УДК 517.5

У.З. Грабова

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГАРМОНИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА

Введение

Теория принятия решений (ТПР) является одной из наиболее интенсивно развивающихся отраслей знаний. Возрастающий интерес к исследованию задач принятия решений объясняется как теоретическими потребностями, так и важными практическими приложениями в технике, экономике, экологии и др. Бурное развитие моделей и методов ТПР началось с середины XX века и привело к образованию такой самостоятельной математической дисциплины, как теория дифференциальных игр (Р. Айзекс, Н.Н. Красовский, Л.С. Понтрягин, Б.Н. Пшеничный, А.А.Чикрий, С.Д. Эйдельман и др.).

В ТПР процесс принятия решения рассматривается как процесс преобразования информации, включающий этапы содержательной постановки задачи. Часто принятие решений осуществляется в условиях неполной информации, когда формулируется некоторая экстремальная задача с ограничениями. Вопросы переработки и использования информации для принятия решений в условиях неопределенности, связанной с неполнотой исходной информации или ее искажением при передаче, являются одной из важнейших проблем информатики. Здесь на помощь придут идеи и методы теории аппроксимации, которые применяются в различных разделах математической науки, особенно прикладных направлений, так как задачи, связанные с необходимостью заменить один объект другим, близким в том или ином смысле к первому, но более простым для изучения, возникают очень часто. В работе рассматриваются методы решения возникающих экстремальных задач на основе модели задачи Колмогорова–Никольского. Существенный вклад в решение данной проблематики в свое время осуществили С.Н. Бернштейн, М.Г. Крейн, Н.И. Ахиезер, В.К. Дзядык, Н.П. Корнейчук, А.И. Степанец, А.Ф. Тиман, М.Ф. Тиман, В.П. Моторный и др.

В данной статье решена задача Колмогорова–Никольского для тригармонических интегралов Пуассона на классах Гельдера в равномерной метрике с изучением ее особенностей.

1. Постановка задачи

Пусть L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций f с нормой $\|f\|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$; C — пространство 2π-периодических

 ISSN 0572-2691

непрерывных функций f, в котором норма определяется равенством $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ — пространство 2π-периодических существенно ограниченных функций f с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ — множество функций натурального аргумента, зависящих от параметра δ, изменяющегося на некотором множестве $E_\Lambda \subseteq R$, содержащем по крайней мере одну предельную точку. Пусть $\lambda_\delta(0) = 1$, $\delta \in E_\Lambda$. С помощью множества Λ каждой функции $f \in L$ поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ \delta \in E_\Lambda. \tag{1}$$

Пусть множество Λ таково, что ряд (1) при каждом $\delta \in E_\Lambda$ является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, которую обозначим $U_\delta(f; x; \Lambda)$. В этом случае говорят, что множество Λ определяет конкретный метод (Λ-метод) суммирования рядов Фурье [1, с. 36].

Если множество $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ таково, что

$$\lambda_\delta(k) = \lambda_\delta(k; n) = e^{-\frac{k}{\delta}} \times \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^i Q(i; k),\ \ Q(i; k) = \frac{k(k+2)(k+4)...(k+2i-2)}{i!2^i},$$

$k = 0, 1, ..., (Q(k; 0) = 1)$, то, очевидно,

$$U_\delta(f; x; \Lambda) = P_{n,\delta}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k; n)(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{2}$$

Из принятой терминологии такую функцию называют полигармоническим интегралом Пуассона функции f [2, с. 248].

Изучение свойств полигармонических функций имеет широкое применение в задачах механики. Так в [3] дается метод сведения краевых задач для полигармонических функций к системе интегральных уравнений на границе двумерной области и предлагается численный алгоритм компьютерного моделирования решений этой системы. Особое внимание уделено численному решению основной задачи, когда заданы значения функции и ее производных. Отметим, что в [4, 5] для изучения динамических систем, включающих, в частности, процессы с дробными производными различных типов, в качестве математической основы используются идеи метода разрешающих функций.

При $n = 1, 2, 3$ из формулы (2) имеем

$$P_{1,\delta}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$P_{2,\delta}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$P_{3,\delta}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k; 3)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$\lambda_{\delta}(k;3)=\left(1+\frac{1}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})k+\frac{1}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2k^2\right)e^{-\frac{k}{\delta}}.$$

Тогда функции $P_{1,\delta}(f;x)$, $P_{2,\delta}(f;x)$, $P_{3,\delta}(f;x)$ называют соответственно интегралом Пуассона [6], бигармоническим интегралом Пуассона [7] и тригармоническим интегралом Пуассона функции f.

Далее рассмотрим класс Гельдера (или Липшица) (см. [1, с. 120]) функций $f\in\tilde{N}$, которые удовлетворяют условию

$$|f(x+h)-f(x)|\le|h|^{\alpha},\quad 0<\alpha\le 1,\ 0\le h\le 2\pi,\ x\in R.$$

В данной работе изучается асимптотическое поведение величин при $\delta\to\infty$

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};P_{3,\delta})_C=\sup_{f\in H^{\alpha}}\left\|f(x)-P_{3,\delta}(f;\cdot)\right\|_{\tilde{N}}.$$

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\delta)=\varphi(H^{\alpha};\delta)$, такая, что при $\delta\to\infty$ $\mathcal{E}(H^{\alpha};P_{3,\delta})_C=\varphi(\delta)+o(\varphi(\delta))$, то, следуя из [1, с. 198], будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для класса Гельдера H^{α} и тригармонического интеграла Пуассона в равномерной метрике.

2. Приближение функций класса Гельдера тригармоническими интегралами Пуассона

В работе [8] положено начало исследованиям по решению задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона на классах периодических функций. Позже эти исследования были продолжены в работах [9–12]. Решению аналогичной задачи для бигармонических интегралов Пуассона посвящены работы [13–17].

Заметим также, что исследование аппроксимативных свойств интегралов Пуассона на различных функциональных классах в определенных функциональных пространствах осуществлялось в работах [18–20]. Изучению аппроксимативных свойств бигармонических интегралов Пуассона посвящены работы [21–24].

Что же касается изучения аппроксимативных свойств тригармонических интегралов Пуассона на классах периодических функций с точки зрения задачи Колмогорова–Никольского, то здесь, пожалуй, известны только результаты из [25, 26]. Решение же аналогичной задачи на классах Гельдера H^{α} для произвольных α, $0<\alpha<1$, пока не найдено. Именно поэтому исследование данного вопроса является актуальным.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Если $0<\alpha<1$, то при $\delta\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};P_{3,\delta})_C=\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2}\sec\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\delta^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Для тригармонического интеграла Пуассона аналогично формуле (6) из [27] определим функцию

$$\tau(u)=\begin{cases}(1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u})\delta^r, & 0\le u\le\dfrac{1}{\delta},\\ (1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u})u^{-r}, & u\ge\dfrac{1}{\delta},\end{cases}$$

где $\gamma = \frac{1}{4}\left(3 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\delta,\ \ \theta = \frac{1}{8}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2 \delta^2,\ \ \delta > 0.$

Далее, как и при доказательстве сходимости интеграла (7) из [28], покажем, что преобразование Фурье функции $\tau(u)$ для тригармонического интеграла Пуассона, а именно $\hat{\tau}_\beta(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du,$ суммируется на всей действительной оси.

Согласно теореме 2 из [29], если интегралы

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|\, d\lambda'(u)\,\right|,\ \ \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |\,u-1\,|^{1-\alpha}\left|\, d\lambda'(u)\,\right|,\ \ \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|\, d\lambda'(u)\,\right|, \tag{4}$$

$$A(\alpha,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,t\,|^{\alpha}\left|\int\limits_0^\infty \lambda(u)\cos ut du\right| dt \tag{5}$$

сходятся, то для $0 < \alpha < 1$ при $\delta \to \infty$ имеет место равенство

$$\mathcal{E}(H^{\alpha}; P_3\ (\delta))_C = \frac{1}{\delta^{\alpha}} A(\alpha,\lambda) + O\left(\frac{1}{\delta^{\alpha}} a(\alpha,\lambda)\right), \tag{6}$$

где $\lambda(u) = (1 + \gamma u + \theta u^2)e^{-u}$,

$$a(\alpha,\lambda) = \int\limits_{|t| \ge \frac{\delta\pi}{2}} |\,t\,|^{\alpha}\left|\int\limits_0^\infty \lambda(u)\cos ut du\right| dt. \tag{7}$$

Докажем сходимость интегралов (4). Так как в силу определения функции $\lambda(u)$ справедливо равенство

$$\left|\, d\lambda'(u)\,\right| = e^{-u}((1 - 2\gamma + 2\theta) + u(\gamma - 4\theta) + \theta u^2)\,du$$

и функция $\lambda(u)$ выпукла при $u \ge 0$, то

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|\, d\lambda'(u)\,\right| = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}e^{-u}((2\gamma - 2\theta - 1) + u(4\theta - \gamma) - \theta u^2)\,du.$$

Далее, применяя неравенство (31) из [25], следуя которому $(2\gamma - 2\theta - 1) +$ $+\, u(4\theta - \gamma) - \theta u^2 \le 8,$ приходим к оценке

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|\, d\lambda'(u)\,\right| \le 8\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}e^{-u}du \le K_1. \tag{8}$$

Оценим следующих два интеграла из (4). Отметим, что

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |\,u-1\,|^{1-\alpha}\left|\, d\lambda'(u)\,\right| \le 2^{\alpha}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} u\left|\, d\lambda'(u)\right|,\ \ \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|\, d\lambda'(u)\,\right| \le \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\left|\, d\lambda'(u)\right|. \tag{9}$$

Повторяя рассуждения, примененные при исследовании интеграла (23) из [30], получаем

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\left|d\lambda'(u)\right| \le 8\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} ue^{-u}du \le K_2. \qquad (10)$$

Неравенства (8)–(10) доказывают сходимость интегралов (4) .

Докажем сходимость интеграла (5), т.е.

$$A(\alpha,\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha}\left|\int_0^{\infty}\left(1+\frac{\delta}{4}\left(3-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)u+\frac{\delta^2}{8}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2 u^2\right)e^{-u}\cos utdu\right|dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha}\left|\int_0^{\infty} e^{-u}\cos utdu+\frac{\delta}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\int_0^{\infty} ue^{-u}\cos utdu+\frac{\delta^2}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\infty} u^2e^{-u}\cos utdu\right|dt. \qquad (11)$$

С помощью формул 3.893.2 и 3.944.6 из [31] находим, что

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\cos utdu=\frac{1}{1+t^2}; \qquad (12)$$

$$\int_0^{\infty} ue^{-u}\cos utdu=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}. \qquad (13)$$

Для оценки третьего интеграла из правой части равенства (11) применим последовательно формулы 3.944.6, 1.624.8, 1.626.2 и 1.624.4 из [31]. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} u^2e^{-u}\cos utdu=\frac{\Gamma(3)}{(t^2+1)^{3/2}}\cos(3\operatorname{arctg} t)=\frac{2}{(t^2+1)^{3/2}}\cos\left(3\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{(t^2+1)^{3/2}}\left(\cos\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)-\sin\left(2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right)=\frac{2}{(t^2+1)^{3/2}}\left(\cos\left(\arccos\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\right.$$

$$\left.-\sin\left(\arccos\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right)=\frac{2}{(t^2+1)^{3/2}}\left(\frac{1-t^2}{(1+t^2)^{3/2}}-\right.$$

$$\left.-\sin\left(\arcsin\sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}\right)\sin\left(\arcsin\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}\right)\right)=\frac{2}{(t^2+1)^{3/2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1-t^2}{(1+t^2)^{3/2}}-\frac{2t^2}{(1+t^2)^{3/2}}\right)=\frac{2-6t^2}{(t^2+1)^3}. \qquad (14)$$

Далее, применяя формулы 3.241.2 и 3.241.5 из [31], получаем равенства

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha}}{1+t^2}dt=\sec\frac{\alpha\pi}{2}, \qquad (15)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t^2)^2}dt-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{\alpha+2}}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=\frac{(\alpha-1)}{2}\operatorname{cosec}\frac{(\alpha-1)\pi}{2}-\frac{(\alpha+1)}{2}\operatorname{cosec}\frac{(\alpha+1)\pi}{2}=-\alpha\sec\frac{\alpha\pi}{2}. \qquad (16)$$

Учитывая последовательно формулы 3.241.4, 8.331 и 8.334.3 из [31], получаем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha(2-6t^2)}{(1+t^2)^3}dt=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t^2)^3}dt-\frac{12}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^{\alpha+2}}{(1+t^2)^3}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\,\Gamma(3-\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(3)}-\frac{6}{\pi}\frac{\Gamma(\frac{\alpha+3}{2})\Gamma(3-\frac{\alpha+3}{2})}{\Gamma(3)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}(2-\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(2-\frac{\alpha+1}{2})-\frac{3}{\pi}(2-\frac{\alpha+3}{2})\Gamma(\frac{\alpha+3}{2})\Gamma(2-\frac{\alpha+3}{2})=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{3-\alpha}{2}\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(1-\frac{\alpha+1}{2})-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{-1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\Gamma(\frac{\alpha+3}{2})\Gamma(1-\frac{\alpha+3}{2})=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi(\alpha+1)}{2}}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{3-\alpha}{2}-\frac{3}{\sin\frac{\pi(\alpha+3)}{2}}\cdot\frac{-1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}=$$

$$=\frac{1-\alpha}{2}\cdot\frac{3-\alpha}{2}\sec\frac{\alpha\pi}{2}-3\cdot\frac{-1-\alpha}{2}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\sec\frac{\alpha\pi}{2}=-\alpha(1-\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}. \qquad (17)$$

Из (11)–(17) следует оценка

$$A(\alpha,\lambda)=\sec\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\delta}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\left(-\alpha\sec\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\frac{\delta^2}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2\times$$

$$\times(-\alpha)(1-\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}=\frac{1}{2}(1-\alpha)(2-\alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \qquad (18)$$

Таким образом, доказана сходимость интеграла (5) и соответственно справедливость равенства (6).

Перейдем теперь к оценке интеграла (7). В силу представления $\lambda(u)$ и формул (12)–(14) вытекает, что

$$a(\alpha,\lambda)=2\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^\alpha\left|\int_0^\infty\left(1+\frac{\delta}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})u+\frac{\delta^2}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2u^2\right)e^{-u}\cos ut\,du\right|dt=$$

$$=2\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^\alpha\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{\delta}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}+\frac{\delta^2}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2\frac{2-6t^2}{(1+t^2)^3}\right)dt. \qquad (19)$$

Так как

$$\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty \frac{t^\alpha dt}{1+t^2}\le\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty t^{\alpha-2}dt=\frac{K_1}{\delta^{1-\alpha}},\quad \int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty \frac{t^\alpha(1-t^2)dt}{(1+t^2)^2}\le\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty \frac{t^\alpha dt}{1+t^2}\le\frac{K_2}{\delta^{1-\alpha}},$$

$$\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty \frac{t^\alpha(2-6t^2)dt}{(t^2+1)^3}\le\int_{\frac{\delta\pi}{2}}^\infty \frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)^2}\le\frac{K_3}{\delta^{3-\alpha}},$$

из (19) получаем, что

$$a(\alpha, \lambda) = O\left(\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}\right). \quad (20)$$

Из равенства (6) и оценок (18) и (20) следует справедливость (3).
Теорема доказана.

Заключение

Исходная информация для планирования, проектирования и управления в экономике, технике и военном деле, как правило, недостаточно полна или достоверна. В этом случае задача приближения может рассматриваться как вспомогательная в процедуре принятия решений, поскольку ее решение связано с обработкой и аппроксимацией накопленной статистической информации. В работе проведено исследование вопросов о приближении функций классов Гельдера H^{α}, $0 < \alpha < 1$, с помощью тригармонических интегралов Пуассона $P_{3,\delta}$ в равномерной метрике.

У.З. Грабова

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ТРИГАРМОНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА НА КЛАСАХ ГЕЛЬДЕРА

Знайдено розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для тригармонійних інтегралів Пуассона на классах Гельдера H^{α} для $\forall\alpha \in (0,1)$ в рівномірній метриці. Нові постановки задачі апроксимації як допоміжної задачі прийняття рішень дозволяють одержувати більш адекватні знання розвитку ситуації, для описування якої використано дану математичну модель. Запропонований підхід дозволить будувати реальні моделі функціонування різноманітних систем (економічних, екологічних, соціальних) в умовах обмеженої і неповної інформації, а відповідно, приймати ефективні рішення на основі існуючої статистичної інформації.

U.Z. Hrabova

APPROXIMATIVE PROPERTIES OF THE THREEHARMONIC POISSON INTEGRALS ON THE HÖLDER CLASSES

A solution of the Kolmogorov–Nikolsky problem for the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes H^{α} for $\forall\alpha \in (0,1)$ in uniform metric is found. New statements of the approximation problem, as an auxiliary problem of decision making, allow to obtain more adequate knowledge about the development of the situation, for the description of which this mathematical model was used. The proposed approach will allow building real models of the functioning of various systems (economic, ecological, social) in the conditions of limited and incomplete information, and consequently, make effective decisions based on available statistical information

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближения: в 2-х ч. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
2. *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Киев: Наук. думка, 2009. — 376 с.
3. *Казакова А.О., Терентьев А.Г.* Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — **52**, № 11. — С. 2050–2059.
4. *Чикрий А.А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. — 2010. — **271**. — С. 76–92.
5. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 3. — С. 3–32.

6. *KharkevychYu.I., Stepanyuk T.A.* Approximation properties of Poisson integrals for the classes $\tilde{N}_{\beta}^{\psi}H^{\alpha}$ // Mathematical Notes. — 2014. — **96**, N 5. — P. 1008–1019.
7. *Kal'chuk I.V., KharkevychYu.I.* Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$ // Ukrainian Math. J. — 2017. — **68**, N 11. — P. 1727–1740.
8. *Натансон И.П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **72**, № 1. — С. 11–14.
9. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals // Ukrainian Math. J. — 2004. — **56**, N 9. — P. 1509–1525.
10. *KharkevychYu.I., ZhyhalloT.V.* Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators // Ibid. — 2005. — **57**, N 8. — P. 1297–1315.
11. *Zhyhallo T.V., KharkevychYu.I.* Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric // Ibid.– 2009. — **61**, N 11. — P. 1757–1779.
12. *Zhyhallo T.V., KharkevychYu.I.* Approximation of functions from the class $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson integrals in the uniform metric // Ibid. — 2009. — **61**, N 12. — P. 1893–1914.
13. *Hembars'ka S.B., Zhyhallo K.M.* Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Holder classes // Ibid. — 2017. — **69**, N 7. — P. 1075–1084.
14. *Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I.* Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2012. — **63**, N 12. — P. 1820–1844.
15. *KharkevychYu.I., Kal'chuk I.V.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2007. — **59**, N 8. — P. 1224–1237.
16. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of function from class $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric // Ibid. — 2008. — **60**, N 5. — P. 769–798.
17. *Zhyhallo T.V., KharkevychYu.I.* Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the clasess $\hat{L}_{\beta,1}^{\psi}$ // Ibid. — 2017. — **69**, N 5. — P. 757–765.
18. *Stark E.L.* The complete asymptotic expansion for the measure of approximation of Abel–Poisson's singular integral for $\mathrm{Lip}\,1$ // Ibid. — 1973. — **13**, № 1. — P. 14–18.
19. *Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I.* Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals // Ibid. — 2002. — **54**, N 1. — P. 51–63.
20. *Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals // Ibid. — 2009. — **61**, N 1. — P. 86–98.
21. *Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I.* Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2002. — **54**, N 9. — P. 1462–1470.
22. *Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2009. — **61**, N 3. — P. 399–413.
23. *Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I.* Approximation of functions from the classes $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2011. — **63**, N 7. — P. 1083–1107.
24. *Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I.* On the approximation of functions of the Holder class by biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2000. — **52**, N 7. — P. 1113–1117.
25. *Hrabova U.Z.* Uniform approximations of functions of Lipschitz class by treeharmonic Poisson integrals // Journal of Automation and Information Sciences. — 2017. — **49**, N 12. — C. 57–70.
26. *Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I.* On the approximation of functions of the Holder class by triharmonic Poisson integrals // Ukrainian Math. J. — 2001. — 5**3**, N 6. — P. 1012–1018.
27. *KharkevychYu.I., Kal'chuk I.V.* Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals // Ibid. — 2007. — 5**9**, N 7. — P. 1059–1087.
28. *Kal'chuk I.V.* Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axix by Weierstrass operators // Ibid. — 2007. — 5**9**, N 9. — P. 1342–1363.
29. *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. II // Изв. вузов. — 1966. — **55**, № 6. — С. 3–17.
30. *Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A.* Approximation of functions from the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$ by Weierstrass integrals // Ukrainian Math. J. — 2017. — 6**9**, N 4. — P. 598–608.
31. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.

Получено 28.03.2018