УДК 517.5

Ю.И. Харкевич

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕРХНИХ ГРАНЕЙ ОТКЛОНЕНИЙ ФУНКЦИЙ КЛАССА W^r ОТ ИХ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА

Введение

Теория конфликтно-управляемых процессов — новый раздел математической теории оптимальных процессов, который связан с исследованием управляемых систем, функционирующих в условиях конфликта и неопределенности. Толчком к ее развитию послужили реальные прикладные задачи, имеющие важное практическое применение для проектирования ракетной и космической техники, моделирования взаимодействия управляемых подвижных объектов и в других областях человеческой деятельности. Теория конфликтно-управляемых процессов основана на общей теории игр, математической теории управления и теории дифференциальных уравнений. Становление конфликтно-управляемых процессов связано с именами Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Б.Н. Пшеничного, Р. Айзекса, А. Брайсона, А.А. Чикрия, А.Г. Ченцова и других математиков.

Математическим базисом для исследования и оптимизации конфликтно-управляемых процессов являются методы нелинейного и выпуклого анализа, теории многозначных отображений и математической теории управления.

На сегодняшний день актуально получение полной асимптотики функции, что позволяет изучать процессы, проходящие в реальном мире, с помощью математической модели, сводя задачу к изучению более простых объектов, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны.

Невзирая на широкий спектр математических исследований конфликтно-управляемых процессов, остается ряд важных проблем, требующих дополнительного рассмотрения.

Особый интерес представляют задачи, связанные с аппроксимацией функций обобщенными интегралами Пуассона, которые можно использовать как средство решения сложных уравнений, описывающих динамические процессы.

1. Постановка задачи

Задача оптимизации функций тесно примыкает к задачам, связанным с изучением оптимальных процессов в теории управления. Для этой цели вводятся новые методы аппроксимации функций. Использование идей и методов аппроксимации способствует ее проникновению в самые различные области прикладных направлений.

Теория приближения функций имеет важное значение, поскольку дает общие основания для практического вычисления функций, для приближенной замены сложных функций функциями более простыми.

Исходным объектом для исследования в данной работе является изучение асимптотического поведения величин приближения функций класса W^r их обобщенными интегралами Пуассона.

 ISSN 0572-2691

Следует отметить, что применение метода разрешающих функций [1, 2] позволяет использовать технику многозначных отображений для обоснования игровых конструкций.

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть C — пространство 2π-периодических непрерывных функций, в котором норма задается равенством $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Обобщенный интеграл Пуассона [3] функции f обозначим $P_{s,q}(\rho; f; x)$:

$$P_{s,q}(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) K_{s,q}(\rho; t)dt, \; 0 \le \rho < 1, \tag{1}$$

где $K_{s,q}(\rho; t)$ — ядро обобщенного интеграла Пуассона вида

$$K_{s,q}(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k \cos kt, \; 0 \le s \le \frac{1}{2}, \; q \ge 1. \tag{2}$$

Сразу же отметим, что в случае $s = 0$ из (1) и (2) получим (см., например, [4, 5]) интеграл Абеля–Пуассона

$$A(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right)dt, \;\; 0 \le \rho < 1.$$

Если же в (1) и (2) положить $s = \frac{1}{2}$, $q = 1$, то получим (см., например, [6, 7]) так называемый бигармонический интеграл Пуассона:

$$B(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k \cos kt\right)dt, \;\; 0 \le \rho < 1.$$

Пусть W^r, $r \in \mathrm{N}$, — множество 2π-периодических функций, имеющих абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и почти всюду $\left|f^{(r)}(t)\right| \le 1.$

Обозначим

$$\mathcal{E}(\mathcal{N}; P_{s,q}(\rho))_C = \sup_{f \in \mathcal{N}} \left\| f(\cdot) - P_{s,q}(\rho; f; \cdot)\right\|_C. \tag{3}$$

Если в явном виде найдена функция $g(\rho) = g(\mathcal{N}; \rho)$ такая, что при $\rho \to 1-$

$$\mathcal{E}(\mathcal{N}; P_{s,q}(\rho))_X = g(1-\rho) + o(g(1-\rho)),$$

то, следуя А.И. Степанцу [8, с. 198], будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для данного класса $\mathcal{N}$ и обобщенного интеграла Пуассона $P_{s,q}(\rho; f; x)$ в метрике пространства *X*.

Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(1-\rho)$ будем называть полным асимптотическим разложением или полной асимптотикой функции $f(\rho)$ при $\rho \to 1-$ (см., например, [9]), если для всех $n \in \mathrm{N}$ $|g_{n+1}(1-\rho)| = o(|g_n(1-\rho)|)$ и при каждом $m \in \mathrm{N}$ $f(\rho) = \sum_{n=0}^{m} g_n(1-\rho) + o(g_m(1-\rho)), \rho \to 1-.$

Кратко это запишем следующим образом: $f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(1-\rho).$

Аппроксимативные свойства как интегралов Абеля–Пуассона, так и бигармонических интегралов Пуассона достаточно хорошо изучены в работах [10–24] соответственно.

Цель данной публикации — получение полных асимптотических разложений величины (3) при $\mathfrak{N} = W^r$ по степеням $1-\rho$, $\rho \to 1-$ при любых $r \in \mathrm{N}$.

2. Асимптотические разложения для верхних граней отклонений обобщенных интегралов Пуассона от функций класса W^r

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Для класса W^1 при $\rho \to 1-$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\mathcal{E}(W^1; P_{s,q}(\rho))_C \cong \frac{2s}{\pi}(1-\rho)^q\left(\ln\frac{1}{4} + (1+\ln 2)(1-\rho) + (1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho} + \ln(1-\rho)^2\right) -$$

$$-\frac{2s}{\pi}(1-\rho)^q\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho} + \gamma_k(1-\rho)^k\right), \tag{4}$$

где

$$\gamma_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-j}}{j}\right), \; k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $K_{s,q}(\rho; t) > 0$ и $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{s,q}(\rho; t)dt = 1.$

Учитывая (1) и предыдущее равенство, запишем

$$f(x) - P_{s,q}(\rho; f; x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x+t))\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k)\cos kt dt. \tag{6}$$

Очевидно [8, с. 120], что когда $f \in W^1$, то $|f(t_1) - f(t_2)| \le |t_1 - t_2|$. Тогда из (3) и (6) имеем

$$\mathcal{E}(W^1; P_{s,q}(\rho))_C \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|K_{s,q}(\rho; t)dt. \tag{7}$$

С другой стороны, поскольку функция $f(t) = |t|, t \in [-\pi, \pi]$, принадлежит классу W^1, то из (3) следует

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|K_{s,q}(\rho; t)dt. \tag{8}$$

В итоге из (7) и (8) находим

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|K_{s,q}(\rho; t)dt. \tag{9}$$

Подставляя (2) в (9) и учитывая четность по параметру t ядра $K_{s,q}(\rho, t)$, получаем

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k \cos kt\right)dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right)dt + \frac{2s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q \int_0^{\pi} t\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k \cos kt\right)dt. \qquad (10)$$

Первый интеграл из (10) согласно [10] можем записать

$$\int_0^{\pi} t\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kt\right)dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}(1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k\right), \rho \to 1-, \qquad (11)$$

где γ_k определены равенством (5).

Используя формулу 1.513.1 из [25], второй интеграл из (10) представим в виде

$$\int_0^{\pi} t\left(\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k \cos kt\right)dt = -2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho^{2j-1}}{2j-1} = \ln\frac{1-\rho}{1+\rho}. \qquad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (10), имеем

$$\mathcal{E}(W^1; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{2s}{\pi}(1-\rho)^q(2\ln(1-\rho) - (1-\rho)\ln(1-\rho) - (1+\rho)\ln(1+\rho)) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}(1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k\right), \rho \to 1-. \qquad (13)$$

Разлагая функцию $g(\rho) = -(1+\rho)\ln(1+\rho)$ в ряд Тейлора по степеням $(1-\rho)$

$$-(1+\rho)\ln(1+\rho) = -2\ln 2 + (1+\ln 2)(1-\rho) - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-\rho)^k}{k(k-1)2^{k-1}}$$

и делая тождественные преобразования в (13), получаем (4).

Теорема доказана.

Теорема 2. Если $r = 2l+1, l \in \mathrm{N}$, то при $\rho \to 1-$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C \cong \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^r (1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^r (1-\rho)^k) +$$

$$+\frac{2s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{r-1}(1-\rho)^k \ln\frac{1}{1-\rho} + \beta_k^{r-1}(1-\rho)^k) - s(1+\rho)(1-\rho)^q \tilde{K}_{r-1}, \qquad (14)$$

где коэффициенты α_k^r и β_k^r заданы формулами

$$\alpha_k^r = \frac{(-1)^k}{k!}a_r^k,\ \beta_k^r = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\sum_{i=1}^{r-1}\varphi_{r-i}(0)a_i^k + a_r^k\left(\ln 2 + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right) + S_k^r\right),$$

$$\varphi_j(0)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}K_j, & j=2l-1,\\ \frac{\pi}{2}\tilde{K}_j, & j=2l,\end{cases}\quad l\in\mathrm{N},$$

$$S_k^r=\begin{cases}0, & k\le r,\\ \sum\limits_{i=r+1}^{k}\frac{a_i^k}{2^{i-r}}+\sum\limits_{i=1}^{k-r}A_i^{k-1}a_r^{k-i}, & k>r,\end{cases}$$

$$a_i^j=\begin{cases}0, & i>j,\\ (-1)^j(j-1)!, & i=1,\\ a_{i-1}^{j-1}-a_i^{j-1}(j-1), & i\le j\le r,\\ a_{i-1}^{j-1}-a_i^{j-1}(j-2), & r+1=i\le j,\\ -(i-r-1)a_{i-1}^{j-1}-a_i^{j-1}(j-i+r-1), & r+1<i\le j,\end{cases}$$

$$A_k^r=(-1)^{k-1}\frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k},$$

а K_n и $\tilde{K}_n$ — известные константы Ахиезера–Крейна–Фавара:

$$K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\dots,$$

$$\tilde{K}_n=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}},\quad n\in\mathrm{N}.$$

Доказательство. Учитывая (1) и разложение функции f в ряд Фурье, имеем

$$f(x)-P_{s,q}(\rho;f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k)\cos ktdt.$$

После r-кратного интегрирования по частям правой части последнего равенства получаем

$$f(x)-P_{s,q}(\rho;f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right)dt.$$

Тогда согласно (3)

$$\mathcal{E}(W^r;P_{s,q}(\rho))_C=\frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^r}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(t)F_{r,\rho}(t)dt\right|,$$

где

$$F_{r,\rho}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k}{k^r}\cos\left(kt+\frac{r\pi}{2}\right).$$

Так как $f\in W^r$ и $F_{r,\rho}(t)$ нечетная при $r=2l+1,\ l\in\mathrm{N},$ то

$$\mathcal{E}(W^r;P_{s,q}(\rho))_C\le\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|F_{r,\rho}(t)|\,dt.$$

 ISSN 0572-2691

С другой стороны, если $\operatorname{sign} F_{r,\rho}(t) = \pm \operatorname{sign}\sin t$, то функция $f(t)$, для которой $f^{(r)}(t) = \operatorname{sign} F_{r,\rho}(t), t \in [-\pi, \pi]$, непрерывно и периодически продолжается на R и принадлежит классу W^r [26, с. 104–106], а значит, $\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C \ge \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi |F_{r,\rho}(t)|\,dt,$ и таким образом,

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi |F_{r,\rho}(t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\left|\int\limits_0^\pi F_{r,\rho}(t)dt\right|. \tag{15}$$

Покажем выполнение равенства $\operatorname{sign} F_{r,\rho}(t) = \pm \operatorname{sign}\sin t$ на $[0, \pi]$.

Легко видеть, что $F_{r,\rho}(0) = F_{r,\rho}(\pi) = 0.$ А значит, в предположении, что $F_{r,\rho}(t) = 0$ при некотором $t_0 \in (0,\pi)$ согласно теореме Ролля существуют $t_0^1 \in (0,\pi), t_0^2 \in (0,\pi)$ такие, что $F'_{r,\rho}(t_0^1) = F'_{r,\rho}(t_0^2) = 0$ или, что то же самое, $F_{r-1,\rho}(t_0^1) = F_{r-1,\rho}(t_0^2) = 0$ и как следствие существует $t_1 \in (t_0^1, t_0^2)$ такое, что $F'_{r-1,\rho}(t_1) = 0$ или $F_{r-2,\rho}(t_1) = 0.$ Аналогично предыдущему найдутся $t_1^1 \in (0, t_1),\ t_1^2 \in (t_1, \pi)$ такие, что $F_{r-3,\rho}(t_1^1) = F_{r-3,\rho}(t_1^2) = 0,$ и, очевидно, существует $t_2 \in (t_1^1, t_1^2)$, для которого $F_{r-4,\rho}(t_2) = 0.$

Повторяя предыдущую процедуру, находим, что для функции

$$F_{1,\rho}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k}{k}\sin kt$$

существует $t_1 \in (0,\pi)$ такое, что $F_{1,\rho}(t_1) = 0,$ но это противоречит тому, что

$$F_{1,\rho}(t) > 0,\ t \in (0,\pi).$$

Справедливость последнего неравенства получаем из следующих рассуждений. Представим функцию $F_{1,\rho}(t)$ в виде

$$F_{1,\rho}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k}{k}\sin kt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k \sin kt}{k} - sk(1+\rho)(1-\rho)^q \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \sin kt =$$

$$= \frac{\pi - t}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho\sin t}{1-\rho\cos t}\right) - sk(1+\rho)(1-\rho)^q\,\frac{\rho \sin t}{1-2\rho\cos t+\rho^2},$$

$$0 \le \rho < 1,\ 0 < t < \pi,\ 0 \le s \le \frac{1}{2},\ q \ge 1.$$

Тогда

$$F'_{1,\rho}(t) = -\frac{1}{2} - \frac{\rho\cos t - \rho^2}{1-2\rho\cos t + \rho^2} - s(1+\rho)(1-\rho)^q \frac{\rho\cos t + \rho^3\cos t - 2\rho^2}{(1-2\rho\cos t + \rho^2)^2} =$$

$$= -\frac{(1-\rho^2)\eta(t)}{2(1-2\rho\cos t + \rho^2)^2}, \qquad (16)$$

где $\eta(t) := 1 - 2\rho\cos t + \rho^2 + s\rho(1-\rho)^{q-1}((1+\rho^2)\cos t - 2\rho)$.

Для функции $\eta(t)$ при $0 \le \rho < 1, 0 < t < \pi, 0 \le s \le \frac{1}{2}, q \ge 1$, имеем:

$$\eta(0) = (1-\rho^2)(1 + s\rho(1-\rho)^{q-1}) > 0, \qquad (17)$$

$$\eta(\pi) = (1+\rho^2)(1 - s\rho(1-\rho)^{q-1}) > 0, \qquad (18)$$

$$\eta'(t) = \rho\sin t(2 - s(1+\rho^2)(1-\rho)^q) > 0. \qquad (19)$$

Из (17)–(19) следует, что $\eta(t) > 0$. В результате из (16) получаем, что $F'_{1,\rho}(t) < 0$. Учитывая при этом равенства $\lim\limits_{t\to 0+} F_{1,\rho}(t) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{t\to\pi-} F_{1,\rho}(t) = 0$, заключаем, что $F_{1,\rho}(t) > 0$. Тогда из соотношения (15) можем записать

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - (1 + s(2k+1)(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} + \frac{4s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^r} - \frac{4s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^r}.$$

Согласно [27]

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} = \int_\rho^1\int_0^{t_n}\ldots\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1\ldots t_n}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}dt_1\ldots dt_n =: \varphi_r(\rho), \ r \in N,$$

имеем

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{2}{\pi}\varphi_r(\rho) + \frac{2s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q\varphi_{r-1}(\rho) - s(1+\rho)(1-\rho)^q\widetilde{K}_{r-1}.$$

Учитывая асимптотические разложения функций $\varphi_r(\rho)$ [28], получаем (14). Теорема доказана.

Теорема 3. Если $r = 2l, l \in \mathrm{N}$, то при $\rho \to 1-$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C \cong \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^r(1-\rho)^k +$$

$$+\frac{4s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^{r-1}(1-\rho)^k - s(1+\rho)(1-\rho)^q\widetilde{K}_{r-1}, \qquad (20)$$

где коэффициенты γ_k^r заданы формулами:

 ISSN 0572-2691

$$\gamma_k^r = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\sum_{i=1}^{r}\psi_{r-i}(0)b_i^k + \sigma_k^r\right),$$

$$\psi_j(0) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}K_j, \ j = 2l, \\ \dfrac{\pi}{4}\tilde{K}_j, \ j = 2l-1, \end{cases} \quad l \in \mathrm{N},$$

$$\sigma_k^r = \begin{cases} 0, & k \le r, \\ \displaystyle\sum_{i=r+1}^{k}\frac{b_i^k}{2^{i-r}}, & k > r, \end{cases}$$

$$b_i^j = \begin{cases} 0, & i > j, \\ (-1)^j (j-1)!, & i = 1, \\ b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-1), & i \le j \le r, \\ b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-2), & r+1 = i \le j, \\ -2(i-r-1)b_{i-1}^{j-1} - b_i^{j-1}(j-2i+2r), & r+1 < i \le j. \end{cases}$$

Доказательство. Аналогично предыдущему покажем, что

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C =$$
$$= \frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^r}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)F_{r,\rho}(t)dt\right| = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^r}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\left(F_{r,\rho}(t) - F_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)dt\right|.$$

Поскольку $f \in W^r$ и $F_{r,\rho}(t)$ — четная функция при $r = 2l, l \in \mathrm{N}$, то

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|F_{r,\rho}(t) - F_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|dt.$$

Если $\operatorname{sign}\left(F_{r,\rho}(t) - F_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pm\operatorname{sign}\cos t$, то функция $f(t)$, для которой справедливо $f^{(r)}(t) = \operatorname{sign}\left(F_{r,\rho}(t) - F_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, непрерывно и периодически продолжается на R и принадлежит классу W^r [26, с. 104–106]. Отсюда следует

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C \ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|F_{r,\rho}(t) - F_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|dt.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|F_{r,\rho}(t) - F_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(F_{r,\rho}(t) - F_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(F_{r,\rho}(t) - F_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) dt \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(F_{r,\,\rho}(t) - F_{r,\,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) dt - \int\limits_0^{\pi} \left(F_{r,\,\rho}(\pi - t) - F_{r,\,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) dt \right| =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left| \int\limits_0^{\pi} \left(F_{r,\,\rho}(t) - F_{r,\,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) dt \right|. \qquad (21)$$

Покажем теперь выполнение равенства $\operatorname{sign}\left(F_{r,\,\rho}(t) - F_{r,\,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pm \operatorname{sign}\cos t.$

Предположим, что при некотором $t_0 \in (0,\,\pi),\, t_0 \neq \frac{\pi}{2}$

$$F_{r,\,\rho}(t) - F_{r,\,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \qquad (22)$$

Тогда согласно теореме Ролля существует $t_1 \in (0,\,\pi)$ такое, что $F'_{r,\,\rho}(t_1) = 0$ или, что то же самое, $F_{r-1,\,\rho}(t_1) = 0.$ Но это противоречит тому, что $\operatorname{sign} F_{r-1,\,\rho}(t) = \pm \operatorname{sign}\sin t.$ Значит, $t = \frac{\pi}{2}$ — единственное решение уравнения (22) и поскольку $\operatorname{sign} F'_{r,\,\rho}(t) = \pm \operatorname{sign}\sin t,$ то функция $F_{r,\,\rho}(t) - F_{r,\,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ монотонная на $(0,\,\pi).$

Итак, из (21) получаем

$$\mathcal{E}(W^r;\, P_{s,\,q}(\rho))_C = \frac{4}{\pi}\left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(1+sk(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^k}{k^r} \cos kt dt \right| =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-(1+s(2k+1)(1+\rho)(1-\rho)^q)\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} +$$

$$+ \frac{4s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^r} - \frac{4s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^r}.$$

Согласно [27]

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1-\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} = \int\limits_{\rho}^{1}\int\limits_0^{t_n}\ldots\int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1 \ldots t_n} \ln\frac{1+t_1}{1-t_1} dt_1 \ldots dt_n := \psi_r(\rho),\;\; r \in \mathrm{N},$$

имеем

$$\mathcal{E}(W^r; P_{s,q}(\rho))_C = \frac{4}{\pi}\psi_r(\rho) + \frac{4s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q \psi_{r-1}(\rho) - \frac{4s}{\pi}(1+\rho)(1-\rho)^q \tilde{K}_{r-1}.$$

Учитывая асимптотические разложения функции $\psi_r(\rho)$ из [28], получаем (20).

Теорема доказана.

Заключение

В настоящей работе найдены полные асимптотические разложения верхних граней отклонений обобщенными интегралами Пуассона $P_{s,q}(\rho; f; x)$ на классе W^r в равномерной метрике. Полученные результаты могут использоваться при дальнейшем исследовании задач конфликтного управления и развитии теории дифференциальных игр в динамических системах.

Ю.І. Харкевич

АСИМПТОТИЧНІ РОЗКЛАДИ ВЕРХНІХ ГРАНЕЙ ВІДХИЛЕНЬ ФУНКЦІЙ КЛАСУ W^r ВІД ЇХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА

Запропоновано методи оптимізації функцій, що сприяють виявленню глибоких зв'язків між далекими, на перший погляд, математичними моделями і конфліктно-керованими процесами. Знайдено повні асимптотичні розклади для верхніх граней відхилень узагальнених інтегралів Пуассона від функцій класу W^r. Потреба вивчення таких задач може виникнути при розв'язанні ряду прикладних задач із механіки, економіки, військової справи і деяких інших областей.

Yu. I. Kharkevych

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF UPPER BOUNDS OF DEVIATIONS OF FUNCTIONS OF THE CLASS W^r FROM THEIR GENERALIZED POISSON INTEGRALS

Methods for optimizing functions are proposed, which help to discover deep connections between distant, at first glance, mathematical models and conflict-controlled processes. Complete asymptotic expansions for upper bounds of deviations of generalized Poisson integrals of functions from a class W^r are obtained. The need to study such problems can arise when solving a number of applied problems from mechanics, economics, military affairs and some other areas.

1. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
2. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Там же. — 2000. — № 3. — С. 3–32.
3. *Kharkevych Yu. I.* On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals // Journal of Automation and Information Sciences. — 2017. — **49**, N 10. — P. 74–81.
4. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel-Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2009. — **61**, N 1. — P. 86–98.
5. *Baskakov V.A.* Some properties of operators of Abel-Poisson type // Mathematical Notes. — 1975. — **17**, N 2. — P. 101–107.

6. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2012. — **63**, N 12. — P. 1820–1844.
7. *Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V.* Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals // Ibid. — 2007. — **59**, N 8. — P. 1224–1237.
8. *Степанец А.И.* Методы теории приближения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. I. — 427 с.
9. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2002. — **54**, N 9. — P. 1462–1470.
10. *Stark E.L.* The complete asymptotic expansion for the measure of approximation of Abel-Poisson's singular integral for $\mathrm{Lip}\,1$ // Mathematical Notes. — 1973. — **13**, N 1. — P. 14–18.
11. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals // Ukr. Math. J. — 2004. — **56**, N 9. — P. 1509–1525.
12. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators // Ibid. — 2005. — **57**, N 8. — P. 1297–1315.
13. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric // Ibid. — 2009. — **61**, N 11. — P. 1757–1779.
14. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximation of functions from the class $\tilde{N}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric // Ibid. — 2009. — **61**, N 12. — P. 1893–1914.
15. *Kharkevych Yu.I., Stepanyuk T.A.* Approximation properties of Poisson integrals for the classes $\tilde{N}^{\psi}_{\beta,\infty}\acute{I}^{\alpha}$ // Mathematical Notes. — 2014. — **96**, N 5–6. — P. 1008–1019.
16. *Hembars'ka S.B.* Tangential limit values of a biharmonic Poisson integral in a disk // Ukr. Math. J. — 1997. — **49**, N. 9. — P. 1317–1323.
17. *Фалалеев Л.П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Материалы всесоюз. симп. — Алма-Ата : Наука, 1976. — С. 163–167.
18. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2000. — **52**, N 7. — P. 1113–1117.
19. *Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V.* Approximation of function from class $\tilde{N}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric // Ibid. — 2008. — **60**, N 5. — C. 769–798.
20. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson intrgrals // Ibid. — 2009. — **61**, N 3. — P. 399–413.
21. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Approximation of functions from the classes $\tilde{N}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson intrgrals // Ibid. — 2011. — **63**, N 7. — P. 1083–1107.
22. *Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu. I.* Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^r_\beta H^\alpha$ // Ibid. — 2017. — **68**, N 11. — P. 1727–1740.
23. *Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I.* Approximating Properties of Biharmonic Poisson Operators in the Classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ // Ibid. — 2017. — **69**, N 5. — P. 757–765.
24. *Hembars'ka S.B., Zhyhallo K.M.* Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Hölder classes // Ibid. — 2017. — **69**, N 7. — P. 1075–1084.
25. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.
26. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи приближения. — М. : Наука 1976. — 424 с.
27. *Тиман А.Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — **74**. — С. 17–20.
28. *Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I.* Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals // Ukr. Math. J. — 2002. — **54**, N 1. — P. 51–63.

Получено 23.02.2018

Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком НАНУ А.А. Чикрием.