

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СТЕПЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Введение

Одно из наиболее перспективных направлений дистанционных аэрокосмических исследований Земли основано на применении гиперспектральной съемки земной поверхности в сотнях смежных спектральных поддиапазонах электромагнитных волн. Гиперспектральное зондирование характеризуется большим объемом данных и позволяет анализировать пространственно-спектральную структуру геофизического поля подстилающей поверхности: $U = f(x, y, \lambda)$, где λ — длина волны, (x, y) — координаты точки поверхности, U — функция поля, выраженная как спектральная энергетическая яркость. Эффективное использование данных гиперспектрального дистанционного зондирования в интересах развития наук о Земле и рационального поиска полезных ископаемых во многом зависит от совершенствования методов обработки и интерпретации пространственно-спектральной информации.

Для получения высокоточных спектральных характеристик объектов, наряду с гиперспектральной аппаратурой аэрокосмического базирования, развивается оптико-электронная аппаратура спектрального зондирования для низколетящих беспилотных летательных аппаратов и наземной (полевой) дистанционной съемки. Данные такого вида съемки также могут быть представлены в терминах спектральных полей. Интерпретация полученной информации может применяться для определения на небольших площадях, перспективных для разработки участков залежей углеводородов, а также для верификации новых перспективных методов обработки и интерпретации пространственно-спектральной информации с гиперспектральных сенсоров космических аппаратов.

На примерах обосновывается и излагается методика статистического анализа спектральных структур геофизических полей, основанная на современных методах идентификации степенных распределений [1] и гипотезе самоорганизованной критичности [2], согласно которой системы с большим количеством взаимодействующих элементов естественным образом эволюционируют к критическому состоянию. Динамика систем, находящихся в состоянии самоорганизованной критичности, характеризуется степенными распределениями, которые формируют фрактальные структуры [2–6]. Применение рассмотренных в статье методов идентификации, а также построение моделей степенных распределений и статистических фракталов для описания спектральных геофизических полей, наблюдаемых дистанционными методами, остаются еще мало изученными. Принято считать, что статистические модели, которые оперируют только статистическими и вероятностными закономерностями, не могут воспроизводить конкретный исход и детали протекания геофизических процессов. Такие модели обычно рассматриваются как язык описания процесса на статистическом уровне, что значительно ограничивает их применение для детальных предсказаний и прогноза [2]. Однако в случае, когда удастся обнаружить и связать закономерности изменений статистических параметров моделей с факторами, воздействующими на процессы в среде геофизического поля, оказывается возможным получить важные количественные результаты. В этом случае можно определить тренд развития процесса [4] или, как показано далее в статье, расположение залежей углеводородов по значе-

© М.В. АРТЮШЕНКО, 2018

ниям степенных параметров распределения спектральных яркостей, которые являются кратными инвариантами масштабных (скейлинговых) преобразований. Для детального анализа масштабно-инвариантных распределений предложена непрерывно-групповая модель формирования степенных распределений как инвариантов масштабных преобразований. В модели использованы основные положения теории групп Ли [7, 8].

Изложение методов предваряет краткое описание наиболее известных моделей и примеров геофизических процессов, статистика которых отвечает степенному закону распределения, а нелинейная динамика процессов объясняется с точки зрения модели самоорганизованной критичности. В заключение этот подход к анализу и идентификации степенных распределений проиллюстрирован примером обработки реальных пространственно-спектральных данных гомогенного растительного покрова, который произрастает на месторождении природного газа; устанавливаются масштабно-инвариантные свойства распределений спектров отражений. Формирование индикаторного признака для определения пространственной границы залежи природного газа проводится по значениям степенных показателей распределений спектральных яркостей, которые являются кратными инвариантами масштабных преобразований.

1. Степенные распределения в структурах геофизических полей и геосистем

1.1. Особенности степенных распределений. Пространственное размещение физической величины на геометрическом носителе может быть представлено в терминах стационарного скалярного поля

$$U = f(\mathbf{P}), \mathbf{P} \in V, \quad (1)$$

где \mathbf{P} — точка, V — область некоторого пространства, U — значения физической величины в точках области V . Статистический анализ характеристик геофизических процессов часто демонстрирует большую вариабельность значений величин, размах изменений которых может охватывать несколько порядков. Аналогичные свойства характерны и для размера элементов, из которых состоят геосистемы. Анализ процессов и систем с такими свойствами показывает, что во многих случаях невозможно корректно охарактеризовать распределения каких-либо измеряемых величин, выделив одну или несколько частот в распределении, или определить среднее значение размеров элементов системы, часто моменты распределения различных порядков расходятся.

Плотность распределения вероятности случайной непрерывной величины X со значениями x во многих важных случаях описывается степенной функцией плотности $u(x)$. В этом случае вероятность попадания случайной величины X на элементарный участок от x до $x + dx$ равна элементу вероятности $u(x)dx$. Для дискретных значений величины X степенной закон определяется рядом распределения $p_i = P(X = x_i)$, $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$,

$$u(x) = \tilde{N} x^{-\alpha}, \quad x > 0, \quad p_i = c x_i^{-\alpha}; \quad \alpha > 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (2)$$

где C, c — постоянные величины, α — степенной показатель, p_i — вероятности, вычисленные как относительная частота, с которой встречаются значения x_i . Когда при измерении некоторой величины вероятность получения того или иного значения обратно пропорциональна некоторой степени α этого значения, говорят, что данная величина характеризуется степенным законом распределения [1].

Степенной вид функции плотности (2) в билогарифмических координатах выражается линейной зависимостью

$$\ln u = \ln C - \alpha \ln x, \quad (3)$$

что является характерным признаком, который используется для идентификации распределений данного типа.

Отличительной особенностью степенного закона распределения, называемого также законом Ципфа, распределением Парето или распределением с «тяжелым хвостом», является медленное убывание вероятностей больших значений x . В случае нестепенной статистики область больших значений x характеризуется малой вероятностью, и их в расчетах не учитывают (хвост распределения отрезают). Так, например, для распределения Гаусса, которым характеризуется большое количество случайных процессов, имеет место очень быстрое убывание плотности по мере отклонения x от математического ожидания, что позволяет не учитывать в расчетах вероятность крупных событий. Для степенных распределений крупные события происходят недостаточно редко, в силу чего графики распределений имеют тяжелые хвосты, что свидетельствует о возможности развития в системе катастрофических явлений.

Значения степенных функций (2) при $x \rightarrow 0$, $x > 0$ неограниченно возрастают. Следовательно, статистика степенного распределения может изучаться только начиная с некоторого минимального значения $x_{\min} > 0$. Условие нормировки плотности распределения задается уравнением

$$\int_{x_{\min}}^{\infty} u(x) dx = 1,$$

из которого определяется значение нормирующего коэффициента C

$$1 = C \int_{x_{\min}}^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{C}{1-\alpha} x^{-\alpha+1} \Big|_{x_{\min}}^{\infty}, \quad C = (\alpha-1)x_{\min}^{\alpha-1}. \quad (4)$$

Полностью нормированное выражение (2) имеет вид

$$u(x) = [(\alpha-1)x_{\min}^{\alpha-1}] x^{-\alpha}, \quad (5)$$

оно показывает, что нормировка изменяет только величину множителя C , не меняя степенной вид распределения, а также значение степенного показателя α .

Моменты k -го порядка степенного распределения, с учетом особенностей изучаемой статистики, определяются согласно выражению

$$M_k = \int_{x_{\min}}^{\infty} x^k u(x) dx = C \int_{x_{\min}}^{\infty} x^{k-\alpha} dx = \frac{C}{k-\alpha+1} [x^{k-\alpha+1}]_{x_{\min}}^{\infty} \quad (6)$$

начиная с некоторого минимального значения x_{\min} . При степенном показателе $\alpha \leq k+1$ моменты k -го порядка расходятся. Так, например, при $\alpha \leq 2$ среднее значение степенного распределения $M_{k=1} \rightarrow \infty$, момент первого порядка расходуется, но при $\alpha > 2$ среднее значение полностью определено.

Условие существования момента второго порядка $M_{k=2}$ определяется значениями $\alpha > 3$. Второй момент — средний квадрат величины $\langle x^2 \rangle$ равен

$$\langle x^2 \rangle = \int_{x_{\min}}^{\infty} x^2 u(x) dx = \frac{C}{-a+3} x^{-a+3} \Big|_{x_{\min}}^{\infty},$$

при $a \leq 3$, $\langle x^2 \rangle \rightarrow \infty$, этот момент расходится. Это значит, что рассматриваемое распределение не имеет определенного среднеквадратического значения (стандартного отклонения). Если степенной показатель распределения $a > 3$, второй момент имеет ограниченное и вполне определенное значение.

1.2. Методы идентификации степенных распределений. В работе [1] на модельных примерах показано, что идентификация степенных распределений различными методами, основанными на построении гистограмм, является плохой практикой. В соответствии с соотношением (3) гистограмма степенного распределения в двойных логарифмических координатах должна выглядеть как прямая линия. Однако для редко встречающихся больших значений измеряемой случайной величины статистический шум приводит к преждевременному обрезанию «хвоста» гистограммы. В случае степенных распределений для построения гистограмм хорошего качества, которые рассматриваются как эмпирический аналог плотности вероятности, необходимо располагать выборками больших объемов. На практике идентификация степенных распределений выполняется ранговым («ранг-частота») методом, который позволяет снизить требование к необходимости располагать большим объемом статистических данных; ранговый метод позволяет избежать возникновения статистического шума.

Ранговый метод обработки данных наблюдений предусматривает присвоение номера (ранга) для каждого значения величины, упорядоченной по убыванию значений в выборке. Каждому элементу последовательности, начиная с наибольшего значения, присваивается номер. Элементы с одинаковыми значениями получают разные номера в убывающей последовательности. Каждое выборочное значение имеет ранг, равный наибольшему номеру элемента с данным значением. Ранги значений являются накопленными (кумулятивными) частотами распределения, а максимальное значение накопленной частоты (полная частота) равно числу элементов N в выборке. Частота, с которой встречаются значения случайной величины, выраженная в относительных единицах измерений (k/N), рассматривается как статистическая вероятность. В этом случае процесс построения вероятностной кумулятивной функции $F(x)$ описывается соотношением

$$F(x) = P(X \geq x) = \sum_{x_i \geq x} P(X = x_i), \quad (7)$$

где X — случайная величина, x — текущее значение величины. Обозначение под знаком суммы указывает на то, что суммирование распространяется на все значения x_i , которые больше текущего значения или равны ему. Вероятностная кумулятивная функция степенного распределения достигает максимального значения, равного единице при $X = x_{\min}$, $F(x_{\min}) = 1$. Пример построения вероятностной кумулятивной функции степенного распределения приведен в подразд. 3.2.

Кумулятивная функция определена как для дискретных, так и непрерывных величин. Для непрерывной величины кумулятивная функция связана с функцией плотности $u(x)$ интегральным соотношением (8), которое учитывает тот факт, что степенное распределение расходится при малых значениях x

$$F(x) = \int_x^{\infty} u(x) dx = \tilde{N} \int_x^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{C}{\alpha - 1} x^{-(\alpha-1)} = C_1 x^{-(\alpha-1)}. \quad (8)$$

Из соотношения (8) следует, что кумулятивная функция $F(x)$ степенного распределения (2) является также степенной функцией со значением показателя степени,

на единицу меньше показателя функции плотности α , и, следовательно, в билогарифмических координатах выражается линейной зависимостью

$$\ln F = \ln C_1 - (\alpha - 1) \ln x. \quad (9)$$

Располагая множеством значений кумулятивной функции (7) в билогарифмических координатах (9), методом наименьших квадратов определяется численное значение степенных показателей $\alpha - 1$ и α . Если учитывать то, что условие нормировки (4), (5) не влияет на вид распределения и значения степенных показателей, с точностью до постоянного множителя имеют место соотношения

$$F(x) \propto x^{-(\alpha-1)}, \quad u(x) \propto x^{-\alpha}. \quad (10)$$

Таким образом, ранговый метод вычисления кумулятивной функции распределения позволяет идентифицировать степенное распределение и определить параметр α как для нормированных значений $F(x)$, так и не заботясь о выполнении условий нормировки.

1.3. Модели формирования степенных распределений и фрактальных структур природными системами. При дистанционном зондировании поверхности Земли в разных спектральных диапазонах на цифровых космических снимках создаются образы естественных и искусственных (активная локация) геофизических полей. Детальный анализ полей выявляет их фрактальную структуру [4, 5], которая сформировалась в результате природных процессов энерго- и массопереноса. При совершенствовании методов интерпретации информации дистанционного зондирования возникают проблемы анализа негладких полей и прогнозирования развития процессов, характеристики которых подчиняются степенным законам. Проблема анализа процессов, которые приводят к формированию полей с фрактальными свойствами, существует не только при дистанционных методах исследования. Свойство природных процессов формировать негладкие фрактальные структуры, для которых характерны степенные распределения, — факт, который находит подтверждение в многочисленных исследованиях. Так, например, фрактальную структуру имело поле загрязнений радионуклидами в результате аварии на Чернобыльской АЭС, а массоперенос загрязняющего вещества осуществлялся воздушной сильно турбулентной атмосферой [6]. Общая проблема динамического происхождения, и главное — повсеместного распространения природных фракталов, остается во многом нерешенной. После работ Б. Мандельброта стало очевидно, что многие природные системы имеют фрактальные структуры, для которых характерны степенные распределения. Однако в этих работах и последующих многочисленных публикациях, выполненных другими авторами на эту тему [9], не обсуждаются вопросы, откуда во множестве случаев берутся фракталы и каков механизм массового возникновения таких систем.

Успехи в исследованиях модельных фрактальных структур странных аттракторов, которые формируются специально подобранными искусственными динамическими системами дифференциальных, разностных уравнений или нелинейными отображениями [10, 11], не могут объяснить широкого распространения таких структур в природе. Для образования странных аттракторов требуется очень тонкая подстройка параметров динамической системы. Системы с хаотическим поведением формируют странные аттракторы фрактальной структуры только в критических точках параметрического пространства, в которых происходит переход от периодического поведения к хаосу. В таких критических точках статистические характеристики систем имеют степенные масштабно-инвариантные распределения. Реальные системы, наблюдаемые в природе, не обладают необходимым свойством грубости по отношению к изменениям параметров. Следовательно, теория, объясняющая динамическое происхождение фракталов и степенных распределений в природных системах, должна определить общий механизм, благодаря которому различные системы эволюционируют в критические точки.

В настоящий момент одной из наиболее содержательных теорий образования степенных распределений и природных фрактальных структур является теория самоорганизованной критичности. В соответствии с концепцией, выдвинутой П. Баком, существует широкий класс динамических систем, которые организуются таким образом, что всегда приходят к сложному критическому состоянию без каких-либо вмешательств со стороны и вне зависимости от начальных условий [2]. Теория самоорганизованной критичности предлагает простые физические и компьютерные модели энерго- и массопереноса в открытых системах, однако, как отмечает сам автор, выполнить их аналитическое описание чрезвычайно сложно. В рамках этой теории оказалось возможным лишь на примерах физического и компьютерного моделирования констатировать тот факт, что статистика динамического процесса подчиняется степенному закону распределения. Для применения этой теории в прикладных исследованиях одного только статистического описания для выполнения прогнозных оценок и определения характеристик процессов иногда недостаточно.

Физической моделью и парадигмой явления самоорганизованной критичности, которое наблюдается во многих сложных открытых системах, принято считать песочную кучу [2] или, в общем случае, кучу, которая формируется из гранулированного материала, например зерен риса [12]. В экспериментах на ровную поверхность медленно и равномерно сыплется песок. Если форма кучи имеет крутизну склона, меньше критической (субкритическое состояние), то наблюдаются малые размеры лавин. Крутизна склона будет расти, пока не достигнет критического состояния. Если крутизна станет больше критического значения (суперкритическое состояние), то размер лавин становится большой. В этом состоянии малое воздействие может привести к катастрофически большому сходу лавины, куча уменьшается. Субкритическое и суперкритическое состояния кучи тяготеют к критическому состоянию динамического равновесия. На модели системы с большим количеством взаимодействующих элементов демонстрируется динамика естественной эволюции системы к критическому состоянию. Песочная куча имеет неустойчивый локальный рельеф, который постоянно меняется из-за лавин. В целом существует притягивающее критическое состояние системы. Многочисленными экспериментами установлено, что статистические свойства такой системы в критическом состоянии остаются неизменными — распределение размеров лавин степенное. Степенная зависимость — это признак того, что состояние системы является критическим. Критическое состояние обладает свойством грубости по отношению к изменениям внешних условий. Притягивающее критическое состояние и степенная статистика распределений (2) имеют место вне зависимости от состава гранулированного материала и степени его влажности. Однако степенной показатель распределения α чувствителен к изменениям условий эксперимента. Профиль поверхности кучи из крупного гранулированного материала (риса) имеет фрактальную структуру [12]. Фракталы можно рассматривать как моментальные снимки динамических процессов, которые происходят в самоорганизующихся системах, находящихся в критическом состоянии.

Основная математическая модель теории самоорганизованной критичности формулируется на языке клеточных автоматов [2]. Для случая двухмерной модели рассматривается решетка размером $L \times L$. В ячейках решетки может накапливаться и при определенных условиях высвобождаться некоторый дискретный ресурс, например энергия, электрический заряд, масса вещества или, как принято в модели, песчинки. Ячейки, содержащие от одной до трех песчинок (единиц ресурса), считаются устойчивыми, а четвертая песчинка делает ячейку неустойчивой. Все неустойчивые ячейки опрокидываются, передавая накопленные четыре песчинки в соседние ячейки, по одной песчинке в каждую. Передача песчинок может нарушать устойчивость большого числа других ячеек и вызывать цепную реакцию их опрокидывания, которую называют лавиной. Песчинки, которые выходят за край решетки, теряются. Когда лавина заканчивается, в случайно выбранную ячейку добавляется очередная одна песчинка, которая может инициализировать новую

лавину. Размер лавины определяется количеством ячеек, в которых произошло опрокидывание. Сначала система находится в состоянии, далеком от критического, в этом случае в большинстве ячеек меньше трех песчинок и размеры лавин незначительные. Однако со временем в системе накапливается ресурс, и состояние системы становится критическим. В этом состоянии очередное добавление песчинки способно привести к опрокидыванию большого кластера ячеек, после чего система переходит в начальное состояние, далекое от критического. Процесс случайного добавления песчинок в систему снова обеспечивает ее эволюцию в критическое состояние. В результате длительного моделирования накапливается статистика этого динамического процесса. Независимо от начальной конфигурации решетки и заполнения ячеек через некоторое время система самоорганизуется в критическое состояние, в котором распределение по размеру лавин имеет степенной вид (2).

Наиболее известным геофизическим процессом со степенным распределением является распределение частоты, с которой происходят землетрясения, по энергии, выделяемой при землетрясениях в виде амплитуды сейсмических волн; энергия процесса измеряется по шкале магнитуд (статистический закон Гутенберга–Рихтера). В одном из экспериментов [13] статистика землетрясений в зоне повышенной сейсмической активности собиралась на протяжении десятилетия и включала показания множества сейсмических станций района. Кроме подтверждения степенного распределения, в этом эксперименте можно наблюдать фрактальную пространственную структуру эпицентров землетрясения. Структура разломов земной коры должна рассматриваться как единая система, находящаяся в состоянии самоорганизованной критичности.

Еще одним характерным примером геопротесса, в котором наблюдается явление самоорганизованной критичности, является процесс вулканической активности. Статистический анализ поля акустической эмиссии (подземного шума), измеряемой на протяжении одного часа вблизи постоянно активного вулкана Стромболи (Италия, Тирренское море), показал, что распределение всплесков активности по мощности звука отвечает степенному закону. По мере удаления от кратера вулкана всплеск акустической эмиссии ослабевает, однако распределение сохраняет свойство масштабной инвариантности [2, 14]. В [2] сделан вывод о том, что вулканическая активность — самоорганизованное критическое явление.

Степенные распределения масштабно-инвариантны. Аналогичными свойствами обладают фрактальные структуры оптических спектров растительных покровов [3], мультифрактальные геоморфологические структуры [5], наблюдаемые с космических аппаратов, и многие процессы в геосистемах, что позволяет выполнять их статистический анализ на основе мультифрактальных мер и моментов распределений [4]. Концепция самоорганизованной критичности определяет один из возможных универсальных механизмов функционирования сложных систем нелинейной динамики, статистика которых имеет степенное распределение. На примере анализа землетрясений очевидно, что вопросы прогноза поведения сложных систем остаются за рамками этой теории. Статистика позволяет лишь предвидеть возможность возникновения крупного события, однако не определяет времени и места его возникновения. Актуальной проблемой применения идей самоорганизованной критичности является демонстрация решений прикладных задач. Следует отметить, что гораздо менее изучены процессы самоорганизации степенных распределений, которые наблюдаются в спектральных структурах природных объектов, а также изменения при их взаимодействии с внешними факторами среды.

2. Непрерывно-групповая модель формирования степенных распределений

2.1. Масштабно-инвариантные распределения и инварианты групп Ли.

На математическом уровне описания масштабно-инвариантные свойства степенных распределений очевидны. Степенной закон для вероятностного распределе-

ния величины x выражается однородной функцией одной переменной $u(x) = cx^{-\alpha}$ и сохраняет все хорошо известные свойства класса однородных функций произвольного числа переменных. Если плотность распределения $u(x)$ подчиняется степенному закону, то изменение масштаба x в t раз не меняет вид функциональной зависимости и значения степенного показателя α , значение функции увеличивается (уменьшается) в $t^{-\alpha}$ раз

$$u(tx) = c(tx)^{-\alpha} = ct^{-\alpha} x^{-\alpha} = \tilde{N} x^{-\alpha}, \quad C = ct^{-\alpha}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0. \quad (11)$$

В силу этого свойства степенные распределения называют масштабнo-инвариантными. Масштабная инвариантность степенных распределений означает, что для крупных событий, которые происходят сравнительно редко, не следует искать каких-либо особых причин, малые и большие события подчиняются одному закону. Это общее свойство присуще многим геофизическим, биологическим и социальным процессам и системам.

Наиболее общим математическим подходом к описанию и анализу различных процессов на абстрактно-алгебраическом уровне является представление о том, что на произвольное дифференцируемое множество M действует абстрактная непрерывная группа G

$$\tau : G \times M \rightarrow M,$$

$$(\mathbf{g}, \mathbf{x}) = \tau_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}; \quad \tilde{\mathbf{x}} \in M, \quad \mathbf{g} \in G. \quad (12)$$

В результате такого действия множество определенным образом структурируется, в нем образуются определенные отношения между элементами. Выявить структурные особенности множества и определить тип группы преобразований, под действием которой возникают определенные структуры, можно по инвариантным отношениям, которые прослеживаются на элементах множества. Названия элементов множества и то, каким образом осуществляется это воздействие, является несущественным. Выявить структуру множества можно как на статистическом, так и детерминистическом уровне исследования. Математический аппарат для решения задач в такой постановке — основы теории групп Ли [7, 8]. Краткие сведения этой теории, необходимые для интерпретации и обоснования идентификации степенных распределений, далее формулируются в виде определений и примеров.

Определение 1. Элемент $\tau_{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$ непрерывной группы преобразований переводит каждую точку \mathbf{x} n -мерного пространства E^n в другую точку $\tilde{\mathbf{x}}$ того же пространства. Семейство преобразований

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_r) \in E^r, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (13)$$

для которого выполняются групповые аксиомы, задает r -параметрическую группу преобразований. При каждом фиксированном значении параметров \mathbf{t} соотношение (13) задает преобразование $\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$ пространства E^n .

Определение 2. Каждой r -параметрической группе преобразований пространства E^n соответствует r дифференциальных (инфинитезимальных) операторов

$$L_k = \sum_{i=1}^n \eta_{ki}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad k = \overline{1, r}, \quad (14)$$

функциональные коэффициенты которых

$$\eta_{ki}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial t_k} \right|_{\mathbf{t}=0} \quad (15)$$

определяются по уравнениям группы (13). Условие $\mathbf{t} = 0$ означает, что производная вычисляется в окрестности тождественного преобразования группы.

Для однопараметрической группы в n -мерном преобразуемом пространстве существует один инфинитезимальный оператор L со скалярным параметром t

$$L = \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (16)$$

$$\eta_i(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0}. \quad (17)$$

Введем новые обозначения для функции плотности степенного распределения (2)

$$y = C x^b, \quad (18)$$

где $u(x) \rightarrow y$, $-\alpha = b$. Различные значения $C \in \mathbb{R}$, принадлежащие множеству вещественных чисел, задают семейство степенных функций. Из свойства преобразования масштабирования (11) следует, что увеличение (уменьшение) значения x в t раз увеличивает (уменьшает) значение y в t^b раз. Следовательно, преобразование масштабирования функции плотности распределения (18) определяется конечными уравнениями однопараметрической группы S несимметричных растяжений в двухмерном координатном пространстве $E^2(x, y)$

$$\tilde{x} = tx, \quad \tilde{y} = t^b y. \quad (19)$$

Растяжение (19) при каждом фиксированном значении параметра t происходит с разными масштабными коэффициентами по координатным осям.

Пример 1. Определить инфинитезимальный оператор группы несимметричных растяжений S по уравнениям (19).

Единственный инфинитезимальный оператор однопараметрической группы растяжений (19) на плоскости определяется по соотношениям (16), (17)

$${}_S L = x \frac{\partial}{\partial x} + b y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (20)$$

Определение 3. Инвариантом однопараметрической группы преобразований пространства E^n называется функция $\omega(\mathbf{x})$, которая не меняет своего значения, если на ее аргумент подействовать любым преобразованием группы

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega(f(\mathbf{x}, t)).$$

Определение 4. Для того чтобы определить инварианты однопараметрической группы в E^n , следует использовать оператор группы L , заданный в виде (16), (17), и по его функциональным коэффициентам $\eta_i(\mathbf{x})$ составить и решить дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0. \quad (21)$$

Из теории линейных операторов первого порядка известно, что оператор L имеет $n-1$ корень, а уравнение в частных производных (21) — $n-1$ функционально независимых решений $\omega_i(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, n-1}$, любое другое решение есть произвольная функция от них. Нахождение корней оператора (21) в развернутом виде

$$\eta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \eta_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \dots + \eta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \omega}{\partial x_n} = 0 \quad (22)$$

приводит к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{\eta_1} = \frac{dx_2}{\eta_2} = \dots = \frac{dx_n}{\eta_n} = dt. \quad (23)$$

Система (23) имеет $n-1$ функционально независимых интегралов, получае-
мых при исключении переменной t из системы решений

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n(t) = \varphi_n(t). \quad (24)$$

Находимые таким способом инварианты будем называть простыми или од-
нократными [7].

Пример 2. Простой инвариант группы растяжений, заданной конечными
уравнениями (19), находится по инфинитезимальному оператору группы (20) как
решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{by},$$

$$\ln y = b \ln x + \ln C, \quad (25)$$

$$y = C x^b. \quad (26)$$

Полученные два функционально зависимых решения задают семейства инва-
риантных относительно несимметричной группы растяжений (19) функций, кото-
рые называются орбитами группы. Решение (26) с учетом произведенной замены
обозначений доказывает, что степенное распределение (2) — единственный тип
распределений, инвариантный относительно изменений масштаба случайной
величины x . Следовательно, простым инвариантом группы несимметричных
растяжений является функция y/x^b , и любая функция от инварианта — также
инвариант. Для идентификации степенных распределений удобно использовать
линейную форму записи функции инварианта в билогарифмических координатах
 $\ln y - b \ln x$, график этой функции показывает, насколько хорошо исследуемый
вид распределения приближается к степенному распределению.

Определение 5. Критерием инвариантности функции $\omega(\mathbf{x}) = \text{const}$, при дей-
ствии на нее однопараметрической группы с инфинитезимальным оператором L ,
является выполнение условия

$$L\omega(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega(\mathbf{x})}{\partial x_i} \equiv 0. \quad (27)$$

Тождество (27) — необходимое и достаточное условие того, что функция $\omega(\mathbf{x})$ —
инвариант группы преобразований, заданной оператором L .

Пример 3. Функция $\ln y - b \ln x = C$ инвариантна относительно группы с ин-
финитезимальным оператором ${}_S L$ вида (20):

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + by \frac{\partial}{\partial y} \right) (\ln y - b \ln x) \equiv 0. \quad (28)$$

Как отмечается в работе [1], во многих статистических исследованиях раз-
личных феноменов наблюдается замечательная закономерность, которая состоит
в том, что гистограммы, построенные в билогарифмических координатах, хорошо
укладываются на прямые линии. Приведенный выше анализ закономерностей как
функционально зависимых инвариантов группы растяжений дает исчерпывающее
объяснение закономерностям степенных распределений.

2.2. Расширенные группы и их инварианты. Для детального анализа структуры спектральных характеристик геофизических полей недостаточно простых (однократных) инвариантов. Необходимо ввести понятие кратных инвариантов, вычисляемых по расширенным группам, которые позволяют использовать кратные инварианты: двойные, тройные и т.д.; такие инварианты называют m -кратными [7]. Кратные инварианты определяются путем введения в рассмотрение двух, трех и более систем переменных. Эти инварианты вычисляются по координатам двух, трех и более точек.

Определение 6. Пусть в пространстве $E^n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана r -параметрическая группа преобразований G с инфинитезимальными операторами L_1, L_2, \dots, L_r . Дважды расширенная группа преобразований $2G$ определяется инфинитезимальными операторами вида

$$L_1 + \bar{L}_1, L_2 + \bar{L}_2, L_i + \bar{L}_i, \dots, L_r + \bar{L}_r,$$

где \bar{L}_i — оператор, который получен из L_i путем замены системы $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системой переменных $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, независимых от переменных \mathbf{x} . В m раз расширенной группе число переменных равно mn . В дважды расширенной группе $2G$ число переменных составляет $2n$.

Если группа $2G$ имеет инварианты, то система уравнений

$$L_i + \bar{L}_i \equiv 0, \quad i = \overline{1, r},$$

имеет нетривиальные решения, среди которых будут двойные инварианты группы.

Определение 7. Критерием инвариантности функции $\omega(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \text{const}$, при действии на нее дважды расширенной группы $2G$, является выполнение условия

$$L_i \omega(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + \bar{L}_i \omega(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \equiv 0, \quad i = \overline{1, r}. \quad (29)$$

Пример 4. Доказать, что степенной показатель b функции $y = C x^b$ является кратным двойным инвариантом группы S несимметричных растяжений (19).

Выразим искомое значение b через неотрицательные координаты двух точек, принадлежащих степенной функции (18): $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. При неизвестном значении постоянной C искомое b определяется из решения системы двух линейных уравнений как коэффициент прямой (25), в билогарифмических координатах

$$b = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1}, \quad (30)$$

где $\ln x_1 \neq \ln x_2$. Используя определение 6, найдем оператор ${}_{2S}L$ расширенной группы несимметричных растяжений

$${}_{2S}L = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + b y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \quad (31)$$

Убедиться в том, что найденное выражение (30) является двойным инвариантом группы S , можно, воспользовавшись определением 7 и критерием инвариантности (29). Действие оператора расширенной группы ${}_{2S}L$ на функцию $\omega(x_1, x_2, y_1, y_2)$ приводит к тождественному нулю:

$$\omega(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1},$$

$$\begin{aligned}
{}_2S L \omega &= \left\{ x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + b y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right\} \left(\frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \right) = \\
&= [x_1 (\ln y_2 - \ln y_1) (\ln x_2 - \ln x_1)^{-2} x_1^{-1}] + [-x_2 (\ln y_2 - \ln y_1) (\ln x_2 - \ln x_1)^{-2} x_2^{-1}] + \\
&\quad + [-b y_1 (\ln x_2 - \ln x_1)^{-1} y_1^{-1}] + [b y_2 (\ln x_2 - \ln x_1)^{-1} y_2^{-1}] \equiv 0.
\end{aligned}$$

3. Поиск залежей углеводородов по спектральным характеристикам растений

3.1. Определение пространственно-спектральных полей методами дистанционного зондирования. В результате дистанционного зондирования земной поверхности с аэрокосмических носителей на цифровых снимках регистрируются образы естественных и искусственных (активная локация) геофизических полей [4]. Гиперспектральная съемка позволяет синтезировать и анализировать картины трехмерного спектрального поля, в определении которого третьей координатой выступает длина электромагнитной волны λ , $U = f(x, y, \lambda)$. Результатом съемки является трехмерный массив данных B (гиперкуб), который образован данными, полученными в результате разложения электромагнитной энергии, поступающей с земной поверхности и регистрируемой сенсором, на сотни соприкасающихся поддиапазонов длин волн

$$B \in \{B_{ijs}, s = \overline{1, L}\}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n},$$

где s — номер спектрального поддиапазона, (i, j) — координаты точки (пиксела) гиперспектрального снимка, B_{ijs} — энергетическая яркость пиксела в спектральном поддиапазоне s . Следовательно, гиперспектральный снимок можно рассматривать как L равных по размерам изображений, каждое из которых характеризует энергию излучения одного участка (области V) земной поверхности в спектральном поддиапазоне s . Каждый пиксел с координатами $r(i, j)$ гиперспектрального снимка (гиперспектральный пиксел) характеризуется спектральной характеристикой: $B_s = \{r_s\}_{s=1}^L; i, j = \text{const}$, которая определяет значение спектрального поля $U = f(\lambda)$ с элементарной поверхности, равной проекции пиксела изображения на земную поверхность, и рассматривается как геометрическая точка поля, спектральная характеристика которой может быть измерена аэрокосмическими гиперспектрометрами. Энергетическая яркость в спектральных характеристиках первоначально задается как коды выходных сигналов сенсоров и далее может быть пересчитана в спектральную плотность энергетической яркости или коэффициент спектральной яркости: $k(\lambda) = \rho(\lambda)/\rho_0(\lambda)$, который равен отношению яркости данной поверхности в заданном направлении к яркости идеальной рассеивающей поверхности при одинаковом освещении. В данном эксперименте измерение спектральных яркостей (характеристик) в точках поля выполнено дистанционно полевым спектрорадиометром и представлено в безразмерных единицах коэффициентов спектральных яркостей.

3.2. Пример определения границы залежи углеводородов по масштабным инвариантам спектрального поля. Описание эксперимента. Многочисленными исследованиями установлено, что пространственно-спектральные характеристики растительного покрова имеют фрактальную структуру, параметры структуры существенно изменяются в аномальных районах, связанных с месторождениями нефти и газа [3]. Формирование биохимических аномалий растительного покрова над залежью углеводородов связывают с вертикальной миграцией газоподобных углеводородов в корнеобразующий слой грунта. Биохимические аномалии и изменения отражательной способности покровов хорошо определяются по изменению

ям спектральных характеристик (спектрограммам) растений. Эти изменения происходят в результате самоорганизации оптической системы листьев, способной дозировать необходимое для нормального развития растения количество поглощаемой и отражаемой световой энергии в ультрафиолетовом и видимом диапазоне спектра солнечного излучения.

Пример идентификации и анализа степенных распределений, наблюдаемых в структуре спектра отражений растительного покрова, приводится на данных, полученных с Глебовского месторождения газа (Крым) [15]. Дистанционное спектрометрирование выполнено полевым спектро радиометром FieldSpec® 3 FR. В момент спектрометрирования (27 мая 2010 г.) на месторождении произрастала пшеница, которая находилась в стадии вегетации. Съемка велась с расстояния 5 м по маршруту протяженностью около 2 км, маршрут пересекал залежь газа с известными координатами границы залежи. Зона видимости местности прибором составляет 18 см по малой оси и 20 см по большой оси эллипса. На маршруте выделено 16 контрольных точек (участков) спектрометрирования, в каждой из которых произведено четыре измерения растительности со спектральным разрешением 1 нм в диапазоне длин электромагнитных волн 350 ÷ 2500 нм, время экспозиции съемки — 0,136 с. Всего поступило в обработку 64 спектрограммы. Цель эксперимента состояла в определении и обосновании индикаторного признака, позволяющего различать границу залежи углеводородов способом дистанционной спектральной съемки.

Идентификация кратных масштабных инвариантов распределений в структуре спектральных данных. Анализ спектрограмм проводился по данным 236 спектральных поддиапазонов электромагнитных волн 424 ÷ 659 нм

$$k_j = U(\lambda_j), \quad j = \overline{424, 659}. \quad (32)$$

На рис. 1, а приведен график спектральной характеристики растительного покрова с первого участка маршрута, который содержит исходные данные для идентификации степенного распределения. На рис. 1, б иллюстрируется результат идентификации кумулятивного степенного распределения относительной частоты (вероятности) по значениям коэффициента спектральной яркости x . Точки обозначают относительное число спектральных поддиапазонов (каналов сенсора), значение коэффициента спектральной яркости в которых больше заданного значения x или равно ему. Приведенный график соответствует кумулятивной функции распределения $F(x)$ (см. подразд. 1.2), вычисленной по соотношению (7) ранговым методом и представленной в билигарифмических координатах. Прямая линия (рис. 1, б) указывает на возможную аппроксимацию распределения простым степенным законом. В билигарифмических координатах кумулятивная функция степенного распределения задается уравнением прямой линии (9) с коэффициентом $(\alpha - 1) = 1,651$, вычисленным по методу наименьших квадратов. Для нахождения степенного показателя функции плотности α , воспользовавшись свой-

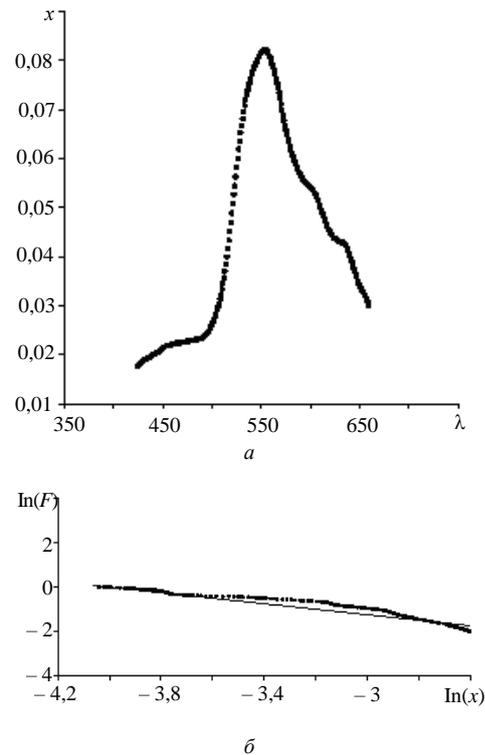


Рис. 1

ством степенного распределения (10), находим искомое $\alpha = 2,651$. В соответствии с основными положениями определения инвариантов расширенных групп преобразований (подразд. 2.2) и результатом решения примера 4, степенной показатель α функции плотности распределения $u(x) = cx^{-\alpha}$ является инвариантом преобразований масштабирования (11), а именно: кратным двойным инвариантом группы несимметричных растяжений вида (19) спектрального поля. Далее, для краткости, эти инварианты именуются как инварианты спектрального поля (x — коэффициент спектральной яркости, λ — длина волны (нм), F — кумулятивная функция).

В таблице (инварианты спектрального поля на 16 участках месторождения газа: α_{ij}) сведены значения 64 инвариантов спектрального поля по маршруту исследования: $\alpha_{ij}, i = \overline{1,4}; j = \overline{1,16}$; где j — номер участка, i — номер измерения на участке.

Таблица

i	α_{i1}	α_{i2}	α_{i3}	α_{i4}	α_{i5}	α_{i6}	α_{i7}	α_{i8}
1	2,639	2,524	2,842	2,805	2,783	2,63	2,517	2,741
2	2,611	2,505	2,787	2,843	2,77	2,485	2,531	2,813
3	2,651	2,449	2,847	2,790	2,734	2,508	2,575	2,803
4	2,672	2,482	2,905	2,751	2,637	2,716	2,526	2,715
i	α_{i9}	α_{i10}	α_{i11}	α_{i12}	α_{i13}	α_{i14}	α_{i15}	α_{i16}
1	3,619	4,105	3,764	3,300	4,140	4,004	3,770	4,147
2	3,663	3,978	3,774	3,371	4,317	4,198	3,883	4,247
3	3,624	3,741	3,775	3,473	4,228	4,101	3,769	4,174
4	3,793	3,849	3,803	3,686	4,213	4,02	4,13	4,198

Для определения границы залежи газа применяется метод пороговой бинарной сегментации участков месторождения по значениям инвариантов спектрального поля (рис. 2, *a, б*): *a*) определение порога сегментации $\alpha_1 = 3,12$ по бимодальному распределению индикаторного признака α_{ij} , *б*) сегментация участков $j = \overline{1,16}$ по порогу α_1 , участки с номерами $j = \overline{9,16}$ содержат залежь газа.

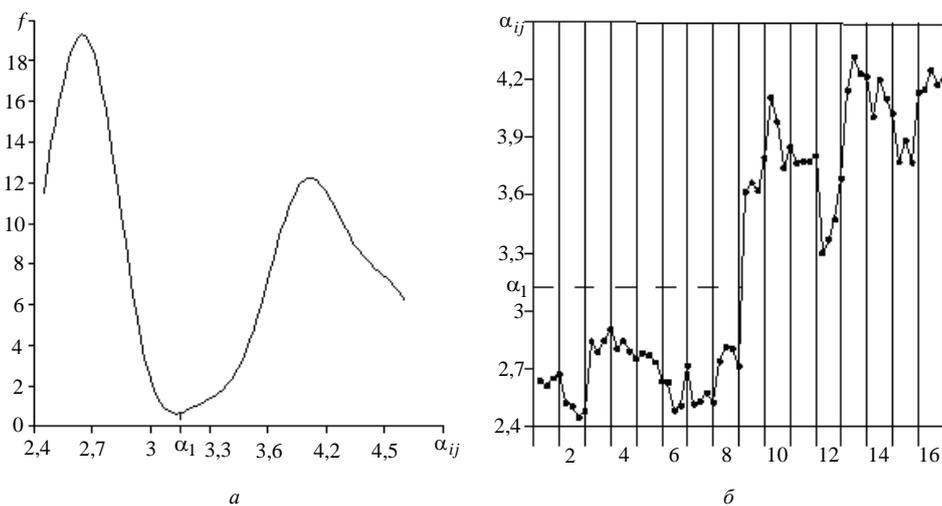


Рис. 2

Если данный материал исследования территории месторождения готовится для наглядного визуального восприятия как фрагмент карты, то сегментация участков может быть выполнена графическими средствами (рис. 3). Для этого уровням яркости картины на мониторе приписываются величины, пропорциональные значениям индикаторного признака α_{ij} . Различная степень контрастности изображения позволяет

проводить многомодальную сегментацию участков. Номера участков на изображении (рис. 3) отложены по горизонтали, значения четырех измерений на участках приведены по вертикали изображения. Максимум контраста приводит к бинарной сегментации и определению границы, которая проходит по участку с номером 9.

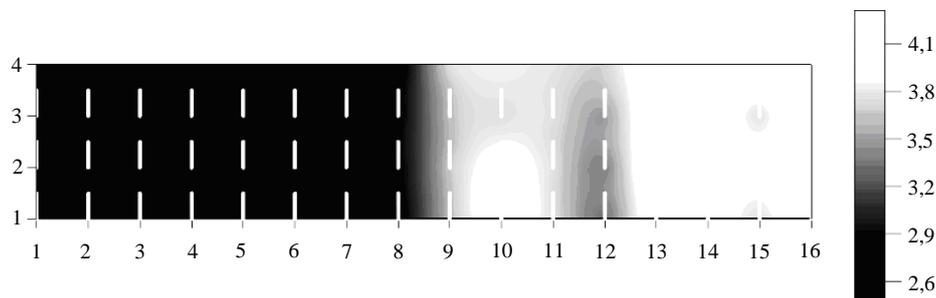


Рис. 3

Таким образом, идентифицируя степенные распределения для каждого гиперспектрального пиксела, можно определить наиболее перспективные участки для буровых работ. Следует также отметить, что автором проведены исследования, которые устанавливают, что в видимой области спектра отражений растительных покровов и листьев деревьев хорошо идентифицируются степенные распределения. Подобное заключение сделано в результате статистического анализа коэффициентов спектральных отражений, полученных при спектрометрировании контактным способом спектрометриром FieldSpec® 3 FR листьев березы, ясеня, липы.

Заключение

Эффективное применение рассмотренного метода статистического анализа спектральных характеристик растительных покровов и спектральных геополей во многом обусловлено появлением новых технологий гиперспектрального дистанционного зондирования и широким распространением степенных распределений в природе. Теория самоорганизованной критичности определяет один из возможных механизмов динамического возникновения степенных распределений. Однако известные многочисленные примеры не распространялись на анализ степенных распределений в спектрах отражений и излучений световых потоков от объектов природы. Степенные распределения в спектрах растительных покровов могут свидетельствовать о том, что механизм поглощения и отражения световой энергии листьями растений можно отнести к явлению самоорганизованной критичности, а численные значения параметров таких распределений позволяют обосновать и использовать методы фитоиндикации для характеристики окружающей среды и выявления аномальных зон.

М.В. Артюшенко

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ СТЕПЕНЕВИХ РОЗПОДІЛІВ ЗА СПЕКТРАЛЬНИМИ ДАНИМИ ДИСТАНЦІЙНОГО ЗОНДУВАННЯ

Розроблено методи та алгоритми оброблення гіперспектральних даних. Для опису структурних особливостей спектрів відбиття проведено синтез неперервної групової масштабно-інваріантної моделі на основі степенного закону розподілу. Наведено приклади розв'язання задач пошуку нафти і газу за спектрами відбиття рослинного покриву.

M.V. Artiushenko

IDENTIFYING AND INTERPRETATION OF POWER-LAW DISTRIBUTIONS FROM SPECTRAL DATA OF REMOTE SENSING

Methods and algorithms for hyperspectral data processing are developed. The synthesis of continuous-group scale-free and power-law distributions models was carried out to describe the structural features of the reflection spectrum. Examples of solving problems of oil and gas exploration by the reflection spectrum of the vegetation cover.

1. *Newman M.E.J.* Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // *J. Contemporary physics.* — 2005. — **46**. — P. 323–351.
2. *Vak P.* How nature works: the science of self-organized criticality. — New York: Copernicus, 1996. — 207 p.
3. *Артиушенко М.В., Подгородецкая Л.В., Федоровский А.Д.* Фрактальный анализ спектрограмм растительного покрова в задачах природопользования // *Доп. НАН України.* — 2010. — № 8. — С. 113–119.
4. *Артиушенко М.В.* Статистический анализ негладких геофизических полей по данным дистанционного зондирования // *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики».* — 2018. — № 3. — С. 72–85.
5. *Артиушенко М.В., Томченко О.В., Подгорняк Д.Л.* Мультифрактальный анализ морфологических изменений в структуре водных объектов по космическим снимкам // *Доп. НАН України.* — 2017. — №2. — С. 41–49.
6. *Барьяхтар В.Г., Гончар В.Ю., Яновский В.В.* Природа сложной структуры пятна загрязнения радионуклидами в результате аварии на ЧАЭС // *Украинский физический журнал.* — 1993. — **38**, № 7. — С. 967–975.
7. *Чеботарев Н.Г.* Теория групп Ли. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 400 с.
8. *Постников М.М.* Группы и алгебры Ли. — М. : Наука, 1982. — 447 с.
9. *Федер Е.* Фракталы. — М. : Мир, 1991. — 254 с.
10. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *Journal of Statistical Physics.* — 1978. — **19**. — P. 25–52.
11. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М. : Постмаркет. — 2000. — 352 с.
12. *Avalanche dynamics in a pile of rice / V. Frette, K. Christensen, A. Maltche-Sorensen, J. Feder, T. Jossang, P. Meakin // Nature.* — 1995. — **379**. — P. 49–52.
13. *Johnston A.C., Nava S.* Recurrence raters and probability estimates for the New Madrid seismic zone // *J. of Geophysical Research.* — 1985. — **90**. — P. 6737–6753.
14. *Diodati P., Marchesoni F., Piazza S.* Acoustic emission from volcanic rocks: an example of self-organized criticality // *Physical Review Letters.* — 1991. — **67**, N 17. — P. 2239–2243.
15. *Дослідження варіацій індексів червоного краю спектрів відбиття пшениці над газовим родовищем / В.І. Лялько, З.М. Шпортюк, О.М. Сибірцева, С.С. Дугін, А.І. Воробійов // Космічна наука і технологія.* — 2010. — **16**, № 6. — С. 5–10.

Получено 24.04.2018