам f и α :

$$\alpha(q) = -\frac{d}{dq} \tau(q), \quad f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q), \quad (13)$$

где значения $f(\alpha)$ — хаусдорфовы размерности фракталов для фрагментов геофизического поля с показателями Гельдера α . Функция мультифрактального спектра позволяет выполнить описание негладких полей в терминах дробных размерностей Хаусдорфа и дробных производных, определяемых как показатель сингулярностей Гельдера α . Примеры мультифрактальных спектров нестационарного температурного поля, представленные графиками функции $f(\alpha)$, приведены в разд. 4 (рис. 2, б). Левая ветвь мультифрактального спектра $f(\alpha)$ на графике соответствует правой ветви одноименного графика спектра размерностей Реньи D_q (рис. 2, а, б).

Для функции мультифрактального спектра выполняется неравенство $f(\alpha) \leq \alpha$. Знак равенства имеет место только при однородном распределении. В данном случае мультифрактальный спектр стягивается в точку $f(\alpha) = \alpha = D_{\text{support}}$, где D_{support} определяется как фрактальная размерность носителя. На примере температурного поля это иллюстрируется графиком на рис. 2, б, где $D_{\text{support}} = 2$ соответствует топологической размерности рассматриваемой земной поверхности.

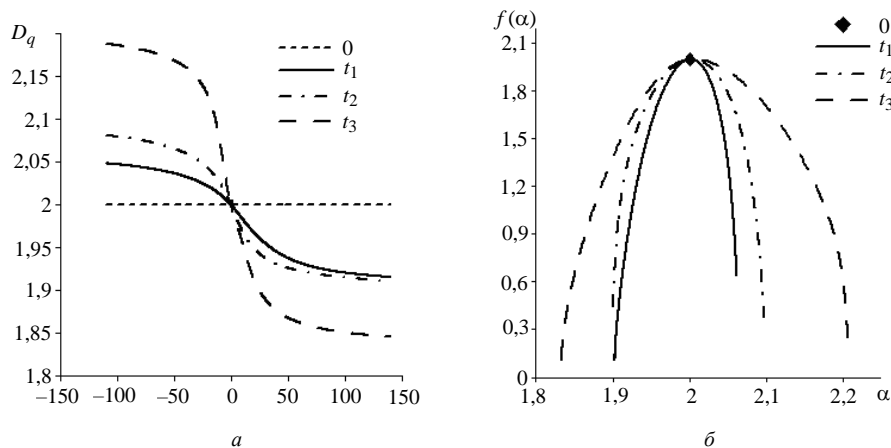


Рис. 2

3. Информационные дивергенции геофизических полей мультифрактальной структуры. Для определения изменений, которые происходят во времени и под действием внешних факторов в пространственно-распределенной структуре нестационарного поля, могут быть использованы различные информационные меры расхождения (дивергенции), основанные на вычислениях характеристик информационной энтропии Гиббса–Шеннона (12) или Реньи (10). Наиболее известны информационные меры расхождения Кульбака [11] и Реньи (альфа-дивергенция с параметром α) [12, 13].

Для двух распределений вероятностей $P = \{p_i\}$, $G = \{g_i\}$, $i = \overline{1, N}$, представленных двумя изображениями поля, определены и вычисляются асимметричная мера расхождения Кульбака μ_1 и симметричная μ_2 мера:

$$\mu_1(P\|G) = \sum_{i=1}^N \left[p_i \ln \frac{p_i}{g_i} \right], \quad \mu_1(P\|G) \neq \mu_1(G\|P); \quad \mu_2(P\|G) = \sum_{i=1}^N \left[(p_i - g_i) \ln \frac{p_i}{g_i} \right], \quad (14)$$

где $\{p_i\}, \{g_i\}$ — вероятности, которые определяются согласно выражениям (2). Часто недостаточно скалярных критериев расхождений Кульбака μ_1 или μ_2 для сравнения полей по их изображениям, и для детальной характеристики различий можно использовать векторный критерий дивергенции Реньи μ_q с параметром, который обозначим как q :

$$\mu_q(P\|G) = \frac{1}{q-1} \ln \left(\sum_{i=1}^N p_i^q g_i^{1-q} \right), \quad q > 0, \quad q \neq 1. \quad (15)$$

При значении $q = 1$ формула дивергенции Реньи (15), в силу рассмотренного выше свойства энтропии Реньи (10) определять энтропию Гиббса–Шеннона (12), задает асимметричную информационную меру расхождения Кульбака μ_1 . Примеры оценки расхождений температурного поля, заданного тремя изображениями (см. рис. 1, *а–в*), по информационной мере Реньи μ_q приведены на рис. 3, *а*. Расчет выполнен для относительного размера клеток покрытия $r = 1/16$ размера квадратного кадра изображения. Рассмотренные графики демонстрируют монотонную зависимость векторной меры расхождений от параметра q . Для малых различий в распределениях $\mu_q(P_1\|G)$ скорость роста меры расхождения μ_q низкая и становится большой при значительных информационных расхождениях между двумя изображениями $\mu_q(P_2\|G)$.

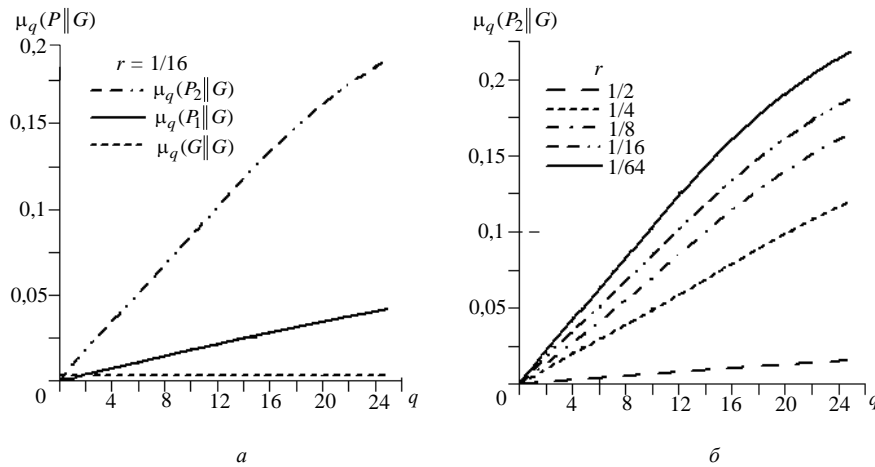


Рис. 3

Общим недостатком рассмотренных информационных мер расхождения Кульбака и Реньи μ_1, μ_2, μ_q является их зависимость от масштаба детализации, который определяется размером клеток покрытия r . Графики, приведенные на рис. 3, *б*, иллюстрируют зависимость меры μ_q от размера r , выраженного в относительных единицах, при определении информационного расхождения Реньи между изображениями температурного поля на рис. 1, *а, в*. Это — нежелательное свойство информационных мер при анализе геофизических полей. Следовательно, целесообразно ввести меры, которые основаны на масштабных инвариантах полей, далее — инвариантные информационные меры. Введение таких информаци-

онных мер необходимо для полей с фрактальной или мультифрактальной статистической структурой, для которых такие инварианты всегда существуют. Инвариантные информационные меры основаны на общем свойстве степенных распределений — сохранять значения некоторых величин при изменении масштаба, т.е. иметь инварианты. Для обоснования введения инвариантных информационных мер и количественного определения информационных расхождений докажем следствие условия 1 и определим алгоритмы вычисления мер.

Следствие условия 1. Функции $\tau(q)$ и D_q являются масштабно-инвариантными функциями структуры поля и не зависят от размера клеток r .

Инвариантность функций — следствие существования степенной зависимости статистической суммы от размера квадратных клеток покрытия изображения поля. Для произвольно выбранного значения q , из соотношения (5) определяется $S(r) = cr^{-\tau}$. Изменим размер клеток r в k раз, для этого умножим размер на масштабный коэффициент $k > 0: kr$, тогда значения статистической суммы изменятся в $k^{-\tau}S(r)$ раз. Степенной вид функциональной зависимости сохранится, а искомое значение степенного показателя τ не изменится: $k^{-\tau}S(r) = c(kr)^{-\tau}$. Обозначив $k^{-\tau}S(r) = S(r_i) = S_i$ и вычислив по экспериментальным данным значения $\ln(S_i), \ln(r_i)$, получим переопределенную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных $\ln(c), \tau$:

$$\ln(S_i) = \ln(c) - \ln(r_i)\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad n > 2, \quad (16)$$

где n — количество пробных размеров r клеток покрытия.

Решение системы (16) находится методом наименьших квадратов или вычислением коэффициентов линейной регрессии. Величина τ определяет коэффициент наклона билогарифмической прямой регрессии (см. рис. 1, ε), а $\ln(c)$ далее в вычислениях не используется. Выполнив аналогичные расчеты для всех значений $\tau(q), q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$, с шагом h , находим масштабно-инвариантную числовую последовательность $\tau_i = \tau(q_i), i = \overline{1, n}$, в которой $q_1 = q_{\min}, q_n = q_{\max}$.

В силу того, что любая функция от аргумента, который является инвариантом, тоже есть инвариант, числовая последовательность размерностей Реньи $D_i = D_q$, которая определяется выражением (7), не зависит от размера клетки r во всем диапазоне существования степенной зависимости (5).

Определение информационных дивергенций геофизических полей, имеющих мультифрактальную структуру, выполняется введением в рассмотрение нескольких инвариантных информационных мер. Для двух распределений вероятностей $P = \{p_i(r)\}_{i=1}^{N(r)}, G = \{g_i(r)\}_{i=1}^{N(r)}$, вычисленных по соотношению (2), со спектрами размерностей Реньи D_q, \tilde{D}_q и дискретными значениями спектров в виде монотонно убывающей числовой последовательности $D_{q_k}, \tilde{D}_{q_k}, k = \overline{1, n}; q_1 = q_{\min}, q_n = q_{\max}$, вводятся векторная инвариантная информационная мера расхождения R_q и скалярная инвариантная мера I :

$$R_q(P \| G) = \left| D_q - \tilde{D}_q \right|, \quad q_{\min} \leq q \leq q_{\max}, \quad (17)$$

$$I(P\|G) = \max_q \left| D_q - \tilde{D}_q \right|, \quad q_{\min} \leq q \leq q_{\max}, \quad (18)$$

где q_{\min} — достаточно малое отрицательное число $q_{\min} \ll -1$, а q_{\max} — большое число $q_{\max} \gg 1$. Обе меры являются скейлинговыми информационными ме-

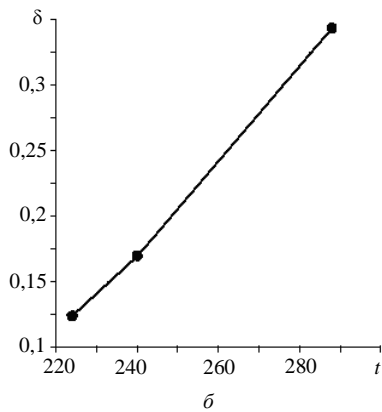
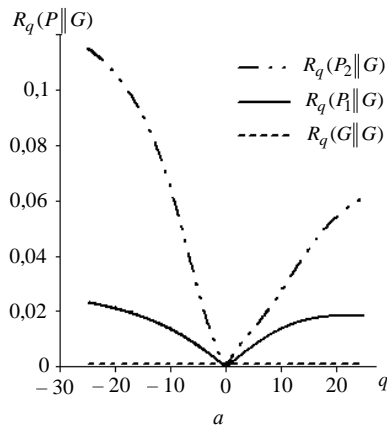


Рис. 4

статистической суммы и размерностей D_q (см. разд. 2) правая ветвь графика $R_q(P_2\|G)$ показывает, что в распределении P_2 существует небольшое количество клеток с высокими значениями температуры, по сравнению с распределением G ; левая ветвь графика демонстрирует большое различие в малых значениях температуры. Таким образом, изображение температурного поля на рис. 1, *в* является более контрастным по сравнению с изображением на рис. 1, *а*.

Важной информационной характеристикой, позволяющей сравнивать распределения полей по их отклонению от однородного распределения, является вариабельность δ , которая определяет размах изменчивости спектра размерностей Реньи

$$\delta = (D_{-\infty} - D_{\infty}) \approx (D_{q_{\min}} - D_{q_{\max}}). \quad (19)$$

Выражение (19) непосредственно следует из условия 2 существования мультифрактальной структуры и является еще одной инвариантной информационной мерой для статистической характеристики стационарного геофизического поля. В терминах вариабельности удобно характеризовать тренд развития процесса в среде негладкого геофизического поля. На рис. 4, *б* приведен график вариабельности δ спектра размерностей Реньи, вычисленный при значениях $-25 \leq q \leq 25$. Точками на графике обозначены значения вариабельности спектра на моменты времени t_1, t_2, t_3 .

рами, которые не зависят от размера клеток покрытия, т.е. от масштаба. Меры R_q и I позволяют определять информационные дивергенции в мультифрактальных структурах геофизических полей, представленных изображениями, и характеризовать процессы в среде поля. На рис. 4, *а* демонстрируются графики информационных расхождений R_q температурного поля, вычисленные согласно соотношению (17), со спектрами размерностей Реньи, приведенными на рис. 2, *а*. Графику $R_q(G\|G)$ соответствует информационное расхождение, равное нулю, $R_q = 0$, $-25 \leq q \leq 25$, которое при отображении температурного поля (рис. 1, *а*) рассчитано на себя с распределением G на момент времени t_1 . График $R_q(P_1\|G)$ иллюстрирует значения расхождений при сравнении полей с распределениями P_1 и G . График $R_q(P_2\|G)$ показывает расхождения в изображениях температурного поля на рис. 1, *а, в*, что соответствует изменениям в структуре поля за время $t_1 \leq t \leq t_3$. В соответствии со свойством

4. Численный эксперимент. Статистический анализ развития торфяного пожара демонстрирует применение рассмотренных выше методов анализа негладких нестационарных полей. Исходными данными служат значения температуры земной поверхности, полученные в работе [14] как результат обработки с космического аппарата Landsat-8 данных дальнего инфракрасного излучения территории. Анализ проводится для области размером 7680×7680 кв.м, значения температуры представлены матрицей размером 256×256 чисел. Кроме залежи торфа, ландшафтный состав области содержит водную поверхность, участки открытой почвы и растительность: лесную, луговую, болотную. На рис. 1, а–в приведены сделанные в 2015 году снимки поля температуры в градациях серого: t_1 — 12 августа, t_2 — 28 августа и t_3 — 15 октября соответственно. По данным съемки из космоса максимальная, минимальная и средняя температура поверхности в градусах по Цельсию составляет соответственно 50,88; 27,99; 36,14 (рис. 1, а), 45,0; 22,35; 31,29 (рис. 1, б), 51,42; 12,48; 22,53 (рис. 1, в). По данным полевой заверки торфяной пожар наблюдался на момент времени t_3 (рис. 1, в).

Приведенный выше анализ температурных данных показывает, что максимальные значения температуры земной поверхности по наблюдениям из космоса не могут служить индикаторным признаком наличия и развития торфяного пожара. Это объясняется тем, что горение торфа нижней части залежи происходит значительно интенсивнее, чем верхней, и торфяной пожар следует классифицировать как подземный. Пожар может заглубляться в нижние слои торфа до уровня грунтовых вод и распространяться на сотни метров, оставляя несгоревшим, тлеющим поверхностный слой почвы, под которым образуется горящая пещера. В процессе такого тлеющего горения в атмосферу выбрасывается большое количество углекислого, угарного газа, углерода и других экологически вредных продуктов, которые являются следствием термического разложения органических соединений без доступа воздуха. Возникновению пожара предшествует локальный разогрев участков залежи торфа в результате биохимических процессов.

В рассматриваемом примере развитие торфяного пожара характеризуется негладким температурным полем, которое имеет мультифрактальную структуру, и для анализа процесса возникновения и распространения пожара целесообразным является статистический анализ распределений методами, развитыми в разд. 1–3. На рис. 1, г иллюстрируется в билогарифмических координатах степенная зависимость статистической суммы S_q различных порядков ($q = -5, -4, \dots, 4, 5$) от размера клетки покрытия r , выраженной в долях квадратной области кадра $r = 2^{-i}$, $i = \overline{0, 8}$. Графики S_q построены для распределения поля температуры на момент времени t_1 . Линейные билогарифмические зависимости со средним квадратическим отклонением, не превышающим значения $\varepsilon = 0,01$, идентифицируют выполнение условия 1 существования мультифрактальной структуры поля температуры в различные моменты времени (см. разд. 2).

На рис. 2, а приведены спектры размерностей Реньи D_q температурного поля на моменты времени t_1 , t_2 и t_3 как функции порядка моментов q . Вычисления проведены для значений $-110 \leq q \leq 140$ с шагом $h_q = 0,125$. Монотонно убывающий вид функций D_q иллюстрирует выполнение условия 2 существования мультифрактальной структуры. Выбор широкого диапазона изменений значений q обусловлен медленной сходимостью D_q к максимальным и минимальным значениям размерностей. Выбор величины шага h_q продиктован вы-

числениями функций мультифрактального спектра $f(\alpha)$, которые приведены на рис. 2, б и определяются по соотношениям (13). На рис. 2, а показана линия размерностей, соответствующая однородному распределению температуры, $D = D_0 = D_{\text{support}} = 2$. В рассматриваемом примере в случае однородного распределения хаусдорфова размерность носителя (поля) равняется топологической размерности плоскости и функция мультифрактального спектра сходится в точке с координатами $(\alpha = 2, f(\alpha) = 2)$ (см. рис. 2, б).

Графики динамики дивергенций температурного поля при развитии торфяного пожара по критерию дивергенции Реньи μ_q , вычисленные по соотношению (15), приведены на рис. 3, а. Этот критерий информационных расхождений не требует выполнения условий существования мультифрактальной структуры распределений, однако существенно зависит от вычислительных параметров, т.е. от величины размера клеток покрытия изображения поля (рис. 3, б).

Наиболее общей масштабно-инвариантной характеристикой информационного расхождения двух вероятностных распределений с мультифрактальной структурой является векторная мера R_q , вычисленная по соотношению (17). Графики значений этой меры для распределений на моменты времени t_2, t_3 приведены на рис. 4, а: как результат сравнения с распределением на момент t_1 , $R_q(P_1 \| G) = |D_q(t_2) - \tilde{D}_q(t_1)|$, $R_q(P_2 \| G) = |D_q(t_3) - \tilde{D}_q(t_1)|$. На статистическом уровне графики на рис. 4, а характеризуют динамику развития пожара на торфянике, который фиксируется в момент времени t_3 и характеризуется высокой скоростью роста обеих ветвей графика $R_q(P_2 \| G)$.

На рис. 4, б приведен график изменения вариабельности спектра размерностей Реньи во времени $\delta(t)$, вычисленный по соотношению (19) для $q_{\min} = -110$, $q_{\max} = 140$: $\delta(t_1) = (D_{q_{\min}}(t_1) - D_{q_{\max}}(t_1)) = 2,049 - 1,916 = 0,123$; $\delta(t_2) = 2,081 - 1,911 = 0,170$; $\delta(t_3) = 2,188 - 1,845 = 0,343$. График демонстрирует восходящий тренд вариабельности $\delta(t)$ при развитии торфяного пожара.

Проведенный статистический анализ показывает, что развитие тлеющего пожара на торфянике характеризуется восходящей тенденцией трех введенных масштабно-инвариантных мер информационного расхождения R_q, I, δ .

Заключение. Предложенные методы анализа геофизических полей земных ландшафтов по аэрокосмическим снимкам позволяют выявить статистическую мультифрактальную структуру полей, что является следствием гетерогенности и неизотропности среды зондирования и характеризует поля как негладкие объекты анализа. Для описания негладких полей используются дробные размерности Хаусдорфа, а вместо производных применяются дробные показатели Гельдера. Описание поля мультифрактальной структуры, представленного изображением, предусматривает вычисление спектра размерностей Реньи по значениям пространственного распределения вероятности контролируемой физической величины. Спектр дробных размерностей определяет сингулярности геофизического поля. Вычисление информационной дивергенции нестационарного поля по серии изображений характеризует динамический процесс, происходящий в среде поля, и позволяет формализовать понятие тренда процесса по изображениям. Применение масштабно-инвариантных размерностей Реньи делает независимыми от масштаба рассмотрения оценки информационных расхождений контролируемых физических величин по их наблюдениям с космических аппаратов и позволяет ввести количественные характеристики протекания природных процессов.

М.В. Артюшенко

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ НЕГЛАДКИХ ГЕОФІЗИЧНИХ ПОЛІВ ЗА ДАНИМИ ДИСТАНЦІЙНОГО ЗОНДУВАННЯ

Наведено методику аналізу за знімками негладких геофізичних полів, спостережуваних аерокосмічними методами. Методика передбачає опис розподілів контрольованих фізичних величин статистичними фракталами, визначення масштабно-інваріантних характеристик і інформаційної дивергенції (розбіжностей) полів мультифрактальної структури. Наведено приклад аналізу поля температури при розвитку торф'яної пожежі.

M.V. Artiushenko

STATISTICAL ANALYSIS OF THE UNSMOOTH GEOPHYSICAL FIELDS FROM DATA OF THE REMOTE SENSING

A technique for analyzing images of unsmooth geophysical fields observed by aerospace methods is given. The technique provides for the description of the distributions of controlled physical quantities by statistical fractals, the definition of scale-invariant characteristics and information divergences of the fields of the multifractal structure. An example of an analysis of the temperature field in the development of peat fires is given.

1. *Федер Е.* Фракталы — М. : Мир, 1991. — 254 с.
2. *Vak P.* How nature works: the science of self-organized criticality. — New York : Copernicus, 1996. — 207 p.
3. *Потапов А.А.* Фракталы и дробные операторы в обработке информации — фундаментальное направление синергетики // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск: системный синтез и прикладная синергетика. — 2011. — **119**, № 6. — С. 30–40, ISSN 1999–9429 (Print), ISSN 2311–3103 (Online).
4. *Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А* и др. Новейшие методы обработки изображений / Под ред. А.А. Потапова. — М. : Физматлит, 2008. — 496 с.
5. *Артюшенко М.В., Дрозд В.О.* Метод оценки вариативности профессионально-квалификационной структуры рынка труда // Демографія та соціальна економіка. — 2013. — **20**, № 2. — С. 2013–2023.
6. *Артюшенко М.В., Зуб Л.Н., Подгородецкая Л.В., Федоровский А.Д.* Мультифрактальный анализ биоразнообразия и ценогической структуры сообщества растений по данным дистанционного зондирования // Доп. НАН України. — 2011. — №9. — С.132–141.
7. *Артюшенко М.В., Подгородецкая Л.В., Федоровский А.Д.* Фрактальный анализ спектрограмм растительного покрова в задачах природопользования // Там же. — 2010. — № 8. — С. 113–119.
8. *Turcotte D.L.* Fractals and chaos in geology and geophysics. — Cambridge University Press, 2 edition, 1997. — 416 p.
9. *Артюшенко М.В., Томченко О.В., Подгорняк Д.Л.* Мультифрактальный анализ морфологических изменений в структуре водных объектов по космическим снимкам // Доп. НАН України. — 2017. — №2. — С. 41–49.
10. *Башкиров А.Г.* Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем // Теоретическая и матем. физика. — 2006. — **149**, № 2. — С. 299–317.
11. *Кульбак С.* Теория информации и статистика / Под ред. Колмогорова А.Н. — М. : Наука, 1967. — 408 с.
12. *Renyi A.* On measures of entropy and information // Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. — 1961. — **1**. — P. 547–561.
13. *Hero A., Ma B., Michel O., Gorman J.* Alpha-divergence for classification, indexing and retrieval // Communications and Signal Processing Laboratory Technical Report CSPL-328. — 2001. — P. 3–16.
14. *Lisichenko L., Pazynych N.* Remote study of peatlands in connection with their flammability risk // Space research in Ukraine 2014–2016. — Kyiv : Akadempriodyka, 2016. — P. 54–59, ISBN 978–966–360–317–9.

Получено 03.07.2017
После доработки 07.02.2018