УДК 517. 97

З.Р. Сафарова

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С РАЗРЫВОМ

Ключевые слова: коэффициент, уравнение колебаний, разрыв, оптимальное управление, необходимое условие.

Введение

В последнее время обратным задачам об определении коэффициентов различных уравнений с частными производными уделяется большое внимание [1–4]. Среди этих задач особое место занимают задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений. Это, прежде всего, связано с тем, что такие задачи появляются в различных областях науки — физике, геофизике, сейсмологии и т.д. [1, 2, 5, 6]. При исследовании таких задач возникает ряд существенных трудностей, связанных с их сильной нелинейностью и некорректностью. Кроме того, при рассмотрении распределенных систем с особенностями исследование вышеотмеченных задач еще более затруднено [7]. Для решения коэффициентных обратных задач для уравнений с частными производными существуют различные методы [1, 2]. А для решения задач оптимального управления в системах с распределенными параметрами, уравнение состояния которых представляет особенности типа разрыва, существует метод адаптированного штрафа [7]. В настоящей работе рассматривается задача определения коэффициента при правой производной в уравнении колебаний струны, состояния которой имеют особенность типа разрыва. Поставленная задача сводится к задаче оптимального управления и исследуется методами теории оптимального управления. Доказывается теорема существования оптимальной пары в новой задаче, дифференцируемость по Фреше построенного функционала и выводится сингулярная система оптимальности, причем необходимое условие оптимальности получается в форме вариационного неравенства.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения пары функций $(z(x,t), v(x)) \in W_2^1(Q) \times V$ из следующих соотношений:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - z^3 + v\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,t), (x,t) \in Q \equiv (0,l)\times(0,T), \qquad (1)$$

$$z(x,0) = z^0(x), \frac{\partial z(x,0)}{\partial t} = z^1(x), x \in [0,l], \qquad (2)$$

$$z(0,t)=0,\ z(l,t)=0,\ t\in[0,T], \tag{3}$$

$$z(x,T)=\varphi(x),\ x\in[0,l], \tag{4}$$

$$V=\left\{v\in W_2^1[0,l]:\alpha\le v(x)\le\beta,\ \left|\frac{dv}{dx}\right|\le\mu \text{ почти всюду в } [0,l]\right\}. \tag{5}$$

$$z\in L_6(Q), \tag{6}$$

где $l>0$, $T>0$, $\alpha,\beta,\mu>0$ — заданные числа, $f\in L_2(Q)$, $z^0\in \overset{0}{W}{}_2^1[0,l]$, $z^1\in L_2(0,l)$, $\varphi\in \overset{0}{W}{}_2^1[0,l]$ — заданные функции. Задачу (1)–(6) сводим к следующей задаче оптимального управления: найти минимум функционала

$$J_0(v,z)=\frac{1}{2}\int_0^l[z(x,T)-\varphi(x)]^2dx \tag{7}$$

при ограничениях (1)–(3), (5), (6).

Отметим, что задача (1)–(3) при заданных v, f, z^0, z^1 не имеет глобального решения по t [7]. Поэтому надо рассмотреть множество пар $\{v,z\}$, удовлетворяющих (1)–(3), (5), (6). Пара $\{v,z\}$ называется управление–состояние [7]. Пару $\{v,z\}$ назовем допустимой, если удовлетворяются соотношения (1)–(3), (5), (6).

$$\text{Предположим, что множество допустимых пар не пусто.} \tag{8}$$

Отметим, что если выполняется условие (6), при заданной функции $v(x)$ из V краевая задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ [8, с. 209–215], и это решение обладает свойствами $z\in L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1[0,l])$, $\frac{\partial z}{\partial t}\in L_\infty(0,T;L_2(0,l))$ [9, с. 300]. Между задачами (1)–(6), (1)–(3) и (5)–(8) существует тесная связь — если задача (1)–(3), (5)–(8) имеет такое решение $\{v_0,z_0\}$, что $\min\limits_{\{v,z\}}J_0(v,z)=J_0(v_0,z_0)$, то дополнительное условие (4) выполняется.

Теперь вместо задачи (1)–(3), (5)–(8) рассмотрим следующую задачу.

На множестве допустимых пар минимизировать функционал

$$J(v,z)=J_0(v,z)+\frac{1}{6}\|z-z_d\|_{L_6(Q)}^6, \tag{9}$$

где $z_d\in L_6(Q)$ — заданная функция.

2. Существование оптимальной пары

Теорема 1. Пусть выполняются предполагаемые выше условия на данные задачи (1)–(3), (5)–(9). Тогда в этой задаче существуют оптимальные пары, т.е.

$$J(u,y)=\inf J(v,z), \tag{10}$$

где пары $\{v,z\}$ допустимы.

Доказательство. Пусть $\{v_k,z_k\}$ — минимизирующая последовательность, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}J(v_k,v_k)=\inf J(v,z). \tag{11}$$

Тогда из определения множества V и функционала (9) следует, что

$$\|v_k\|_{W_2^1[0,\,l]} \le c,\ \|z_k(x,T)\|_{L_2(0,\,l)} \le c,\ \|z_k\|_{L_6(Q)} \le c,\ k=1,2,\ldots,$$

где c — различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых пар. В силу теоремы вложения $W_2^1[0,l] \to C[0,l]$ (см. [8, с. 84])

$$v_k \to u \ \text{ в } C[0,l] \ \text{ при } k \to \infty. \tag{12}$$

Ясно, что правая часть уравнения

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^2} + v_k \frac{\partial z_k}{\partial x} = f + z_k^3$$

ограничена в $L_2(Q)$. Поэтому в силу известных результатов [8, 9] следует, что

$$\|z_k\|_{L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1[0,l])} + \left\|\frac{\partial z_k}{\partial t}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,l))} \le c,\ k=1,2,\ldots. \tag{13}$$

В силу теоремы вложения $W_2^1[0,l] \to C[0,l]$ из (13) вытекает, что

$$\|z_k\|_{L_\infty(Q)} \le c,\ k=1,2,\ldots,\ \text{и } \{z_k\} \subset K \subset L_\lambda(Q)$$

для любого конечного λ (K — относительно компактное множество). Тогда из $\{v_k, z_k\}$ можно выбрать такую подпоследовательность, обозначаемую $\{v_k, z_k\}$, что при $k \to \infty$

$$\begin{gathered}
z_k \to y \ \ast\text{–слабо в } L_\infty(0,T;\ \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)),\\
\frac{\partial z_k}{\partial t} \to \frac{\partial y}{\partial t} \ \ast\text{–слабо в } L_\infty(0,T;L_2(0,l)),\\
z_k \to y \text{ сильно в } L_\lambda(Q) \text{ и почти всюду в } Q,\\
z_k(x,T) \to y(x,T) \text{ в } C[0,l].
\end{gathered}$$

Тогда можно перейти к пределу: $\{u, y\}$ — допустимая пара. А поскольку

$$\varliminf_{k\to\infty} J(v_k, z_k) \ge J(u,y), \tag{14}$$

из (10) и (14) следует, что $\{u, y\}$ — оптимальная пара.

Теорема доказана.

3. Сингулярная система оптимальности

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $\{u, y\}$ — оптимальная пара в задаче (1)–(3), (5)–(9). Тогда существует такая функция $\psi(x,t)$, что $\psi \in L_\infty(0,T;H^{\frac{2}{3}}(0,l))$, $\frac{\partial\psi}{\partial t} \in L_\infty(0,T;H^{-\frac{1}{3}}(0,l))$ и для тройки $\{u, y, \psi\}$ выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y^3 + u\frac{\partial y}{\partial x} = f,\ (x,t) \in Q, \tag{15}$$

$$y(x,0) = z^0(x), \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = z^1(x), x \in [0,l], \tag{16}$$

$$y(0,t) = y(l,t) = 0,\ t \in [0,T],$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 3y^2\psi - \frac{\partial}{\partial x}(u\psi) = (y - z_d)^5,\ (x,t) \in Q, \tag{17}$$

$$\psi(x,T) = 0,\ \frac{\partial \psi(x,T)}{\partial t} = -[y(x,T) - \varphi(x)],\ x \in [0,l],$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0,\ t \in [0,T] \tag{18}$$

и

$$\int_0^l \left(\int_0^T \psi(x,t) y(x,t) dt \right) (v(x) - u(x)) dx \geq 0 \ \forall v \in V, \tag{19}$$

где $H^{\frac{2}{3}}(0,l)$, $H^{-\frac{1}{3}}(0,l)$ — пространства Соболева дробного порядка [9].

Доказательство. Введем адаптированный функционал со штрафом к паре $\{u, y\}$ [7]:

$$J_\varepsilon^a(v,z) = J(v,z) + \frac{1}{2\varepsilon} \left\| \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - z^3 + v \frac{\partial z}{\partial x} \right\|_{L_2(Q)}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \| z - y \|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \| v - u \|_{L_2(0,l)}^2 \tag{20}$$

для функций $v, z,$ удовлетворяющих условиям

$$v \in V,\ z \in L_6(Q),\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \in L_2(Q),$$

$$z(x,0) = z^0(x),\ \frac{\partial z(x,0)}{\partial t} = z^1(x),\ x \in [0,l], \tag{21}$$

$$z(0,t) = z(l,t) = 0,\ t \in [0,T],$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр штрафа.

Рассмотрим задачу нахождения минимума функционала (20) при условиях (21). Как в теореме 1, можно показать, что существует решение $\{u_\varepsilon, y_\varepsilon\}$ этой задачи, т.е.

$$J_\varepsilon^a(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon^a(v,z), \tag{22}$$

где $\{v, z\}$ удовлетворяет (21).

Лемма. Пусть $\{u_\varepsilon, y_\varepsilon\}$ — какое-нибудь решение задачи (22). Тогда при $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u$ в $C[0,l]$, $y_\varepsilon \to y$ сильно в $L_6(Q)$, где $\{u, y\}$ — выбранная оптимальная пара в задаче (1)–(3), (5)–(9).

Доказательство. Ясно, что

$$J_\varepsilon^a(u_\varepsilon, y_\varepsilon) = \inf J_\varepsilon^a(v,z) \leq J_\varepsilon^a(u,y) = J(u,y). \tag{23}$$

Отсюда по определению множества V и функционала $J_\varepsilon^a(v,z)$ получаем

$$\| u_\varepsilon \|_{W_2^1[0,l]} \leq c,\ \ \| y_\varepsilon \|_{L_6(Q)} \leq c,$$

а также

$$\frac{\partial^2 y_\varepsilon}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y_\varepsilon}{\partial x^2}-y_\varepsilon^3+u_\varepsilon\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial x}= f_\varepsilon\cdot\sqrt{\varepsilon},\ (x,t)\in Q, \tag{24}$$

$$\begin{gathered} y_\varepsilon(x,0)=z^0(x),\ \frac{\partial y_\varepsilon(x,0)}{\partial t}=z^1(x),\ x\in[0,l], \\ y_\varepsilon(0,t)=y_\varepsilon(l,t)=0,\ t\in[0,T], \end{gathered} \tag{25}$$

где $f_\varepsilon(x,t)$ такая функция, что $\|f_\varepsilon\|_{L_2(Q)}\le c,\ \ \forall\varepsilon>0.$

Отсюда следует, что

$$\|y_\varepsilon\|_{L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1[0,l])}\le c,\ \ \left\|\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L_\infty(0,T;\,L_2(0,l))}\le c,\ \ \|y_\varepsilon(x,T)\|_{\overset{0}{W}{}_2^1[0,l])}\le c.$$

По теореме вложения $W_2^1[0,l]\to C[0,l]$

$$\|y_\varepsilon\|_{L_\infty(Q)}\le c \text{ в } \ y_\varepsilon(x,T)\to\hat{y}(x,T),$$

$$u_\varepsilon(x)\to\hat{u}(x) \text{ в } C[0,l] \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Следовательно, можно извлечь из $\{u_\varepsilon, y_\varepsilon\}$ такую подпоследовательность (снова обозначим ее $\{u_\varepsilon, y_\varepsilon\}$), что при $\varepsilon\to 0$ $y_\varepsilon(x,T)\to\hat{y}(x,T),$ $u_\varepsilon(x)\to\hat{u}(x)$ в $C[0,l],$ $y_\varepsilon\to\hat{y}$ сильно в $L_\lambda(Q)$ и почти всюду в $Q,$ где λ — любое конечное число

$$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial\hat{y}}{\partial x},\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}\to\frac{\partial\hat{y}}{\partial t}\text{слабо в } L_2(Q),$$

причем первая компонента пары $\{\hat{u},\hat{y}\}$ принадлежит $V,$ вторая компонента пары $\{\hat{u},\hat{y}\}$ — обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ следующей задачи:

$$\frac{\partial^2\hat{y}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\hat{y}}{\partial x^2}-(\hat{y})^3+\hat{u}\frac{\partial\hat{y}}{\partial x}= f(x,t),\ (x,t)\in Q,$$

$$\hat{y}(x,0)=z^0(x),\ \frac{\partial\hat{y}(x,0)}{\partial t}=z^1(x),\ x\in[0,l],$$

$$\hat{y}(0,t)=\hat{y}(l,t)=0,\ t\in[0,l].$$

Тогда неравенство

$$J_\varepsilon^a(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\ge J(u_\varepsilon,y_\varepsilon)+\frac{1}{2}\|y-\hat{y}\|_{L_2(Q)}^2+\frac{1}{2}\|u-\hat{u}\|_{L_2(0,l)}^2$$

приводит к неравенству

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\, J_\varepsilon^a(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\ge J(\hat{u},\hat{y})+\frac{1}{2}\|y-\hat{y}\|_{L_2(Q)}^2+\frac{1}{2}\|u-\hat{u}\|_{L_2(0,l)}^2.$$

В силу (23) $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\, J_\varepsilon^a(u_\varepsilon,y_\varepsilon)\le J(u,y).$ Поэтому $J(\hat{u},\hat{y})\le J(u,y).$ Отсюда получается, что $\frac{1}{2}\|u-\hat{u}\|_{L_2(0,l)}^2+\frac{1}{2}\|y-\hat{y}\|_{L_2(Q)}^2=0,$ так что $\hat{u}=u,\hat{y}=y.$

Поскольку $J_\varepsilon^a(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \ge J(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ и $\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} J(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \le J(u, y)$, очевидно, что $J(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \to J(u, y)$, отсюда по определению $J(v, z)$ получаем, что $y_\varepsilon \to y$ сильно в $L_6(Q)$ при $\varepsilon \to 0$.

Лемма доказана.

Доказательство. Продолжим доказательство теоремы 2. Запишем необходимые условия того, что $\{u_\varepsilon, y_\varepsilon\}$ — решение задачи (22).

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon^a(u_\varepsilon, y_\varepsilon + \lambda\zeta)|_{\lambda=0} = 0\ \forall\zeta \in C^2(\overline{Q}),\ \zeta(x, 0) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial\zeta(x, 0)}{\partial t} = 0 \text{ в } (0, l), \zeta(0, t) = \zeta(l, t) = 0 \text{ в } (0, T),$$

$$\frac{d}{d\lambda} J_\varepsilon^a(u_\varepsilon + \lambda(v - u_\varepsilon), y_\varepsilon)|_{\lambda=0} \ge 0\ \forall v \in V,\ u_\varepsilon \in V. \tag{27}$$

Чтобы выразить эти условия проще, положим

$$\psi_\varepsilon(x, t) = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 y_\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_\varepsilon}{\partial x^2} - y_\varepsilon^3 + u_\varepsilon \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial x}\right).$$

Тогда из (26) следует, что

$$-\int_Q \psi_\varepsilon\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - 3y_\varepsilon^2\zeta + u_\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)dxdt + \int_Q (y_\varepsilon - z_d)^5\zeta dxdt +$$

$$+\int_Q (y_\varepsilon - y)\zeta dxdt + \int_0^l (y_\varepsilon(x,T) - \varphi(x))\zeta(x,T)dx = 0, \forall\zeta \in C^2(\overline{Q}),$$

$$\zeta(x,0) = 0, \frac{\partial\zeta(x,0)}{\partial t} = 0 \text{ в } (0, l), \zeta(0, t) = \zeta(l, t) = 0 \text{ в } (0, T), \tag{28}$$

а (27) приводит к

$$\int_Q \psi_\varepsilon y_\varepsilon(v - u_\varepsilon)dxdt + \int_0^l (u_\varepsilon - u)(v - u_\varepsilon)dx \ge 0 \quad \forall v \in V. \tag{29}$$

Соотношение (28) означает, что $\psi_\varepsilon(x, t)$ — слабое решение задачи

$$\frac{\partial^2\psi_\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi_\varepsilon}{\partial x^2} - 3y_\varepsilon^2\psi_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x}(u_\varepsilon\psi_\varepsilon) = (y - z_d)^5 + (y_\varepsilon - y), \tag{30}$$

$$\begin{gathered}\psi_\varepsilon(x, T) = \frac{\partial\psi_\varepsilon(x, T)}{\partial t} = -[y_\varepsilon(x, T) - \varphi(x)], \text{ в } [0, l],\\ \psi_\varepsilon(0,t) = \psi_\varepsilon(l,t) = 0, \text{ в } (0,T).\end{gathered} \tag{31}$$

Из результатов работы [7, с. 163–164; 167–168] следует, что справедлива оценка

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L_\infty(0, T; H^{\frac{2}{3}}(0, l))} + \left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_\infty(0, T; H^{-\frac{1}{3}}(0, l))} \le c.$$

Учитывая эту оценку и доказанную лемму, перейдем к пределу в соотношениях (24), (25), (29)–(31) и получим, что выполняются соотношения (15)–(19).

Теорема доказана.

 ISSN 0572-2691

Заключение

В работе задача определения коэффициента при правой производной в уравнении колебаний струны, состояния которой имеют особенность типа разрыва, сводится к задаче оптимального управления. В новой задаче доказывается теорема существования оптимальной пары, дифференцируемость функционала по Фреше и выводится необходимое условие оптимальности в форме вариационного неравенства, которое может использоваться при разработке численных методов решения рассматриваемой задачи.

З.Р. Сафарова

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ДЛЯ ПОХІДНОЇ В РІВНЯННІ КОЛИВАНЬ СТРУНИ ІЗ РОЗРИВОМ

Розглянуто задачу визначення коефіцієнта для правої похідної в рівнянні коливань струни. Поставлену задачу зведено до задачі оптимального керування. Доказано теорему існування оптимальної пари у новій задачі, диференційовність по Фреше побудованого функціонала та виведено необхідну умову оптимальності у формі варіаційної нерівності.

Ключові слова: коефіцієнт, рівняння коливань, розрив, оптимальне керування, необхідна умова.

Z.R. Safarova

ON FINDING THE COEFFICIENTS OF DERIVATIVE IN THE STRING VIBRATION EQUAION WHICH HAS DISCONTINUITY

It is studied the problem of finding the coefficient of first order derivative in the string vibration equation. Considering problem is reduced to the optimal control problem. In the new problem, the existence of an optimal pair and Frechet differentiability of he functional are proved, the necessary condition for optimality in the form of variational inequality is derived.

Keywords: coefficient, vibration equation, discontinuity, optimal control, necessary condition

1. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск. : НГУ, 2001. 315с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : Сиб. научное изд-во, 2009. 457 с.
3. Обратные задачи для эволюционных уравнений. *Сиб. электрон. матем. изв.* Ю.Е. Аниконов, Н.Л. Абашеева, Н.Б. Аюпова, А.И. Кожанов, М.В. Нещадим, И.Р. Валитов. 2008. **5**. С. 549–580.
4. Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений. *Тр. ИММ УрО РАН.* 2012. **18**, № 1. С. 147–164.
5. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск : Наука, 1972. 164 с.
6. Романов В.Г. Одномерная обратная задача для волнового уравнения. *Докл. АН СССР.* 1973. **211**, № 5. С. 1083–1084.
7. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М. : Наука, 1987. 368 с.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 405 с.
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М. : Мир 1971. 372 с.

Получено 26.06.2018