

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СПУТНИКА С ГРАВИТАЦИОННЫМ СТАБИЛИЗАТОРОМ СРЕДСТВАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ*

Введение

Проблемы достоверности, точности вычислений, вопросы ускорения и наглядности исследовательского процесса могут быть частично (а в некоторых случаях полностью) сняты, если в качестве инструмента решения задачи выбрана система компьютерной алгебры (СКА) (другие названия: «система аналитических вычислений», «пакет символьной математики»). Символьные вычисления на ЭВМ давно перешли в разряд рабочих вычислительных методов с разнообразными приложениями. Как видно из публикаций, иногда имеет место подход к использованию СКА в качестве калькулятора для решения отдельно взятой задачи. Существует и другой подход, когда на базе внутреннего языка программирования выбранной СКА разрабатывается прикладное программное обеспечение (ППО) для решения определенного класса задач.

Сочетание разрабатываемых методов с символьными алгоритмами СКА позволяет создавать эффективные инструменты для качественного исследования динамических систем. Когда становится затруднительным проводить исследование исключительно в символьном виде, можно перейти к «означиванию» некоторых (или всех) параметров рассматриваемой задачи и тем самым снять вопрос об ошибках округления. Это позволяет исследователю по возможности глубже проникнуть в качественную природу процессов и перейти к количественной (численной) оценке на более позднем этапе. Например, исследование вопросов устойчивости, стабилизации нелинейных или линеаризованных моделей механических систем часто приводит к задаче параметрического анализа полученных условий (неравенств). При параметрическом анализе важно иметь возможность оценки области значений параметров, при которых обеспечивается требуемое состояние (свойство) системы. На этом этапе анализа может помочь использование соответствующих функций и средств символьно-численного моделирования СКА (в данном случае «Mathematica»).

Вопрос об устойчивости спутника с гравитационным стабилизатором достаточно хорошо изучен (см., например, [1]). Для получения достаточных условий устойчивости применялся второй метод Ляпунова и теорема Барбашина–Красовского. Получение необходимых условий устойчивости (по линейным уравнениям возмущенного движения), как отмечено в [1], приводит к очень громоздким выкладкам. В отличие от пассивных систем стабилизации и ориентации в [2] исследованы возможности активного управления гравитационным стабилизатором, в частности оптимизация системы по степени устойчивости и точности. Классическая задача о влиянии структуры сил на устойчивость равновесий [3, 4] механических систем начала развитие с XIX века (У. Томсон обнаружил эффект гироскопической стабилизации). Тем не

* Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №16-07-00201 а).

© А.В. БАНЩИКОВ, 2018

Международный научно-технический журнал
«Проблемы управления и информатики», 2018, № 4

менее интерес к задаче не ослабевает и в настоящее время, см., например, некоторые из последних работ как в теоретическом [5–7], так и в практическом плане [8, 9]. В данной статье в качестве приложений использования СКА в рамках задачи о влиянии сил исследуется поведение конкретной механической системы, а именно асимптотическая устойчивость положения относительного равновесия спутника с управляемым гравитационным стабилизатором на круговой орбите.

1. Описание и построение символьной модели

Центр масс системы (точка O_1) совершает движение по кеплеровой круговой орбите с постоянной угловой скоростью ω . Стабилизатор представляет собой жесткий стержень с точечной массой на его свободном конце. Стержень присоединен к спутнику в точке O_2 с помощью двухстепенного подвеса (рис. 1).

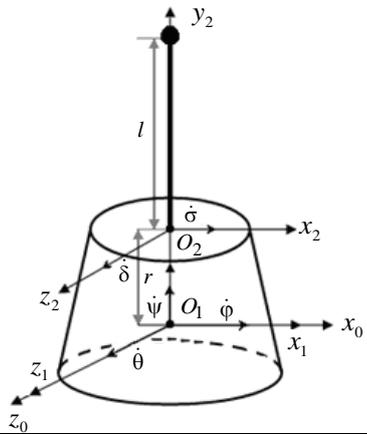


Рис. 1

Для описания движения механической системы вводится три правые ортогональные декартовы системы координат (СК) [2]: а) орбитальная $O_1x_0y_0z_0$ и жестко связанная с корпусом спутника СК $O_1x_1y_1z_1$ с осями, направленными по главным центральным осям инерции спутника; б) СК $O_2x_2y_2z_2$ с началом в точке крепления стержня. Для определения взаимного расположения осей $O_1x_0y_0z_0$ и $O_1x_1y_1z_1$ используются направляющие косинусы, задаваемые самолетными углами ψ, θ, ϕ ; δ, σ — углы поворота стержня относительно корпуса спутника. На систему действует гравитационный момент.

В невозмущенном движении главные центральные оси инерции системы совпадают с осями орбитальной системы координат (ОСК), а стержень направлен по радиусу орбиты — это исследуемое положение равновесия спутника со стабилизатором в ОСК:

$$\begin{cases} \psi = 0, \theta = 0, \phi = 0, \delta = 0, \sigma = 0, \\ \dot{\psi} = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\phi} = 0, \dot{\delta} = 0, \dot{\sigma} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

С помощью созданного ППО [10–12] для исследуемой системы тел в символьном виде на персональном компьютере получены:

- кинетическая энергия и силовая функция приближенного ньютоновского поля тяготения;
- нелинейные уравнения движения в форме Лагранжа второго рода;
- матрицы уравнений возмущенного движения в первом приближении в окрестности положения равновесия (1);
- коэффициенты характеристического уравнения системы.

Линеаризованные в окрестности нулевого положения равновесия (1) уравнения движения спутника со стабилизатором разбиваются на две подсистемы, соответственно в канале «тангажа» (θ) и в канале «рысканья–крена» (ψ, ϕ):

$$\begin{cases} M_1 \ddot{q}_1 + K_1 q_1 = Q_1, \\ M_2 \ddot{q}_2 + G \dot{q}_2 + K_2 q_2 = Q_2, \end{cases} \quad (2)$$

где все производные берутся по безразмерному времени $\tau = \omega t$, ($\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ — мо-

дуль орбитальной угловой скорости); $q_1 = \begin{pmatrix} \theta \\ \delta \end{pmatrix}$, $q_2 = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \\ \sigma \end{pmatrix}$ — вектора отклонений

обобщенных координат от невозмущенного движения; $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_\delta \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_\sigma \end{pmatrix}$ —

управляющие силы.

Уравнения (2) можно интерпретировать как уравнения колебаний некоторой механической системы, находящейся под действием потенциальных (с матрицами K_1, K_2) и гироскопических (с матрицей G) сил, где

$$K_1 = 3 \begin{pmatrix} b-a & f \\ f & f \end{pmatrix}; K_2 = \begin{pmatrix} c-b & 0 & 0 \\ 0 & 4(c-a) & 4f \\ 0 & 4f & 3f+d \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} 0 & c-b-a & 0 \\ a+b-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти силы определяются силами гравитационного притяжения и движением по орбите. Матрицы M_1, M_2 играют роль диагональных блоков матрицы кинетической энергии:

$$M_1 = \begin{pmatrix} c & f \\ f & d \end{pmatrix}; M_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & f \\ 0 & f & d \end{pmatrix}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a = J_y; b = J_x + mr(l+r) + \frac{1}{3}ml^2 + m_0(r+l)^2; c = b + J_z - J_x;$$

$$d = \left(\frac{m}{3} + m_0\right)l^2; f = d + \left(\frac{m}{2} + m_0\right)rl; c-b-a \equiv J_z - J_x - J_y,$$

где m, m_0 — соответственно массы стержня и точечного концевго груза; $l > 0$ — длина стержня; $r > 0$ — расстояние от центра масс системы до точки крепления стержня (см. рис. 1); J_x, J_y, J_z , a, b, c — главные моменты инерции соответственно спутника и всей системы.

С учетом распределения масс в системе и эллипсоиде инерции твердого тела, справедливы неравенства:

$$b > a > 0, \quad c > a, \quad f > d > 0, \quad c > f, \quad b > f,$$

$$c + a - b \equiv J_z + J_y - J_x > 0, \quad b + a - c \equiv J_x + J_y - J_z > 0. \quad (3)$$

Установлено, что полученные с помощью ППО уравнения (2) совпадают с приведенными ранее (см., например, [2] в других обозначениях) уравнениями движения орбитального спутника со стабилизатором.

2. Постановка задачи

Классические теоремы Томсона–Тета–Четаева [3] позволяют начать изучение вопроса об устойчивости тривиального решения с анализа матрицы потенциальных сил. Известно [4], что четность (нечетность) степени неустойчивости по Пуанкаре определяется положительностью (отрицательностью) определителя матрицы потенциальных сил. Для прикладных задач динамики космических ап-

паратов обычно задают распределение масс в системе, при котором исходная матрица потенциальных сил системы будет положительно определена и далее за счет влияния, прежде всего, диссипативных сил обеспечивается асимптотическая устойчивость движения по теореме Ляпунова. Но могут представлять интерес и потенциально неустойчивые системы, к тому же возможны «нештатные» ситуации на орбите.

Нетрудно видеть, что для определенной положительности матриц K_1, K_2 требуется соответственно выполнение условий:

$$b > a + f, \quad c > b, \quad (c - a)(3f + d) - 4f^2 > 0. \quad (4)$$

Предположим, что для подсистемы «рысканья–крена» могут быть изменены на противоположные одновременно второе и третье неравенства в (4) или только второе из них.

В этих случаях система не будет устойчивой при действии исходных потенциальных сил и требуется ее стабилизация дополнительными силами различной природы. С этой целью в правые части уравнений движения (2) добавим управляющие силы подвесом стержня в виде

$$Q_\delta = \tilde{k}_\theta^* \dot{\theta} - \tilde{k}_\delta^* \dot{\delta} + \tilde{k}_\theta \theta - \tilde{k}_\delta \delta; \quad Q_\sigma = \tilde{k}_\varphi^* \dot{\varphi} - \tilde{k}_\sigma^* \dot{\sigma} + \tilde{k}_\varphi \varphi - \tilde{k}_\sigma \sigma, \quad (5)$$

где $\tilde{k}_{(\theta, \delta, \varphi, \sigma)}^* = \frac{k_{(\theta, \delta, \varphi, \sigma)}^*}{\omega}$; $\tilde{k}_{(\theta, \delta, \varphi, \sigma)} = \frac{k_{(\theta, \delta, \varphi, \sigma)}}{\omega^2}$ — постоянные коэффициенты соответственно при скоростях и координатах.

Разбивая матрицы в уравнениях движения (2) на симметричные и кососимметричные части, нетрудно выписать структуру сил, действующих на систему. Например, для подсистемы «рысканья–крена» к исходным потенциальным (с матрицей K_2) и гироскопическим (с матрицей G) силам добавляются потенциальные C_2 , неконсервативные N_2 , диссипативные D_2 и гироскопические G_2 силы, где

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tilde{k}_\varphi}{2} \\ 0 & -\frac{\tilde{k}_\varphi}{2} & \tilde{k}_\sigma \end{pmatrix}; \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{k}_\varphi}{2} \\ 0 & -\frac{\tilde{k}_\varphi}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\tilde{k}_\varphi^*}{2} \\ 0 & -\frac{\tilde{k}_\varphi^*}{2} & \tilde{k}_\sigma^* \end{pmatrix}; \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{k}_\varphi^*}{2} \\ 0 & -\frac{\tilde{k}_\varphi^*}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Цель работы — исследовать вопрос о влиянии действующих сил на устойчивость положения равновесия системы (2). С учетом вышеуказанных предположений дополнительно поставим задачу о возможности обеспечить асимптотическую устойчивость системы «сокращенным» набором из сил, представленных в (5).

3. Области неустойчивости системы

Для удобства графического представления областей с различными степенями неустойчивости и последующего параметрического анализа введем четыре безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{c - b}{a} = \frac{J_z - J_x}{J_y}; \quad \gamma = \frac{b - a}{c}; \quad p_1 = \frac{d}{f}; \quad p_2 = \frac{f}{c}. \quad (6)$$

Физически реализуемые значения параметров с учетом (3) лежат в интервалах

$$-1 < \alpha < 1, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < p_1 < 1, \quad 0 < p_2 < 1.$$

Диагональные блоки исходной матрицы потенциальных сил (при $Q_\delta=0$, $Q_\sigma=0$) в обозначениях (6) имеют вид

$$K_1 = 3 \begin{pmatrix} \gamma & p_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; K_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 4(\gamma + \alpha) & 4p_2(\alpha + 1) \\ 0 & 4 & 3 + p_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что из условий (3) следует $\gamma + \alpha > 0$.

Соотношения $\gamma = p_2$, $\alpha = 0$, $S \equiv (\gamma + \alpha)(3 + p_1) - 4p_2(\alpha + 1) = 0$ задают в пространстве параметров (6) поверхности, разделяющие области с различными степенями неустойчивости [3, 4] по Пуанкаре для всей системы. А именно, область Z с нулевой (*Zero*) степенью неустойчивости $\gamma > p_2$, $\alpha > 0$, $S > 0$, где матрицы K_1 , K_2 положительно-определенные (это условия (4) в обозначениях (6)).

Области с четной (*Even*) степенью, где $\det K = \det K_1 * \det K_2 > 0$, соответственно \hat{E} и \underline{E} :

$$\gamma > p_2, \alpha < 0, S < 0 \text{ и } \gamma < p_2, \alpha > 0, S < 0.$$

Области с нечетной (*Odd*) степенью неустойчивости, где $\det K < 0$, соответственно O , \underline{Q} , \hat{O} :

$$\gamma < p_2, \alpha > 0, S > 0; \gamma < p_2, \alpha < 0, S < 0; \gamma > p_2, \alpha < 0, S > 0.$$

Например, на рис. 2 качественно изображены эти области при фиксированных значениях параметров p_1, p_2 .

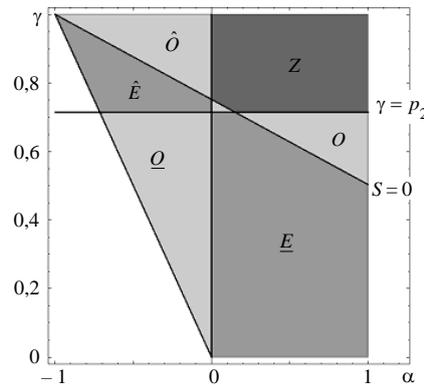


Рис. 2

Из теоремы Томсона–Тета–Четаева о влиянии гироскопических сил следует, что гироскопическая стабилизация неустойчивого равновесия невозможна для областей с нечетной степенью. В областях \hat{E} и \underline{E} неустойчивое положение равновесия имеет четную степень при действии исходных потенциальных сил. Для таких систем при определенных условиях возможна стабилизация равновесия за счет добавления гироскопических сил. Ранее в [13] для спутника без активного управления стержнем (консервативная система) автор продемонстрировал стабилизацию равновесия в иглообразной части (подобласти) области \hat{E} , а в [14] доказал невозможность такой стабилизации в области \underline{E} .

В областях \underline{E} , \underline{Q} , O (где $\gamma < p_2$, т.е. в исходных параметрах $a < b < a + f$) исследование асимптотической устойчивости для спутника с управляемым стабилизатором проведено в [15].

Итак, с учетом принятых предположений при постановке задачи в разд. 2 далее будем рассматривать возможность асимптотической устойчивости системы за счет дополнительных сил (5) в областях \hat{O} , \hat{E} (т.е. при $\gamma > p_2$ и $\alpha < 0$).

4. Параметрический анализ условий асимптотической устойчивости

Очевидно, что характеристическое уравнение системы (2) факторизуется: $\Delta(\lambda) \equiv \Delta^{(1)} * \Delta^{(2)} = 0$. После элементарных преобразований с характеристическими матрицами (умножение их строк на положительные множители) получим характеристические определители в обозначениях (6) соответственно для подсистем «тангажа» и «рысканья–крена»:

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 3\gamma & p_2(\lambda^2 + 3) \\ \lambda^2 - \lambda\tilde{k}_\theta^* + (3 - \tilde{k}_\theta) & \lambda^2 p_1 + \lambda\tilde{k}_\delta^* + (3 + \tilde{k}_\delta) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^4 w_i \lambda^i,$$

$$\text{где } w_4 = p_1 - p_2, \quad w_3 = \tilde{k}_\delta^* + p_2\tilde{k}_\theta^*, \quad w_2 = 3(p_1\gamma - 2p_2 + 1) + \tilde{k}_\delta + p_2\tilde{k}_\theta, \quad w_1 = 3(\gamma\tilde{k}_\delta^* + p_2\tilde{k}_\theta^*), \quad w_0 = 3(3(\gamma - p_2) + \gamma\tilde{k}_\delta + p_2\tilde{k}_\theta);$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \alpha & \lambda(\alpha - 1) & 0 \\ \lambda(\alpha - 1)(\gamma - 1) & \lambda^2(1 + \gamma\alpha) + 4(\alpha + \gamma) & (\lambda^2 + 4)p_2(\alpha + 1) \\ 0 & \lambda^2 - \lambda\tilde{k}_\varphi^* + (4 - \tilde{k}_\varphi) & \lambda^2 p_1 + \lambda\tilde{k}_\sigma^* + (3 + p_1 + \tilde{k}_\sigma) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^6 v_i \lambda^i,$$

$$\text{где } v_6 = (1 + \gamma\alpha)p_1 - (\alpha + 1)p_2, \quad v_5 = (1 + \gamma\alpha)\tilde{k}_\sigma^* + (\alpha + 1)p_2\tilde{k}_\varphi^*, \quad v_4 = (1 + \gamma\alpha)(3 + p_1 + \tilde{k}_\sigma) + (1 + 3\gamma + \alpha(3 + \alpha + 2\gamma))p_1 - (\alpha + 1)p_2(8 + \alpha - \tilde{k}_\varphi), \quad v_3 = (1 + 3\gamma + \alpha(\alpha + 2\gamma + 3))\tilde{k}_\sigma^* + (\alpha + 1)(4 + \alpha)p_2\tilde{k}_\varphi^*, \quad v_2 = (1 + 3\gamma + \alpha(\alpha + 2\gamma + 3))(3 + p_1 + \tilde{k}_\sigma) + 4\alpha p_1(\gamma + \alpha) + (\alpha + 1)p_2((4 + \alpha)\tilde{k}_\varphi - 8(\alpha + 2)), \quad v_0 = 4\alpha((\alpha + \gamma)(3 + p_1 + \tilde{k}_\sigma) + (\alpha + 1)p_2(\tilde{k}_\varphi - 4)).$$

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица соответственно для двух подсистем

$$\Delta_3^{(1)} = w_1 w_2 w_3 - w_4 w_1^2 - w_0 w_3^2; \quad \Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} v_5 & v_3 & v_1 \\ v_6 & v_4 & v_2 \\ 0 & v_5 & v_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_5^{(2)} = \begin{vmatrix} v_5 & v_3 & v_1 & 0 & 0 \\ v_6 & v_4 & v_2 & v_0 & 0 \\ 0 & v_5 & v_3 & v_1 & 0 \\ 0 & v_6 & v_4 & v_2 & v_0 \\ 0 & 0 & v_5 & v_3 & v_1 \end{vmatrix}$$

получены аналитически СКА «Mathematica» и использовались в дальнейших вычислениях, но в силу громоздкости их явный вид здесь не приводится.

По критерию Лъенара–Шипара [16] выполнение условий существования корней с отрицательными вещественными частями у полинома $\Lambda(\lambda)$

$$w_i > 0 \quad (i = \overline{0, 4}), \quad \Delta_3^{(1)} > 0, \quad (7)$$

$$v_i > 0 \quad (i = \overline{0, 6}), \quad \Delta_3^{(2)} > 0, \quad \Delta_5^{(2)} > 0. \quad (8)$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия системы на основании теоремы Ляпунова по первому приближению.

Отметим, что условия $w_4 \equiv \det M_1 > 0$ и $v_6 \equiv \det M_2 > 0$ выполняются в силу положительной определенности матрицы кинетической энергии.

4.1. Асимптотическая устойчивость в подсистеме «тангажа». С помощью функции Reduce СКА «Mathematica», предназначенной для нахождения символь-

ного (аналитического) решения систем неравенств, получены условия на управляющие параметры $\tilde{k}_\theta^*, \tilde{k}_\delta^*, \tilde{k}_\theta, \tilde{k}_\delta$, обеспечивающие выполнение системы неравенств (7). В силу громоздкости этого решения его представление здесь опущено. Анализ полученного решения позволяет сделать вывод, что обеспечить асимптотическую устойчивость можно и «сокращенным» набором управляющих сил. Рассмотрено три случая:

1) $Q_\delta = \tilde{k}_\theta^* \dot{\theta} - \tilde{k}_\delta^* \dot{\delta}$ (так как подсистема «тангажа» для значений $p_1 > p_2$, $\gamma > p_2$ устойчива при исходных потенциальных силах (т.е. $K_1 \gg 0$), поэтому можно не учитывать дополнительные позиционные силы (т.е. $\tilde{k}_\delta = 0, \tilde{k}_\theta = 0$));

2) $Q_\delta = -\tilde{k}_\delta^* \dot{\delta} - \tilde{k}_\delta \delta$ (действуют дополнительные диссипативные и потенциальные силы);

3) $Q_\delta = \tilde{k}_\theta^* \dot{\theta} + \tilde{k}_\theta \theta$ (присутствуют потенциальные, неконсервативные, диссипативные и гироскопические силы).

В результате сформулировано и доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Для значений параметров (6) из области $\{0 < p_2 < 1, p_2 < p_1 < 1, p_2 < \gamma < 1\}$ и при выборе управляющих параметров (5), удовлетворяющих условиям

$$\tilde{k}_\theta^* > \varepsilon_1 \tilde{k}_\delta^*,$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1 - \gamma p_1 + \sqrt{(\gamma p_1 - 1)^2 + 4(1 - \gamma)(p_1 - 1)p_2}}{2p_2(p_1 - 1)} < 0$ для случая 1 или $\tilde{k}_\delta^* > 0, \tilde{k}_\delta > \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 = 3\left(\frac{p_2}{\gamma} - 1\right) < 0$ для случая 2 или $\tilde{k}_\theta^* > 0, \tilde{k}_\theta > \varepsilon_3$, где $\varepsilon_3 = 3\left(1 - \frac{\gamma}{p_2}\right) < 0$ для случая 3, все корни полинома $\Lambda^{(1)}(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.

Как видно, управляющие параметры $\tilde{k}_\delta, \tilde{k}_\theta$ могут принимать и отрицательные значения, например в случае 2 в интервале $-3 < \tilde{k}_\delta < 0$. Область асимптотической устойчивости будет определяться значениями параметров из:

$$-3 < \tilde{k}_\delta < 0 \wedge 0 < p_2 < \frac{3 + \tilde{k}_\delta}{3} \wedge p_2 < p_1 < 1 \wedge \frac{3p_2}{3 + \tilde{k}_\delta} < \gamma < 1.$$

Отрицательность \tilde{k}_δ свидетельствует о том, что в отличие от упругих сил это могут быть притягивающие силы (например, за счет магнитного устройства). С уменьшением значения \tilde{k}_δ (в указанном интервале) увеличивается дестабилизирующий эффект от дополнительных потенциальных сил. То же самое относительно \tilde{k}_θ можно сказать и в случае 3. Отметим, что положительные значения $\tilde{k}_\delta, \tilde{k}_\theta$ не изменяют область асимптотической устойчивости: $0 < p_2 < 1 \wedge p_2 < p_1 < 1 \wedge p_2 < \gamma < 1$.

4.2. Стабилизация в подсистеме «рысканья–крена». Обратим внимание, что управляющие параметры $\tilde{k}_\varphi^*, \tilde{k}_\sigma^*$ входят только в нечетные коэффициенты v_1, v_3, v_5 характеристического уравнения. Исходя из условий (8), с помощью вышеупомянутой

функции Reduce проанализирована положительность v_1, v_3, v_5 отдельно для областей \hat{E} и \hat{O} . Для области \hat{O} обращение к функции и решение имеют следующий вид:

$$\text{Reduce} [\{ 0 < p_2 < p_1 < 1, p_2 < \gamma < 1, -1 < \alpha < 0, S > 0, v_1 > 0, v_3 > 0, v_5 > 0 \},$$

$$\{ p_2, p_1, \gamma, \alpha, \tilde{k}_\sigma^*, \tilde{k}_\varphi^* \}, \text{Reals }],$$

$$p_2 > 0 \wedge p_2 < p_1 < 1 \wedge \gamma < 1 \wedge \frac{4p_2 - \gamma(3 + p_1)}{3 + p_1 - 4p_2} < \alpha < 0 \wedge \tilde{k}_\sigma^* > 0 \wedge \varepsilon_4 \tilde{k}_\sigma^* < \tilde{k}_\varphi^* < \varepsilon_5 \tilde{k}_\sigma^*, \quad (9)$$

а для области \hat{E} соответственно

$$\text{Reduce} [\{ 0 < p_2 < p_1 < 1, p_2 < \gamma < 1, -1 < \alpha < 0, \alpha + \gamma > 0, S < 0, v_1 > 0, v_3 > 0, v_5 > 0 \},$$

$$\{ p_2, p_1, \gamma, \alpha, \tilde{k}_\sigma^*, \tilde{k}_\varphi^* \}, \text{Reals }]$$

$$p_2 > 0 \wedge p_2 < p_1 < 1 \wedge \tilde{k}_\sigma^* > 0 \wedge \varepsilon_4 \tilde{k}_\sigma^* < \tilde{k}_\varphi^* < \varepsilon_5 \tilde{k}_\sigma^* \wedge$$

$$\wedge \left(\left(p_2 < \gamma \leq \frac{4p_2}{3 + p_1} \wedge -\gamma < \alpha < 0 \right) \vee \left(\frac{4p_2}{3 + p_1} < \gamma < 1 \wedge -\gamma < \alpha < \frac{4p_2 - \gamma(3 + p_1)}{3 + p_1 - 4p_2} \right) \right), \quad (10)$$

$$\text{где } \varepsilon_4 = -\frac{(1 + 3\gamma + \alpha(3 + \alpha + 2\gamma))}{(1 + \alpha)(4 + \alpha)p_2} < 0, \quad \varepsilon_5 = -\frac{(\alpha + \gamma)}{(1 + \alpha)p_2} < 0.$$

Из аналитических решений (9) и (10) следует положительность \tilde{k}_σ^* и отрицательность \tilde{k}_φ^* . Итак, диссипативные силы (с матрицей D_2) могут быть только тормозящие (трения), но не ускоряющие. В результате дальнейшего исследования сформулирован и доказан следующий вывод.

Утверждение 2. Если $\tilde{k}_\sigma^* = 0$ или $\tilde{k}_\varphi^* = 0$, то обеспечить положительность коэффициентов v_1, v_3, v_5 характеристического уравнения для значений параметров (6) из областей \hat{E} и \hat{O} невозможно.

Таким образом, для стабилизации системы в исследуемых областях \hat{E} и \hat{O} необходим полный набор управляющих сил по скоростям Q_σ из (5).

Получить аналитическое решение для всей системы неравенств (8) не удастся в силу большого числа переменных (четыре безразмерных и четыре управляющих параметра) и сложности анализируемых полиномиальных выражений. Поэтому для упрощения исследования перейдем к символично-численному анализу при фиксированных значениях некоторых параметров.

Рассмотрим конкретное распределение масс в системе: $r = 2,5$ м, $l = 3$ м, $m = 1,4$ кг, $m_0 = 1,53$ кг, $J_x = 76$ кгм², $J_y = 28$ кгм², $J_z = 75$ кгм². Отметим, что при этом численные значения для безразмерных параметров (6) находятся в области \hat{O} с нечетной степенью неустойчивости, и без влияния каких-либо дополнительных позиционных сил стабилизировать подсистему не удастся. С учетом (9) предположим, что $\tilde{k}_\sigma^* = 2$, а параметр $\tilde{k}_\varphi^* < 0$ произволен. При решении системы неравенств (8) для управляющих параметров $\tilde{k}_\varphi, \tilde{k}_\sigma$ рассмотрим два варианта позиционных сил:

- 1) $\tilde{k}_\varphi = 0, \tilde{k}_\sigma \neq 0$ (присутствуют только дополнительные потенциальные силы)

или 2) $\tilde{k}_\sigma = 0, \tilde{k}_\varphi \neq 0$ (помимо потенциальных действуют дополнительные неконсервативные силы, т.е. матрицы C_2, N_2 ненулевые).

С помощью функции RegionPlot СКА «Mathematica», предназначенной для графического представления решения системы неравенств построим области асимптотической устойчивости для вариантов 1 и 2 соответственно в плоскости параметров $\{\tilde{k}_\sigma, \tilde{k}_\varphi^*\}$ и $\{\tilde{k}_\varphi, \tilde{k}_\varphi^*\}$. Полученные результаты (в виде заштрихованных ограниченных площадей) отражены на рис. 3, 4.

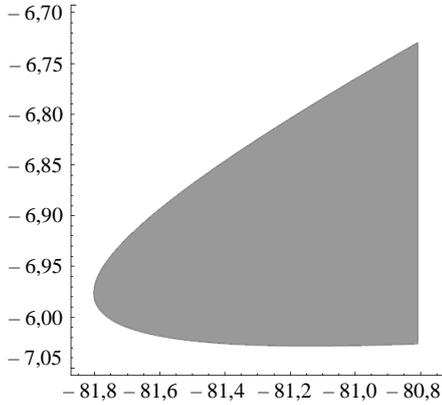


Рис. 3

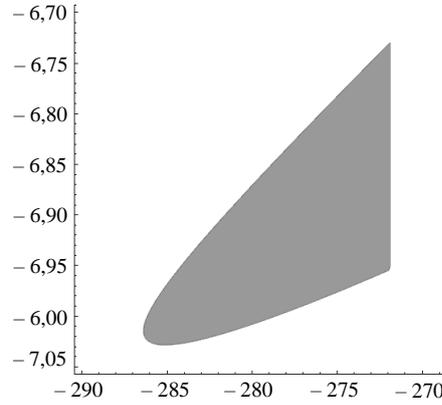


Рис. 4

В результате представленного выше исследования можно сделать следующий вывод.

Утверждение 3. Для значений параметров (6) из области \hat{O} с нечетной степенью неустойчивое равновесие системы (2) может быть стабилизировано до асимптотической устойчивости за счет влияния управляющих сил (5).

Теперь рассмотрим вопрос о возможности асимптотической устойчивости системы для значений параметров (6) из области \hat{E} . Поскольку в этой области $v_0|_{\tilde{k}_\varphi=0, \tilde{k}_\sigma=0} \equiv \det K_2 > 0$ и $\det K_1 > 0$, то для упрощения символьно-численного анализа можно не учитывать позиционные силы в Q_σ из (5) (т.е. пусть дополнительно $\tilde{k}_\varphi = 0, \tilde{k}_\sigma = 0$).

Нахождение решения системы неравенств (8) проведено с помощью функции Reduce при следующих вариантах допустимых значений безразмерных и управляющих параметров:

а) $p_1 = 4/5$ (т.е. известно распределение масс только в стабилизаторе) и с учетом (10) параметры $\tilde{k}_\sigma^* = 1, \tilde{k}_\varphi^* = -\gamma/p_2$. Поиск решения осуществлялся по трем переменным (безразмерным параметрам α, γ, p_2 , принадлежащим исследуемой области \hat{E});

б) $p_1 = 4/5, p_2 = 5/7$ (как на рис. 2). Поиск решения осуществлялся по четырем переменным (α, γ из области \hat{E} и управляющим параметрам $\tilde{k}_\sigma^* > 0, \tilde{k}_\varphi^* < 0$);

в) зафиксируем одно из значений главного момента инерции спутника, например $J_z = 75 \text{ кгм}^2$, а численные значения для r, l, m, m_0 совпадают с вы-

шеприведенными (т.е. заданы распределение масс в стабилизаторе p_1 и значение p_2). Параметры α, γ имеют символьно-численные значения с условиями на принадлежность области \hat{E} . Поиск решения осуществлялся по переменным $J_x, J_y, \tilde{k}_\sigma^*, \tilde{k}_\phi^*$;

г) $\alpha \equiv (J_z - J_x) / J_y = -1/110$ (т.е. известны численные значения главных моментов инерции спутника) и значение для стабилизатора, например $p_1 = 1/2$. Поиск решения осуществлялся по переменным $\gamma, p_2, \tilde{k}_\sigma^*, \tilde{k}_\phi^*$.

Для всех вышеперечисленных вариантов при решении системы неравенств (8) функция Reduce выдает один ответ: FALSE (т.е. система (8) несовместна или область решения пуста).

Заметим, что для варианта б) в работе [13] установлена возможность гироскопической стабилизации для консервативной системы в части области \hat{E} (см., например, в [3] понятие «временной» устойчивости), но по результатам анализа достигнутая стабилизация разрушается дополнительными диссипативными силами.

В завершение отметим, что если бы ответ FALSE удалось получить при решении системы неравенств (8) по всем восьми символьным переменным: $\alpha, \gamma, p_1, p_2, \tilde{k}_\sigma^*, \tilde{k}_\phi^*, \tilde{k}_\phi, \tilde{k}_\sigma$, то можно было бы утверждать невозможность асимптотической устойчивости системы для значений параметров (6) из области \hat{E} с четной степенью при стабилизирующих воздействиях из класса (5). Но это, к сожалению, неразрешимая задача в силу так называемого «проклятия размерности».

Заключение

Исследование показало, что переход от пяти исходных параметров (a, b, c, f, d) к четырем безразмерным параметрам (α, γ, p_1, p_2) (6) лишь незначительно упростил символьно-численный анализ. Но в силу ограниченности значений последних позволил лучше представить качественную картину исследования (что проявилось также в [17, 18]).

Подчеркнем, что для моделей, имеющих высокую размерность и/или содержащих много параметров, получать аналитические результаты весьма затруднительно. Как было замечено во введении, в таких задачах все большее применение находят СКА. Отличительной особенностью представленных исследований является то, что практически все вычисления на персональном компьютере проводились в символьном или символьно-численном виде, а получение дифференциальных уравнений движения и коэффициентов характеристического уравнения к тому же в автоматическом режиме с помощью созданного ППО на базе СКА «Mathematica».

А.В. Банщиков

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КЕРУЮЧИХ СИЛ НА СТІЙКІСТЬ СУПУТНИКА З ГРАВІТАЦІЙНИМ СТАБІЛІЗАТОРОМ ЗАСОБАМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ

Досліджено питання впливу сил на стійкість відносно рівноваги супутника з керованим гравітаційним стабілізатором на круговій орбіті. У просторі введених параметрів знайдено області з різними ступенями нестійкості за Пуанкаре. Вважаючи потенціальну систему нестійкою, розглянуто питання можливості її стабілізації до асимптотичної стійкості. Параметричний аналіз отриманих нерівностей проведено за допомогою вбудованих засобів для символічно-числового моделювання системи комп'ютерної алгебри «Mathematica».

A.V. Banshchikov

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF CONTROL FORCES ON THE STABILITY OF A SATELLITE WITH A GRAVITATIONAL STABILIZER BY MEANS OF COMPUTER ALGEBRA

The problem of the influence of forces on stability of the relative equilibrium of satellite with a controlled gravitational stabilizer on the circular orbit is researched. In space of the entered parameters the domains with various degrees of instability by Poincare are found. Assuming instability of potential system, the problem on possibility of its stabilization to asymptotic stability is considered. Parametric analysis of the obtained inequalities with the help of Mathematica built-in tools for symbolic-numerical modelling is carried out.

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. — М. : ВИНТИ, 1978. — 11. — С. 5–223.
2. Потепенко Е.М. Динамика космического аппарата с прямым активным управлением гравитационным стабилизатором // Космические исследования. — 1988. — 26, вып. 5. — С. 699–708.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М. : Изд-во АН СССР, 1962. — 536 с.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М. : Наука, 1987. — 304 с.
5. Агафонов С.А. Об устойчивости и стабилизации движения неконсервативных механических систем // Прикладная математика и механика. — 2010. — 74, вып. 4. — С. 560–566.
6. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Влияние неконсервативных сил на устойчивость систем с кратными частотами и парадокс Николаи // Доклады Академии Наук. — 2011. — 436, № 2. — С. 188–194.
7. Александров А.Ю., Косов А.А. Об устойчивости гироскопических систем // Вестник СПб. университета. Сер. 10. — 2013. — Вып. 2. — С. 3–13.
8. Пузырев В.Е., Савченко Н.В. Оценка влияния демпфирующего момента на устойчивость равномерных вращений несимметричного гироскопа // Механика твердого тела. — 2012. — Вып. 42. — С. 135–142.
9. Голинько С.И., Слынько В.И. Влияние структуры сил на устойчивость гироскопических механических систем с импульсным воздействием // Прикладная механика. — 2016. — 52, № 3. — С. 105–120.
10. Банщиков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Задачи механики и компьютерная алгебра // Математические машины и системы. — 2008. — № 4. — С. 82–97.
11. Банщиков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем // Вычислительные технологии. — 2014. — 19, № 6. — С. 3–18.
12. Банщиков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Программный комплекс LinModel для анализа динамики механических систем большой размерности // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008610622. ФГУ ФИПС, 1 февраля 2008 г.
13. Банщиков А.В. Параметрический анализ условий устойчивости спутника с гравитационным стабилизатором // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2010. — № 2(26). — С. 24–28.

14. *Банщиков А.В.* О гироскопической стабилизации положения равновесия спутника с гравитационным стабилизатором // Труды XI Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Т. 2. Секция 2. Устойчивость. — Казань : Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 43–51.
15. *Banshchikov A.V.* On the Asymptotic Stability of a Satellite with a Gravitational Stabilizer // Lecture Notes in Computer Science. — 2017. — **10490**. — P. 16–26.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1967. — 576 с.
17. *Банщиков А.В., Чайкин С.В.* Анализ устойчивости относительных равновесий вытянутого осесимметричного гиростата средствами символьно-численного моделирования // Космические исследования. — 2015. — **53**, № 5. — С. 414–420.
18. *Банщиков А.В.* Параметрический анализ условий гироскопической стабилизации относительных равновесий сплюснутого осесимметричного гиростата // Математическое моделирование. — 2016. — **28**, № 4. — С. 33–42.

Получено 01.03.2018
После доработки 25.05.2018