УДК 550:531; 681.51

Н.В. Ефименко, Н.В. Луценко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ИНФОРМАЦИИ ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА

Введение

Существует достаточно много работ, посвященных определению параметров углового движения космического аппарата (КА) с использованием методов динамической фильтрации [1–6]. В большинстве из них постановка задачи определения параметров углового движения КА формулируется следующим образом: для модели углового движения КА относительно центра масс, описываемой системой уравнений вида

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_u, \tag{1}$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\omega^{\mathrm{T}} \\ \omega & -F(\omega) \end{bmatrix} \Lambda, \tag{2}$$

$$y_{k_{\mathrm{B}}} = y_{k_I} + 2\lambda_0 \lambda \times y_{k_I} + 2\lambda \times \lambda \times y_{k_I}, \quad k = 1, 2, \ldots m, \tag{3}$$

где $\Lambda = (\lambda_0 \lambda)^{\mathrm{T}}$ — векторное представление нормированного кватерниона со скалярной частью λ_0 и векторной частью λ, задающего переход от инерциальной системы координат I к связанной системе координат B, $F(x)$ — линейный кососимметрический оператор векторного произведения, определяемый равенством $F(x) \cdot y = x \times y$, y_k — совокупность векторов, положение которых известно относительно базисов B и I. Необходимо найти уравнение динамического фильтра для получения оценок $\hat{\Lambda}$, $\hat{\omega}$ по измерениям y_{k_B}. В уравнении (3) нижний индекс в обозначении y_k указывает, на какой базис проектируется вектор y_k. Так как система уравнений (1)–(3) нелинейная, то для нахождения оценок применяются методы нелинейной фильтрации. Вычислительные алгоритмы нелинейной фильтрации носят итерационный характер и имеют достаточно высокую вычислительную сложность, что затрудняет их использование в бортовых алгоритмах управления ориентацией, особенно в алгоритмах быстрых пространственных разворотов во время съемки. Эти трудности можно обойти, если в качестве модели углового движения КА использовать модель, построенную на основе динамического уравнения вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона.

В этой модели в качестве компонентов вектора состояния КА используются параметры Родрига–Гамильтона и их производные.

Модель имеет следующий вид [7]:

$$\ddot{\Lambda} = (I_4 - \Lambda\Lambda^{\mathrm{T}})U - \Lambda \| \dot{\Lambda} \|^2, \tag{4}$$

где I_4 — единичная матрица 4×4. Для этой модели в [8, 9] предложено преобразование правой части динамического уравнения Эйлера в вектор управления $U \in R^4$, позволяющее компактно записать правую часть уравнения (4) как функцию параметров Родрига–Гамильтона. Преобразование определяется выражением

$$U = \frac{1}{2} A^{\mathrm{T}}(\Lambda)\, J^{-1}[M_u - \omega \times J\omega],$$

где матрица $A(\Lambda)$ имеет вид

$$A(\Lambda) = [-\lambda \quad \lambda_0 I_3 - F(\lambda)].$$

Между системой уравнений (1), (2) и уравнением (4) существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое выражениями $\omega = 2A(\Lambda)\dot{\Lambda}$, $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} A^{\mathrm{T}}(\Lambda)\omega$. В связи с этим вместо нахождения оценок $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\omega}$ с использованием уравнений (1), (2) можно рассматривать задачу нахождения оценок $\hat{\Lambda}$, $\dot{\hat{\Lambda}}$ с помощью уравнения (4).

Постановка задачи

Пусть вращательное движение КА относительно инерциальной системы координат описывается дифференциальным уравнением второго порядка относительно параметров Родрига–Гамильтона:

$$\ddot{\Lambda} = (I_4 - \Lambda\Lambda^{\mathrm{T}})U - \Lambda \| \dot{\Lambda} \|^2,$$

где U — вектор управления. Будем полагать, что на борту КА имеется звездный датчик, который в дискретные моменты времени t_k выдает значение кватерниона перехода Λ от инерциальной системы координат к связанной системе координат. Без потери общности примем, что связанная система координат реализуется посадочной плоскостью звездного датчика, и направление ее осей совпадает с направлением осей приборной системы координат. Необходимо найти уравнение динамического фильтра для получения оценок $\hat{\Lambda}, \hat{\dot{\Lambda}}$ по выходной информации звездного датчика.

Решение поставленной задачи. Введем в рассмотрение вектор состояния

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \dot{\Lambda} \end{pmatrix}, \ x_1, x_2 \in R^4.$$

Тогда вращательное движение КА можно описать системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = \theta, \tag{5}$$

где

$$\theta = (I_4 - x_1 \cdot x_1^{\mathrm{T}})U - x_1 \| x_2 \|^2. \tag{6}$$

Дополним систему (5) уравнением измерения

$$y = x_1.$$

Вектор x будем оценивать по традиционной для дискретной фильтрации схеме: прогноз оценки и ее коррекция по измерению. Оценку на этапе прогноза

ISSN 0572-2691

обозначим $\hat{x}^- = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^- \\ \hat{x}_2^- \end{pmatrix}$, а оценку после коррекции — $\hat{x}^+ = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^+ \\ \hat{x}_2^+ \end{pmatrix}$. Этап прогноза состоит из нескольких шагов интегрирования следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1^- &= \hat{x}_2^-, \\ \dot{\hat{x}}_2^- &= \hat{\theta}^-, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\hat{\theta}^- = \left(I_4 - \hat{x}_1^- \hat{x}_1^{-\mathrm{T}} \right) \cdot U - \hat{x}_1^- \left| \hat{x}_2^- \right|^2. \tag{8}$$

Прогноз осуществляется на интервале $[t_k,\ t_{k+1}]$, где $t_{k+1} = t_k + h_{izm}$, а h_{izm} — интервал обновления оценки (интервал коррекции). В момент коррекции

$$\hat{x}^-(t_{k+1}) = \hat{x}^+(t_{k+1}).$$

В результате интегрирования уравнения (7) получается вектор $\hat{x}^-$, не совпадающий из-за погрешности прогноза с вектором x. Точность, с которой вектор $\hat{x}^-$ аппроксимирует вектор x, охарактеризуем ошибкой прогноза:

$$\varepsilon^- = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^- \\ \varepsilon_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \hat{x}_1^- \\ x_2 - \hat{x}_2^- \end{pmatrix}.$$

Для получения уравнения ошибки воспользуемся следующим утверждением: пусть на единичной сфере в пространстве R^n задана точка $X_0(t)$, движение которой описывается уравнением $\ddot{X}_\mathbf{0} = (I_n - X_\mathbf{0} X_\mathbf{0}^\mathbf{T}) \cdot f - X_\mathbf{0} \left| \dot{X}_\mathbf{0} \right|^2$. Введем обозначение $\Theta = (I_n - X_0 X_0^{\mathrm{T}}) f - X_0 \left\| \dot{X}_0 \right\|^2$. Тогда векторы Θ и f связаны соотношением $f = \Theta + \alpha(t) \cdot X_0$, где $\alpha(t)$ — произвольная скалярная функция времени.

Доказательство утверждения приведено в [8]. Согласно утверждению выражения (6) и (8) можно представить следующим образом:

$$\theta = U - \alpha(t) x_1,$$

$$\hat{\theta}^- = U - \alpha(t) \hat{x}_1^-.$$

Вычитая из выражения (5) выражение (7), получаем систему уравнений для ошибок прогноза:

$$\dot{\varepsilon}_1^- = \varepsilon_2^-,\ \ \dot{\varepsilon}_2^- = -\alpha(t) \varepsilon_1^-. \tag{9}$$

Так как переменная $\alpha(t)$ — произвольная скалярная функция, то положим ее равной нулю. Тогда система (9) для ошибки прогноза примет вид

$$\dot{\varepsilon}_1^- = \varepsilon_2^-,\ \ \dot{\varepsilon}_2^- = 0. \tag{10}$$

Перейдя от непрерывной системы (10) к ее дискретному аналогу, получаем

$$\varepsilon_1^-(k+1) = \varepsilon_1^-(k) + h_{izm} \varepsilon_2^-(k),\ \ \varepsilon_2^-(k+1) = \varepsilon_2^-(k).$$

Уточнение оценки $\hat{x}^-$ по измерению $y(k+1) = x_1(k+1)$ будем производить согласно выражениям

$$\hat{x}_1^+(k+1) = \hat{x}_1^-(k+1) + K_1(y(k+1) - \hat{x}_1^-(k+1)),$$

$$\hat{x}_2^+(k+1) = \hat{x}_2^-(k+1) + K_2(y(k+1) - \hat{x}_1^-(k+1)).$$

После уточнения оценки имеем следующую систему уравнений для ошибок:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) - \hat{x}_1^+(k+1) &= \varepsilon_1^+(k+1) = (I_4 - K_1)\varepsilon_1^+(k) + h_{izm}(I_4 - K_1)\,\varepsilon_2^+(k), \\ x_2(k+1) - \hat{x}_2^+(k+1 &= \varepsilon_2^-(k+1) = -K_2\varepsilon_1^+(k) + (I_4 - h_{izm}K_2)\,\varepsilon_2^+(k). \end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) представляет собой линейную систему с постоянными коэффициентами, что позволяет применять при выборе матриц K_1, K_2 хорошо развитые методы теории линейных систем. Определим матрицы K_1, K_2 следующим образом:

$$K_1 = \mathrm{diag}(k_{1i}),\ K_2 = \mathrm{diag}(k_{2i}),\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда систему (11) можно представить в виде четырех независимых подсистем:

$$\varepsilon_{1i}^+(k+1) = (1 - k_{1i})\varepsilon_{1i}^+(k) + h_{izm}(1 - k_{1i})\varepsilon_{2i}^+,$$

$$\varepsilon_{2i}^+(k+1) = -k_{2i}\varepsilon_{1i}^+(k) + (1 - h_{izm}k_{2i})\varepsilon_{2i}^+,$$

где ε_{1i}^+, ε_{2i}^+ — координаты векторов ε_1^+, ε_2^+ соответственно. Характеристическое уравнение для отдельной подсистемы имеет вид $z_\mathrm{i}^2 + (k_{2i}h_{izm} + k_{1i} - 2)z_i + 1 - k_{1i} = 0$.

Для того чтобы система (11) была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы корни z_{i1} и z_{i2} характеристических уравнений подсистем были по модулю меньше единицы: $\left|z_{ij}\right| < 1,\ j = 1, 2.$

При этом если заданы корни z_{i1} и z_{i2}, то коэффициенты k_{1i} и k_{2i}, обеспечивающие асимптотическую устойчивость системы (11), можно найти по формулам

$$k_{1i} = 1 - z_{i1}z_{i2},\ k_{2i} = \frac{-z_{\mathrm{i}1} - z_{i2} - k_{1i} + 2}{h_{izm}}.$$

Приведенные выражения позволяют выбрать матрицы K_1, K_2 таким образом, чтобы уравнение ошибок (11) было ассимптотически устойчивым, что обеспечивает работу алгоритма при произвольных начальных значениях вектора ошибок ε.

Результаты численного моделирования

Для подтверждения работоспособности предложенного алгоритма проведено два численных эксперимента:

- определение параметров неуправляемого вращательного движения КА в инерциальной системе координат;
- определение возможности создания режима программных поворотов без использования информации измерителей угловой скорости.

Основная цель первого эксперимента — проверка работоспособности (асимптотической устойчивости) предложенного алгоритма при больших начальных ошибках определения параметров углового движения КА. Цель второго эксперимента — оценка динамических и точностных характеристик алгоритма в процессе штатной работы КА.

При проведении экспериментов в качестве математической модели вращательного движения КА использовались динамические уравнения Эйлера и кинематические уравнения для кватерниона. При этом предполагалось, что измерения звездного датчика (кватернион $\breve{\Lambda}(t_k)$) связаны с истинным кватернионом $\Lambda(t_k)$ зависимостью

$$\breve{\Lambda} = \Lambda \circ \delta\Lambda,$$

где $\delta\Lambda$ — кватернион малого поворота вида

$$\delta\Lambda = 1 + \frac{1}{2}e. \tag{12}$$

В формуле (12) $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ — вектор малого поворота (вектор ошибок звездного датчика). При моделировании элемента e_i, $i = 1, 2, 3$, векторы ошибок вычислялись как случайные числа, распределенные по нормальному закону. Управление U, фигурирующее в уравнении прогноза (7), определялось согласно выражениям

$$U = \frac{1}{2} A^{\mathrm{T}}(\breve{\Lambda}) J^{-1}[M_u - \hat{\omega} \times J\hat{\omega}], \ \hat{\omega} = 2A(\breve{\Lambda})\hat{\dot{\Lambda}},$$

где $\hat{\dot{\Lambda}}$ — оценка вектора $\dot{\Lambda}$, а $\hat{\omega}$ — оценка вектора угловой скорости ω.

Точность определения ориентации оценивались по величине граничных ошибок определения положения осей связанной системы координат относительно инерциальной системы координат. Кватернион ошибки E определялся следующим образом:

$$E = \overline{\hat{\Lambda}} \circ \Lambda,$$

где черта над кватернионом обозначает сопряженный кватернион. Кватернион E является кватернионом малого поворота и поэтому представим его в виде $E = 1 + \frac{1}{2}\upsilon$.

При этом вектор $\upsilon = \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{pmatrix}$ принимался за вектор погрешности определения ориентации осей связанной системы координат относительно инерциальной системы координат. Точность определения угловой скорости оценивалась по величине ошибки $\Delta\omega$, которая рассчитывалась по формуле $\Delta\omega = \omega - \hat{\omega}$.

Результаты моделирования определения ориентации неуправляемого углового движения КА

Начальные условия:
для КА

$$\Lambda = (0{,}4687 \quad -0{,}6006 \quad -0{,}2235 \quad -0{,}6079)^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{\omega} = (0{,}1 \quad 0{,}01 \quad -0{,}1)^{\mathrm{T}};$$

для фильтра

$$\hat{\Lambda} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}, \ \hat{\dot{\Lambda}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}.$$

На рис. 1 и 2 приведены погрешности определения ориентации и угловой скорости с помощью предлагаемого алгоритма (ИСК — инерциальная система координат).

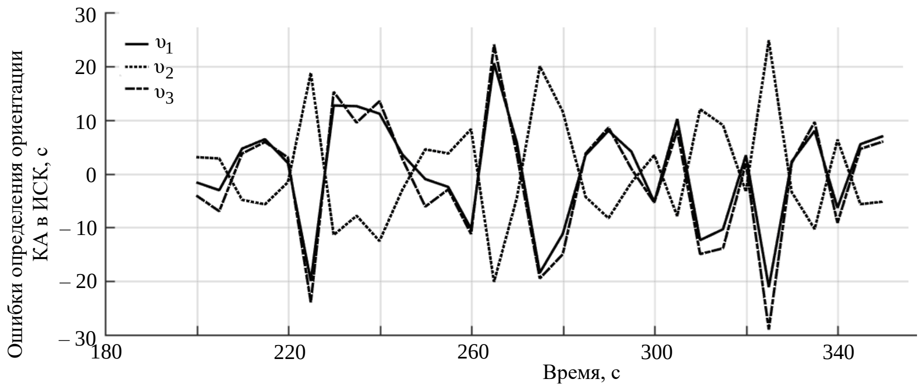

Рис. 1

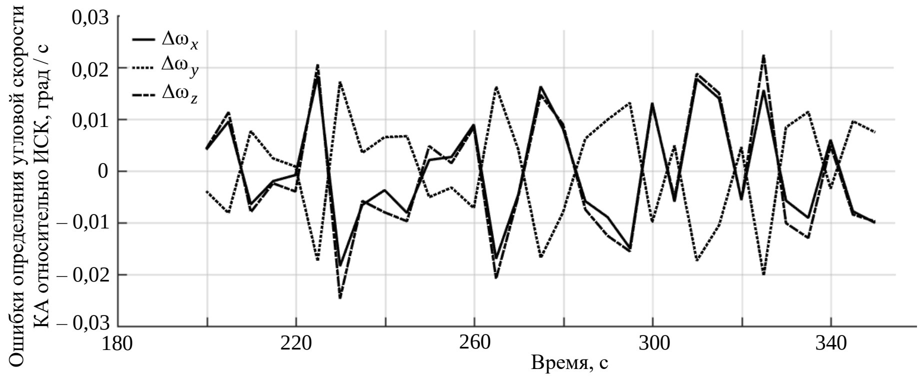

Рис. 2

Эксперимент показал возможность создания алгоритма оценивания вектора состояния углового движения КА при произвольных начальных условиях в классе линейных систем с постоянными коэффициентами, что позволяет применять при синтезе таких алгоритмов хорошо развитые методы теории линейных систем. Это значительно упрощает синтез.

Результаты моделирования работы алгоритма в режиме программных поворотов без использования информации измерителей угловой скорости

Моделировался разворот спутника относительно ИСК. При этом время разворота было выбрано равным 60 с. Начальное угловое положение КА относительно ИСК и угловые скорости были следующими:

$$\mathbf{\Lambda}(t_0) = (0{,}6883 \quad 0{,}0389 \quad -0{,}0533 \quad -0{,}7224)^{\mathrm{T}},$$

$$\omega(t_0) = (0 \quad 0{,}0011 \quad 0)^{\mathrm{T}}, \ \mathrm{t}_0 = 300\,\text{с}.$$

Приведем параметры углового движения КА после разворота:

$$\Lambda(t_1) = (0{,}6501 \quad 0{,}2385 \quad -0{,}2166 \quad -0{,}6823),$$

$$\omega(t_1) = (0 \quad 0{,}00093 \quad -0{,}00053)\ , \ t_1 = 360\,\text{с}.$$

Программа разворота рассчитывалась в соответствии с методикой, приведенной в [8]. На рис. 3 и 4 приведены графики изменения во времени элементов кватерниона $\Lambda(t)$ при развороте и координат вектора абсолютной и угловых скоростей КА.

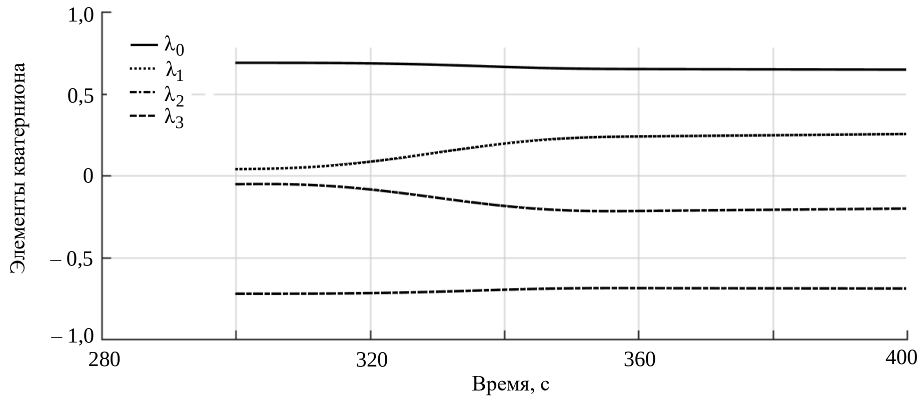

Рис. 3

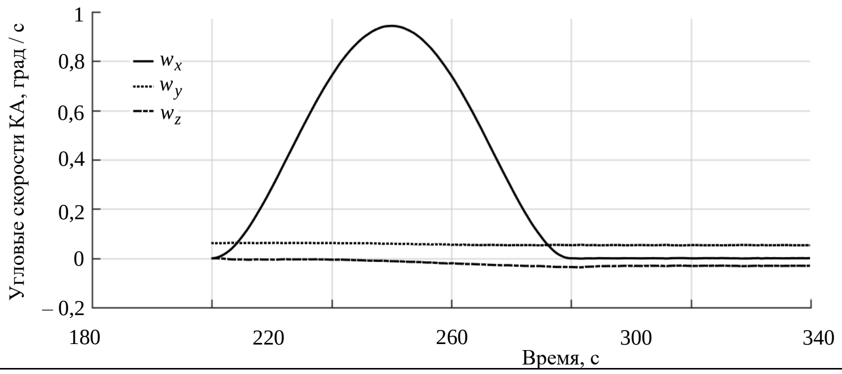

Рис. 4

На рис. 5 и 6 приведены графики ошибок определения ориентации и ошибок определения абсолютной угловой скорости КА в развернутом положении ($t > 360$ с).

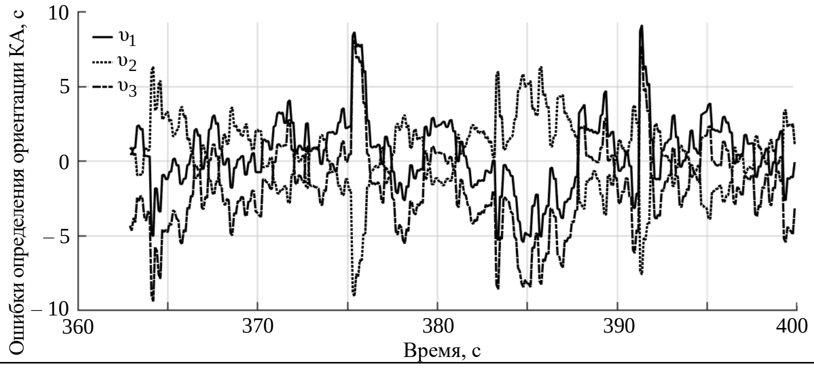

Рис. 5

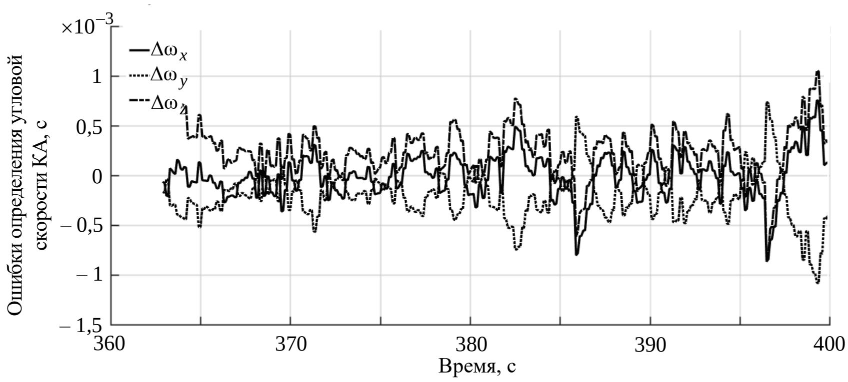

Рис. 6

Заключение

На базе уравнения вращательного движения КА в параметрах Родрига–Гамильтона разработан алгоритм оценивания вектора состояния углового движения КА при произвольных начальных условиях в классе линейных систем с постоянными коэффициентами, что позволяет применять при синтезе таких алгоритмов хорошо развитые методы теории линейных систем. Это значительно упрощает синтез.

Применение предложенного алгоритма для определения угловой скорости КА по показаниям звездного датчика позволяет строить систему управления без использования в контуре управления КА измерителей угловой скорости. При этом обеспечиваются высокие метрологические характеристики процесса управления ориентацией КА, повышается надежность системы управления, сохраняется работоспособность КА как при частичном, так и полном отказе измерителей угловой скорости. Кроме того, при отказе от использования в контуре управления КА измерителей угловой скорости снижается масса и энергопотребление, а также стоимость изготовления системы управления, что также немаловажно при создании КА различного назначения.

М.В. Єфименко, Н.В. Луценко

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ КУТОВОГО РУХУ КОСМІЧНОГО АПАРАТА ЗА ІНФОРМАЦІЄЮ ЗОРЯНОГО ДАТЧИКА З ВИКОРИСТАННЯМ ДИНАМІЧНОГО РІВНЯННЯ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА У ПАРАМЕТРАХ РОДРІГА–ГАМІЛЬТОНА

Розглянуто питання побудови алгоритмів визначення параметрів кутового руху космічного апарата за інформацією зоряного датчика з використанням динамічного рівняння обертального руху твердого тіла у параметрах Родріга–Гамільтона. Наведено результати моделювання роботи запропонованих алгоритмів.

N.V. Yefymenko, N.V. Lutsenko

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF THE ANGULAR MOTION OF THE SPACECRAFT FROM THE INFORMATION OF THE STAR SENSOR USING THE DYNAMIC EQUATION OF THE SOLID BODY ROTATION IN THE RODRIG–HAMILTON PARAMETERS

The problems of constructing algorithms for determining the parameters of the rotational motion of a spacecraft from the information of a star sensor are considered, using the dynamic equation of the solid body rotation in the Rodrig-Hamilton parameters. The results of modeling the work of the proposed algorithms are presented.

1. *Lefferts E.J., Markley,F.l., and Shuster M.D.* Kalman filtering for spacecraft attitude estimations, // Journal of Guidance control, and dynamics. — 1982, — **5**, N 5. — P 417–429.
2. *Bar-Itzhack, I.Y. and Oshman, Y.* Attitude determination from vector observations: quaternion estimation // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 1985. — AES-21, N 1. — P. 128–136.
3. *Shuster M.D.* Kalman filtering of spacecraft attitude and the quest model // Journal of the Astronautical Science. — 1990. — **38**, N 3. — P. 377–393.
4. *Psiaki M.L., Martel F. and Pal P.K.* Three-axis determination via kalman filtering of magnetometer data // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 1990, — **13**, N 3. — P. 506–514.
5. *Bar-Itzhack I.Y, Deutschmann J and Markley F.L.* Quaternion normalization in additive ekf for spacecraft attitude determination, // Proceeding of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf., New Orleans, LA, August. — 1991. — P. 908–916.
6. *Psiaki M.L., Theiler J., Bloch J., Ryan S., Dill R.W. and Warner R.E.* ALEXIS spacecraft attitude recognition with thermal \ flexible motions due to lanch damage // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 1997. — **20**, N 5. — P. 1033–1041.
7. *Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т.* Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 5–15.
8. *Ефименко Н.В.* Управления пространственной переориентацией космического аппарата с использованием динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2015. — № 3. — С. 102–115.
9. *Ефименко Н.В.* Синтез оптимального по времени пространственного разворота космического аппарата с использованием динамического уравнения вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона / Там же. — 2017. — № 3. — С. 109–128.

Получено 11.12.2017
После доработки 20.09.2018