УДК 519.1

А.Г. Донец, А.Л. Гурин

ЗАДАЧА О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЕЙФЕ С ПРОСТЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ ЗАМКОВ

Рассмотрим задачу о математическом сейфе, определение которого дано в [1]. В работе [2] рассматривались такие сейфы на матрицах для однотипных замков с числом состояний *K*. Во всех задачах о сейфе на матрицах все замки сейфа расположены в виде прямоугольной таблицы размером $m \times n$, т.е. в виде матрицы $Z = (z_{ij})_{m,\,n}$. Для любого замка z_{ij} входящими считаются замки, расположенные в той же строке и том же столбце. Исходное состояние сейфа задается матрицей $B = (b_{ij})_{m,\,n}$. Пусть матрица $X = (x_{ij})_{m,\,n}$ — решение задачи, где x_{ij} равно числу поворотов ключа в замке z_{ij}.

Тогда условием того, что элемент b_{ij} преобразуется матрицей *X* в нуль, представляется соотношением

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} x_{kj} + b_{ij} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, K), \tag{1}$$

где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Обозначим $\vec{x} = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m,\,n-1}, x_{mn})$ вектор-столбец, полученный из матрицы *X* последовательной записью ее строк.

Аналогично из матрицы *B* получим вектор-столбец $\vec{b}$. Кроме того, пусть $\Im_n$ — матрица размера $n \times n$, состоящая из единиц, E_n — единичная матрица того же размера. Тогда условие преобразования (1) для всей матрицы *B* запишем в виде системы уравнений

$$A\vec{x} + \vec{b} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, K), \tag{2}$$

где матрица *A* размера $mn \times mn$ состоит из m^2 клеток:

$$A = \begin{pmatrix} \Im_n & E_n & E_n & .. & .. & E_n \\ E_n & \Im_n & E_n & .. & .. & E_n \\ E_n & E_n & \Im_n & .. & .. & E_n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ E_n & E_n & E_n & .. & .. & \Im_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Некоторые численные методы решения таких систем рассматривались в [3}.

Специфика данной задачи позволяет находить решение системы непосредственно, так как матрица A имеет стандартный вид и не зависит от значений матрицы B. Ее ранг и определитель зависят только от значений m и n.

Если ранг матрицы A равен mn, то решение системы (2) имеет вид

$$\vec{x} = -A^{-1}\vec{b} \pmod{K}. \tag{4}$$

Таким образом, проблема сводится к отысканию обратной матрицы A^{-1}. В общем случае для произвольных m, n она может не существовать. Тогда система (2) может иметь решение, если начальное состояние удовлетворяет определенным ограничениям.

В работе [2] была найдена обратная матрица в виде так называемой T-матрицы:

$$T_{m,n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} H_n(\alpha_1,\alpha_2) & H_n(\alpha_3,\alpha_4) & \dots & H_n(\alpha_3,\alpha_4) \\ H_n(\alpha_3,\alpha_4) & H_n(\alpha_1,\alpha_2) & \dots & H_n(\alpha_3,\alpha_4) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ H_n(\alpha_3,\alpha_4) & H_n(\alpha_3,\alpha_4) & \dots & H_n(\alpha_1,\alpha_2) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$H_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Будем искать обратную матрицу A^{-1} системы (2) в виде T-матрицы $A^{-1} = T_{m,n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

Исходя из того, что $AA^{-1} = E_{mn}$, в [2] получено решение

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &\equiv \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} - 1 + \alpha_4 \\ \alpha_2 &\equiv \frac{1}{n-1} + \alpha_4 \\ \alpha_3 &\equiv \frac{1}{m-1} + \alpha_4 \\ \alpha_4 &\equiv -\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\frac{1}{m+n-1} \end{aligned}\right\} \pmod{K}. \tag{6}$$

Введем обозначения: $-\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $-\sum_{i=1}^{m} b_{ij} = \beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Если $m \neq 1 \pmod{K}$, $n \neq 1 \pmod{K}$, $m + n \neq 1 \pmod{K}$, то, подставляя значения α_i в формулу (4), получим

$$x_{ij} = -b_{ij}\frac{1}{m-1} - b_{ij}\frac{1}{n-1} + b_{ij} - b_{ij}\alpha_4 + \frac{1}{n-1}\lambda_i + \alpha_4\lambda_i + b_{ij}\frac{1}{n-1} + b_{ij}\alpha_4 + b_j\frac{1}{m-1} + \alpha_4 b_j +$$

$$+ b_{ij}\frac{1}{m-1} + b_{ij}\alpha_4 + \alpha_4\sum_{k=1}^{m}\lambda_k - \alpha_4\lambda_i - \alpha_4 b_j - \alpha_4 b_{ij} = b_{ij} + \frac{1}{n-1}\lambda_i + \frac{1}{m-1}b_j + \alpha_4\sum_{k=1}^{m}\lambda_k.$$

После упрощений окончательно будем иметь

$$x_{ij} = b_{ij} + \frac{1}{n-1}\lambda_i + \frac{1}{m-1}b_j + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\frac{1}{m+n-1}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k . \quad (7)$$

В данной работе рассматриваютя математические сейфы с однотипными замками, у которых число состояний $\hat{E}$ — простое число. Для решения задачи введем обозначения: $S_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}$, $S = \sum_{i=1}^{m} S_i$, $\Sigma_j = x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{nj}$ и воспользуемся методом выделения подсистем, суть которого изложена в [4] и заключается в следующем.

Образуем подсистему из системы (2) путем сложения первых n уравнений, вторых n уравнений и т.д. В результате получим следующую подсистему из m уравнений:

$$\begin{aligned} &nS_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{m-1} + S_m = \lambda_1 (\bmod K), \\ &S_1 + nS_2 + S_3 + ... + S_{m-1} + S_m = \lambda_2 (\bmod K), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ &S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{m-1} + nS_m = \lambda_m (\bmod K). \end{aligned} \quad (8)$$

Назовем ее подсистемой первого рода. Если сложить в этой подсистемы все уравнения, то получим равенство

$$(m+n-1)S = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i . \quad (9)$$

Подсистему второго рода получим из системы (2) следующим образом. Выделим $(kn + j)$-е уравнения, где $k = 0, 1, 2,\ldots, m–1$. Получим систему из m уравнений:

$$\begin{aligned} &S_1 + x_{2j} + x_{3j} + ... + x_{nj} = -b_{1j} (\bmod K), \\ &x_{1j} + S_2 + x_{3j} + ... + x_{nj} = -b_{2j} (\bmod K), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ &x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + ... + S_m = -b_{mj} (\bmod K). \end{aligned} \quad (10)$$

Складывая их, получаем равенство

$$S + (m-1)\Sigma_j = b_j, \quad j = 1, 2, ..., n . \quad (11)$$

В зависимости от значений m и n получим пять различных случаев.

Случай 1. $m \neq 1 (\bmod K)$, $n \neq 1 (\bmod K)$, $m + n \neq 1 (\bmod K)$. В этом случае из равенства (9) находим $S = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{m+n-1}$. Подставляя это выражение в равенство (11), имеем

$$\Sigma_j = \frac{1}{m-1}(b_j - S), \quad j = 1, 2, ..., n . \quad (12)$$

Из i-го уравнения системы (8) находим

$$S_i = \frac{1}{n-1}(\lambda_i - S), \quad i = 1, 2, ..., m. \quad (13)$$

Добавив в левую и правую части i-го уравнения подсистемы (10) x_{ij}, получим равенство $S_i + \Sigma_j = -b_{ij} + x_{ij}$. Отсюда

$$x_{ij} = b_{ij} + S_i + \Sigma_j \,. \tag{14}$$

Подставляя в (14) выражения (12) и (13), имеем решение системы (2): $x_{ij} = b_{ij} + \frac{1}{n-1}\lambda_i + \frac{1}{m-1}b_j + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\frac{1}{m+n-1}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$, которое совпадает с (7), полученным ранее другим способом.

Случай 2. $m \neq 1 (\mathrm{mod}\, K),\ n \neq 1 (\mathrm{mod}\, K),\ m + n = 1 (\mathrm{mod}\, K)$. Если S известно, то решение $X = (x_{ij})_{m,\,n}$ находим так же, как и в случае 1. Поэтому, задавая значения S, получаем новое решение. Если к матрице X добавить матрицу $Y = (y_{ij} = k)_{mn}$, то решение не изменится. Это вытекает из того, что на элемеит b_{ij} в матрице Y действует величина, равная $(m+n-1)k = 0$, т.е. X + Y также является решением. Таким образом, получаем дополнительные K – 1 решение, а всего — K решений. Это вытекает также из того, что можно произвольным образом задавать K значений S .

Пример 1. Пусть $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, K = 5 и S = 1. Убедимся, что выполняется предварительное условие (9), а именно, $\sum_{i=1}^{2}\lambda_i = -4 - 6 = 0\ (\mathrm{mod}\,5)$, что и требовалось.

Тогда по формулам (12), (13) находим $S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ \Sigma_1 = 1,\ \Sigma_2 = 3, \Sigma_3 = 2,$ $\Sigma_4 = 0.$ Подставляя эти значения в (14), получаем решение системы (2) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Проверим это решение:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{11}=-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{12}=-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{13}=2}$$

$$\xrightarrow{x_{21}=2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{22}=-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добавив к этому решению матрицу $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, получим $X_1 = X +$ $+ Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Это соответствует первоначальному значению $S = 2,$

ISSN 0572-2691

$S_1 = 3,\ S_2 = -1,\ \Sigma_1 = 0,\ \Sigma_2 = 2,\ \Sigma_3 = 1,\ \Sigma_4 = -1.$ Нетрудно убедиться, что X_1 тоже является решением.

Случай 3. $m = 1(\mathrm{mod}K),\ n \neq 1(\mathrm{mod}K).$ Из равенства (11) вытекает, что $S = b_j$. Значит, все $b_j = \beta,\ j = 1, 2, ..., n$. Это первое предварительное условие решения задачи. Вторым предварительным условием должно быть

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{m+n-1}.$$

Находим значения S_i из равенства (13), а из системы (10), последовавтельно вычитая из первого i -е уравнение, находим

$$x_{ij} = b_{ij} - b_{1j} + S_i - S_1 + x_{1j},\quad i = 2, 3, ..., m,\quad j = 1, 2, ..., n. \qquad (15)$$

Задавая произвольно значения x_{1j} таким образом, чтобы $\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = S_1$, получаем решение $X = (x_{ij})_{mn}$. Прибавим к этому решению матрицу $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$, где $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0(\mathrm{mod}\ K)$. При этом матрица Y изменит элемент b_{ij} на величину $(m-1)y_j + \sum_{k=1}^{n} y_k = 0\ (\mathrm{mod}\ K)$. Следовательно, $X + Y$ дает новое решение задачи. Всего таких решений будет K^{n-1}, т.е. равно числу решений уравнения $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0(\mathrm{mod}\ K)$.

Пример 2. Пусть $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $K = 5$.

Первое предварительное условие выполняется: $b_1 = b_2 = b_3 = -1 = \beta$. Следовательно, $S = -1$. Значит, $S_1 = S_2 = \ = S_3 = 0$, а $S_4 = S_5 = S_6 = 3$. Второе предварительное условие также выполняется:

$$-1 = \frac{-1-1-1+0+0+0}{6+3-1(\mathrm{mod}5)} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Зададим значения $x_{1j} = 0,\ \ j = 1, 2, ..., n$. Подставляя их в формулу (15), получаем решение $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Проверим это решение.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{21}=-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{22}=1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{31}=-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{33}=1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{41}=2}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{42}=3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{43}=3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{51}=2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{52}=3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{53}=3}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{61}=2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{62}=3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{63}=3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добавив к X матрицу $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, получим новое решение: $X_1 = X + Y =$

ISSN 0572-2691

$$=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&2\\0&2&3\\3&0&0\\3&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$$. Нетрудно убедиться, что X_1 тоже является решением.

Случай 4. $m \neq 1(\mathrm{mod}\,K)$, $n=1(\mathrm{mod}\,K)$. В этом случае подсистема (8) состоит из m одинаковых уравнений вида $S=\lambda_i$, $i=1, 2, ..., m$. Следовательно, все $\lambda_i=\lambda$. Это предварительное условие существования решения. Из (12) находим

$$\Sigma_j=\frac{1}{m-1}(b_j-\lambda),\ j=1, 2, ..., n.$$

В этом случае найти значения S_i, $i=1, 2, ..., m$, невозможно. Поэтому их значения задаем произвольно при условии, что $\sum_{i=1}^{m} S_i=\lambda$. По формуле (14) находим решение. Прибавим к решению матрицу $Y=\begin{pmatrix}y_1&y_1&\cdots&y_1\\y_2&y_2&\cdots&y_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\y_m&y_m&\cdots&y_m\end{pmatrix}$, где $\sum_{i=1}^{m} y_j=0\,(\mathrm{mod}\ K)$. Матрица Y изменит элемент b_{ij} на величину $(n-1)y_i+$ $+\sum_{k=1}^{m} y_k=0\,(\mathrm{mod}\ K)$. Следовательно, дает новое решение задачи. Всего таких решений будет K^{m-1}, т.е. равно числу решений уравнения $\sum_{i=1}^{m} y_j=0\,(\mathrm{mod}\ K)$.

Пример 3. Пусть $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$ и K = 5. Предварительное условие выполняется: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$. Следовательно, $S=-1$. Зададим значения $S_1=S_2=S_3=0$, а $S_4=-1$. По формуле (12) находим $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma_3=\Sigma_4=0$, $\Sigma_5=\Sigma_6=2$. По формуле (14) находим решение $X=\begin{pmatrix}1&0&0&0&2&2\\0&1&0&0&2&2\\0&0&1&0&2&2\\-1&-1&-1&0&1&1\end{pmatrix}$.

Проверим это решение.

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{11}=1}\begin{pmatrix}2&1&1&1&1&1\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{15}=2}\begin{pmatrix}-1&3&3&3&3&3\\1&1&0&0&2&0\\1&0&1&0&2&0\\1&0&0&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{16}=2}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&2&2\\1&0&1&0&2&2\\1&0&0&1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{22}=1}\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\2&2&1&1&3&3\\1&1&1&0&2&2\\1&1&0&1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{25}=2}\begin{pmatrix}1&1&0&0&2&0\\-1&-1&3&3&0&0\\1&1&1&0&-1&2\\1&1&0&1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{26}=2}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&2&2\\1&1&0&0&2&2\\1&1&1&0&-1&-1\\1&1&0&1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{33}=1}\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&2\\1&1&1&0&2&2\\2&2&2&1&0&0\\1&1&1&1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{35}=2}\begin{pmatrix}1&1&1&0&-1&2\\1&1&1&0&-1&2\\-1&-1&-1&3&2&2\\1&1&1&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{36}=2}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&-1&-1\\1&1&1&0&-1&-1\\1&1&1&0&-1&-1\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{41}=-1}\begin{pmatrix}0&1&1&0&-1&-1\\0&1&1&0&-1&-1\\0&1&1&0&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{42}=-1}\begin{pmatrix}0&0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{43}=-1}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&-1&-1\\-2&-2&-2&-2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{45}=1}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{46}=1}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Добавим к X матрицу $Y=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$. Получим новое решение

$X_1=X+Y=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1&1&1\\0&1&0&0&2&2\\0&0&1&0&2&2\\0&0&0&1&2&2\end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что X_1 тоже является решением.

ISSN 0572-2691

Случай 5. $m=1(\mathrm{mod}K),\ n=1(\mathrm{mod}K)$. В этом случае из равенства (11) вытекает, что $S=b_j$. Значит, все $b_j=\beta,\ j=1,2,...,n$. Это первое предварительное условие решения задачи. А так как подсистема (8) состоит из m одинаковых уравнений вида $S=\lambda_i,\ i=1,2,...,m$, то отсюда вытекает, что все $\lambda_i=\lambda=\beta$. Это второе предварительное условие.

Заметим, что в данном случае найти значения $S_i,\ i=1,2,...,m,$ невозможно. Поэтому их значения можно задавать произвольным образом при условии, что $\sum_{i=1}^{m} S_i=\lambda$ и $\sum_{j=1}^{n} x_{1j}=S_1$. По формуле (15) находим решение системы. Так же, как и в случаях (3) и (4), к решению X можно добавить соответствующие матрицы Y, получая при этом новые решения. Всего таких решений будет K^{m+n-2}.

Пример 4. Пусть $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и K = 3. Предварительные условия выполняются: $b_1=b_2=b_3=b_4=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-1$. Следовательно, $S=-1$. Зададим значения $S_1=S_2=S_3=0,\ S_4-1$, где $S_1=(0,0,0,0)$. По формуле (14) находим решение $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Проверим это решение.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{21}=-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{22}=1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{31}=-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{33}=1}$$

$$\xrightarrow{x_{41}=1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{42}=-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{x_{43}=-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добавив к X матрицу $Y=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, получим новое решение $X_1=$

$$= X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$ Нетрудно убедиться, что X_1 тоже является решением.

На этом заканчивается рассмотрение всех случаев для простого K.

А.Г. Донець, А.Л. Гурін

ЗАДАЧА ПРО МАТЕМАТИЧНИЙ СЕЙФ ІЗ ПРОСТИМ ЧИСЛОМ СТАНІВ ЗАМКІВ

Розглянуто математичні сейфи з однотиповими замками, кількість станів яких — просте число. Вивчаються всі п'ять випадків, які параметрично залежать від розміру матриці станів сейфа.

A.G. Donets, A.L. Gurin

PROBLEM OF MATHEMATICAL SAFE WITH A SIMPLE NUMBER OF LOCK STATES

Mathematical safes with locks of the same kind are considered; the number of lock states is prime number. All five possible cases that parametrically depend on the safe state matrix size are studied.

1. *Donets G.A.* Solution of safe problem on (0,1)-matrices // Cybernetics and Systems Analysis. — 2002. — N 1. — P. 98–105.
2. *Агаи Аг, Гамиш Якуб, Донец Г.А.* Задача о математическом сейфе на матрицах // Теорія оптимальних рішень. — 2013. — С. 124–130.
3. *Kryvyi S.L.* Algorithms for solution of systems of linear Diophantine equations in residue fields // Cybernetics and Systems Analysis. — 2007. — **43, N** 2. — P. 171−178.
4. *Донец Г.А., Гурин А.Л.* Задача о математическом сейфе из замков с двумя состояниями // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2018. — № 5. — С. 33–41.

Получено 01.08.2018