УДК 517.5

А.М. Поддубный

ОЦЕНКА СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОБРАЗАМИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА АБЕЛЯ–ПУАССОНА НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: игровые задачи динамики, краевая задача, моделирование, классы функций Никольского, операторы.

Введение

В современных прикладных разработках актуальна проблема избежания столкновений между движущимися объектами. Актуальность данной проблемы не вызывает никаких сомнений, так как это напрямую связано с безопасностью движения в морских и аэропортах. Именно знание динамических возможностей движущихся объектов и моделирование этих процессов позволяют диспетчерским службам планировать безаварийное функционирование. Вполне понятно, что на практике все это невозможно без теории игровых задач динамики [1–3]. К тому же, в прикладной математике широкое применение, в том числе и к игровым задачам динамики, имеют так называемые краевые задачи и их решения. Именно одно из таких решений краевой задачи [4] исследуется в данной статье в целях изучения дифференциальных свойств при различных значениях параметров.

1. Постановка задачи и описание операторов типа Абеля–Пуассона

Пусть $\mathbb{D}:=\{z\in \mathrm{C}:|z|<1\}$, $\mathbb{T}:=\partial\mathbb{D}$, $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p<\infty$, — пространство функций f, суммируемых на $\mathbb{T}$ в p-й степени с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T})}=\left(\int_0^{2\pi}\left|f(e^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p}$$

и

$$K_l(\rho e^{it}):=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k^l}\cos kt \ \ (0<\rho<1,\ l>0).$$

Следуя из [5, 6], оператор P_l, определенный на $L_p(\mathbb{T})$ формулой

$$P_l(f)(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})K_l(ze^{-it})dt \ \ (z\in\mathbb{D}),$$

называется оператором типа Абеля–Пуассона [7].

Отметим, что $K_1 (l=1)$ совпадает с ядром Пуассона [8, 9], а оператор P_1 является обычным оператором Пуассона, или Абеля–Пуассона [10, 11]. В случае $l=2$ видим, что K_2 является ядром Вейерштрасса и, соответственно, P_2 — оператором Вейерштрасса [12]. Аппроксимативным свойствам как операторов Пуассона, так и операторов Вейерштрасса в свое время было посвящено много работ [13–21]. Но что касается исследований для более общих операторов, чем операторы Пуассона и Вейерштрасса, то здесь успехи более умеренные. Поэтому цель этой статьи — исследование дифференциальных свойств операторов типа Абеля–Пуассона P_l. При натуральных значениях l, как показано в [4], оператор P_l воспроизводит все формальные решения краевой задачи для уравнения (в полярных координатах)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{(-1)^{l+1}}{\rho^2}\frac{\partial^{2l} u}{\partial \theta^{2l}} = 0 \tag{1}$$

с условием

$$u(\theta, \rho)\big|_{\rho=1} = f(e^{i\theta}), \tag{2}$$

т.е. формальное решение задачи (1) и (2) имеет вид

$$u(\theta, \rho) = P_l(f)(\rho e^{i\theta}).$$

Здесь равенство (2) понимается так, что

$$\lim_{\rho \to 1-} \int_0^{2\pi} \left| u(\theta, \rho) - f(e^{i\theta}) \right|^p d\theta = 0.$$

2. Исследование скорости приближения образами операторов типа Абеля–Пуассона функций, имеющих заданную мажоранту типа второго модуля непрерывности *r*-й производной суммами Валле–Пуссена порядка $(n, 2n)$, в интегральной метрике $L_p(\mathbb{D})$

При алгоритмизации задач прикладной математики важно, каким свойствам должна удовлетворять функция двух переменных $g(t, \rho) := P_l(f)(\rho e^{it})$, определенная на $[0, 2\pi] \times [0,1)$, если $f \in \mathfrak{N}$ — некоторый класс функций, определенных и суммируемых на круге $\mathbb{T}$, которые имеют определенные характеристические свойства. Ряд свойств оператора P_l в контексте этой задачи установлен Я.С. Бугровым в [4, 22], где в качестве $\mathfrak{N}$ брались классы Никольского $H_p^{(r)}(\mathbb{T})$ и Бесова $B_p^{(r)}(\mathbb{T})$.

В данной работе продолжено исследование Я.С. Бугрова и указано на одно из свойств образов операторов P_l в случае, когда в качестве класса $\mathfrak{N}$, откуда действует оператор, берутся классы специальных функций $W^{(r)}H_p^{\omega_2}(\mathbb{T})$, которые определяются следующим образом.

Пусть

$$\Delta_{h,\theta}^2 u(\rho e^{i\theta}) := u(\rho e^{i(\theta+h)}) - 2u(\rho e^{i\theta}) + u(\rho e^{i(\theta-h)}), \quad \Delta_{h,\rho}^2 u(\rho e^{i\theta}) := u((\rho+2h)e^{i\theta}) -$$

$$- 2u((\rho+h)e^{i\theta}) + u(\rho e^{i\theta}), \quad u_\theta^{(k)}(\rho e^{i\theta}) := \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} u(\rho e^{i\theta}), \quad u_\rho^{(k)}(\rho e^{i\theta}) := \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} u(\rho e^{i\theta})$$

и ω_2 — функция типа модуля непрерывности второго порядка.

Тогда обозначим $L_p(\mathbb{D})$, $1 \le p < \infty$, пространство функций, определенных в круге $\mathbb{D}$, для которых

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{i\theta}) \right|^p \rho \, d\rho \, d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

Определение 1. Пусть f — функция, заданная на $\mathbb{T}$, $r \in Z_{+} := N \cup \{0\}$, $1 \le p < \infty$. Говорят, что функция $f \in W^{(r)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{T})$, если она является суммируемой в p-й степени вместе со своими обобщенными производными (в смысле Соболева) $f_\theta^{(k)}$, $k = \overline{1, r}$, и

$$\left\| \Delta_{h,\theta}^2 f_\theta^{(r)} \right\|_{L_p(\mathbb{T})} = O(1)\omega_2(h), \ (0 < h < 1),$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно h.

Аналогично результатам из работы [4] оказалось, что оператор P_l переводит класс $W^{(r)} H^{\omega_2}(\mathbb{T})$ в его так называемые «телесные» аналоги — классы $W_\theta^{(r)} H_p^{\omega_2}$ и $W_\rho^{(r_1)} H_\rho^{\omega_2}$, которые определяются следующим образом.

Определение 2. Пусть u — функция, заданная в круге $\mathbb{D}$, $r \in Z_{+}$, $1 \le p < \infty$. Говорят, что $u \in W_\theta^{(r)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{D})$, если существуют обобщенные производные $u_\theta^{(k)}$, $k = \overline{1, r}$, такие, что $\left\| u_\theta^{(k)} \right\|_{L_p(\mathbb{D})} < \infty$, $k = \overline{0, r}$, и кроме этого,

$$\left\| \Delta_{h,\theta}^2 u_\theta^{(r)} \right\|_{L_p(\mathbb{D})} = O(1)\omega_2(h), \ (0 < h < 1),$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно h.

Определение 3. Пусть u — функция, заданная в круге $\mathbb{D}$, $r \in Z_{+}$, $1 \le p < \infty$. Говорят, что $u \in W_\rho^{(r)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{D})$, если существуют обобщенные производные $u_\rho^{(k)}$, $k = \overline{1, r}$, такие, что $\left\| u_\rho^{(k)} \right\|_{L_p(\mathbb{D})} < \infty$, $k = \overline{0, r}$, и кроме этого,

$$\left\| \Delta_{h,\rho}^2 u_\rho^{(r)} \right\|_{L_p(\mathbb{D}),\, 2h} := \left(\int_0^{1-2h} \int_0^{2\pi} \left| \Delta_{h,\rho}^2 u_\rho^{(r)}(\rho e^{i\theta}) \right|^p \rho \, d\theta \, d\rho \right)^{1/p} =$$
$$= O(1)\omega_2(h), \ (0 < h < 1/2),$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно h.

Определение 4. Если r_1, $r_2 \in Z_{+}$, $1 \le p < \infty$, тогда

$$W^{(r_1,\, r_2)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{D}) = W_\theta^{(r_1)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{D}) \cap W_\rho^{(r_2)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{D}).$$

Пусть

$$S_0(f)(e^{it}) = f(e^{it}), \ \ S_n(f)(e^{it}) := \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{f}(k) e^{ikt}, \ \ n = \overline{1, \infty},$$

— частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ и

$$V_n(f)(e^{it}) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_{k+n}(f)(e^{it})$$

— соответствующая ей сумма Валле–Пуссена.

 ISSN 0572-2691

Теорема. Пусть $l \in \mathrm{N}$, $r \in \mathrm{Z}_+$, $1 \le p < \infty$. Если $f \in W^{(r)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{T})$, то

$$\left\| P_l(f - V_n(f)) \right\|_{L_p(\mathbb{D})} = O(1) \frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r+\frac{l}{p}}}, \ (n \in \mathrm{N}), \qquad (3)$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n.

Доказательство. Так как $f \in W^{(r)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{T})$, производные $f_\theta^{(k)}$, $k = \overline{1, r}$, являются непрерывными на $\mathbb{T}$, а это дает возможность написать равенство

$$\frac{\partial^k}{\partial \theta^k} P_l(f)(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_\theta^{(k)}(e^{i(t+\theta)}) K_l(\rho e^{it}) dt, \ k = \overline{1, r}.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\Delta_{h,\theta}^2 \left(\frac{\partial^k}{\partial \theta^k} P_l(f)(\rho e^{i\theta}) \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{h,\theta}^2 f_\theta^{(k)}(e^{i(t+\theta)}) K_l(\rho e^{it}) dt.$$

Отсюда, используя неравенство Минковского, получаем

$$\left\| \Delta_{h,\theta}^2 \left(\frac{\partial^r}{\partial \theta^r} P_l(f) \right) \right\|_{L_p(\mathbb{D})} = \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \Delta_{h,\theta}^2 \left(\frac{\partial^r}{\partial \theta^r} P_l(f)(\rho e^{i\theta}) \right) \right|^p d\theta \rho d\rho \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_{h,\theta}^2 f_\theta^{(r)}(e^{i(t+\theta)}) K_l(\rho e^{it}) dt \right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p} p} \rho d\rho \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left| K_l(\rho e^{it}) \right| \left(\int_0^{2\pi} \left| \Delta_{h,\theta}^2 f_\theta^{(r)}\left(e^{i(t+\theta)}\right) \right|^p d\theta \right)^{1/p} dt \right)^p \rho d\rho \right)^{1/p} \le$$

$$\le C_1 \omega_2(h) \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left| K_l(\rho e^{it}) \right| dt \right)^p \rho d\rho \right)^{1/p} \le C \omega_2(h), \qquad (4)$$

Следуя [23], здесь и далее обозначим C абсолютные постоянные (зависимые, возможно, от параметров p, r, l), разные для каждого отдельного случая.

Поскольку, согласно условию, $f \in W^{(r)} H_p^{\omega_2}(\mathbb{T})$, по теореме Джексона [24, с. 204] существует последовательность тригонометрических полиномов $\{T_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ степеней, соответственно, не более n, такая, что

$$\left\| f - T_n \right\|_{L_p(\mathbb{T})} = O(1) \frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r} \ (n \in \mathrm{N}), \qquad (5)$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n.

Здесь под тригонометрическим полиномом степени n понимаем функцию вида

$$T_n(e^{it}) := \sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k e^{ikt}, \ |c_{-n}|+|c_n| \neq 0 \quad (n \in \mathrm{N}).$$

Хорошо известно [24, с. 121], что

$$V_n(T_n) = T_n \ \text{и} \ \| V_n(f) \|_{L_p(\mathbb{T})} \leq C \| f \|_{L_p(\mathbb{T})} \ \forall f \in L_p(\mathbb{T}),$$

поэтому согласно (5)

$$\| f - V_n(f) \|_{L_p(\mathbb{T})} \leq C \frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r} + \| V_n(f - T_n) \|_{L_p(\mathbb{T})} = O(1) \frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r} \quad (n \in \mathrm{N}). \tag{6}$$

Далее

$$P_l(f - V_n(f))(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) - V_n(f)(e^{it})) K_l(ze^{-it})\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) - V_n(f)(e^{it})) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho^{k^l} \cos kt \right) dt \quad (z = \rho e^{it}).$$

Применяя дважды к подынтегральной сумме преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho^{k^l} \cos kt = -\rho^{n^l} D_{n-1}(t) - n \Delta \rho^{n^l} F_{n-1}(t) + \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \rho^{n^l} F_k(t),$$

где

$$D_k(t) := \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \cos \nu t, \ \ F_k(t) := \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} D_\nu(t), \ \ \Delta \rho^{k^l} := \rho^{k^l} - \rho^{(k+1)^l},$$

$$\Delta^2 \rho^{k^l} := \Delta \rho^{k^l} - \Delta \rho^{(k+1)^l} = \rho^{k^l} - 2\rho^{(k+1)^l} + \rho^{(k+2)^l}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) - V_n(f)(e^{it})) D_{n-1}(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) - V_n(f)(e^{it})) F_{n-1}(t) dt = 0,$$

то

$$P_l(f - V_n(f))(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) - V_n(f)(e^{it})) K_l(ze^{-it}) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(e^{it}) - V_n(f)(e^{it})) \left(\sum_{k=n}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \rho^{k^l} F_k(t) \right) dt \quad (z = \rho e^{it}).$$

Отсюда, используя обобщенное неравенство Минковского и неравенство (6) и учитывая детали из соотношения (4), имеем

$$\| P_l(f - V_n(f)) \|_{L_p(\mathbb{D})} \leq \| f - V_n(f) \|_{L_p(\mathbb{T})} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) \Delta^2 \rho^{k^l} F_k(t) \right| dt \right)^p \rho d\rho \right)^{1/p}. \tag{7}$$

 ISSN 0572-2691

Оценим теперь второй множитель в (7)

$$\left(\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)\Delta^2\rho^{k^l}F_k(t)\right|dt\right)^p\rho d\rho\right)^{1/p}\le\left(\int_0^1\left(\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\rho^{k^l}\right|\int_0^{2\pi}\left|F_k(t)\right|dt\right)^p\times\right.$$

$$\left.\times\rho d\rho\right)^{1/p}=\left(\int_0^1\left(\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\rho^{k^l}\right|\right)^p\rho d\rho\right)^{1/p}\le\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)\left(\int_0^1\left|\Delta^2\rho^{k^l}\right|^p d\rho\right)^{1/p}. \quad (8)$$

В последнем неравенстве использовано неравенство Минковского.

Для оценки интеграла в (8) сделаем замену $\rho=e^{-x}$, $d\rho=-e^{-x}dx$, тогда

$$I_{k,\,l}:=\left(\int_0^1\left|\Delta^2\rho^{k^l}\right|^p d\rho\right)^{1/p}=\left(\int_0^{\infty}\left|\Delta^2 e^{-xk^l}\right|^p e^{-x}dx\right)^{1/p}.$$

Заметим, что

$$\Delta_h^2 f(y)=\int_0^h(h-u)\,f''_{yy}(y+u+h)du+\int_0^h uf''_{yy}(y+u)du,$$

поэтому для $f(y)=e^{-x(k+y)^l}$ при $h=1,\ y=0$ получим

$$\Delta^2 e^{-xk^l}=\int_0^1(1-u)\,(-xl(l-1)(k+u+1)+x^2l^2(k+u+1)^{2l-2})\times$$

$$\times e^{-x(k+u+1)^l}du+\int_0^1 u(-xl(l-1)(k+u)^{l-2}+x^2l^2(k+u)^{2l-2})e^{-x(k+u)^l}du.$$

Отсюда, согласно неравенству Минковского, имеем

$$I_{k,\,l}\le C\left(\int_0^1\left(\int_0^{\infty}x^pe^{-xp(k+u+1)^l}dx\right)^{1/p}(k+u+1)^{l-2}du+\int_0^1\left(\int_0^{\infty}x^{2p}e^{-px(k+u+1)^l}dx\right)^{1/p}\times\right.$$

$$\times(k+u+1)^{2l-2}du+\int_0^1\left(\int_0^{\infty}x^pe^{-xp(k+u)^l}dx\right)^{1/p}(k+u)^{l-2}du+$$

$$\left.+\int_0^1\left(\int_0^{\infty}x^{2p}e^{-xp(k+u)^l}dx\right)^{1/p}\times(k+u)^{2l-2}du\right).$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty}x^pe^{-ax}dx=\frac{\tilde{A}(p+1)}{a^{p+1}},\ \ (p>-1,\ a>0),$$

окончательно для $I_{k,\,l}$ получим оценку

$$I_{k,\,l}\le C\int_0^1\frac{du}{(k+u+1)^{2+l/p}}\le C\frac{1}{k^{2+l/p}}.$$

Таким образом, подставляя найденную оценку $I_{k,\,l}$ в (8) и учитывая (4) и (6), получим

$$\left\|P_l(f-V_n(f))\right\|_{L_p(\mathbb{D})}\le C\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{1+l/p}}\le C\frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{r+l/p}}\quad(n\in\mathrm{N}).$$

Теорема доказана.

Заключение

В процессе проведенных выше исследований доказана теорема об оценке скорости приближения образами операторов типа Абеля–Пуассона функций, имеющих заданную мажоранту типа второго модуля непрерывности r-й производной суммами Валле–Пуссена порядка $(n, 2n)$, в интегральной метрике $L_p(\mathbb{D})$. Так как в полученной оценке (3) параметр l — любое натуральное число, доказанная теорема — не только обобщение ранее известных в этом направлении исследований, как для операторов Пуассона ($l = 1$), так и операторов Вейерштрасса ($l = 2$), но и существенное их усиление, что значительно расширяет применение в прикладной математике решенной в работе задачи, например, для метода разрешающих функций игровых задач динамики [25–28].

О.М. Піддубний

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ НАБЛИЖЕННЯ ОБРАЗАМИ ОПЕРАТОРІВ ТИПУ АБЕЛЯ–ПУАССОНА ДЕЯКИХ СПЕЦІАЛЬНИХ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ

Досліджено властивості операторів типу Абеля–Пуассона, які мають широкий спектр застосувань в різних галузях наукових досліджень. Особлива увага приділяється апроксимаційним та диференціальним властивостям операторів типу Абеля–Пуассона. Зокрема, знайдено оцінку швидкості наближення образами операторів типу Абеля–Пуассона функцій, що мають задану мажоранту типу другого модуля неперервності r-ї похідної сумами Валле–Пуссена порядку $(n, 2n)$, в інтегральній метриці $L_p(D)$. Для розгляду в подальшому диференціальних властивостей операторів типу Абеля–Пуассона наведено визначення класів функцій, які є узагальненням класів диференційовних функцій С.М. Нікольського. Оператори типу Абеля–Пуассона є одними з основних, які використовуються в дійсному і комплексному аналізі та математичній фізиці і на їх образи, що є функціями диференційовними, та часто сприймаються як розв'язки відомих крайових задач. Тому отриманий в роботі результат може бути використано для вивчення граничних властивостей операторів типу Абеля–Пуассона і примикає до аналогічних результатів Я.С. Бугрова. Крім цього, є можливість використання описаних властивостей цих операторів в теорії ігрових задач динаміки, що особливо актуально в наш час, наприклад, при знаходженні стаціонарних цілей, які зазнали аварії і знаходяться в практично недосяжних місцях, при розробці комп'ютерних систем пошуку і спостереження за рухомими об'єктами, при аналізі і моделюванні групової взаємодії між рухомими об'єктами. Такі задачі часто виникають при обслуговуванні морського і повітряного транспорту.

Ключові слова: ігрові завдання динаміки, крайова задача, моделювання, класи функцій Нікольського, оператори.

A.M. Piddubnyi

ESTIMATE OF THE RATE OF APPROXIMATION BY THE IMAGES OF OPERATORS OF ABEL–POISSON TYPE OF SOME SPECIAL CLASSES OF FUNCTIONS

The properties of Abel–Poisson type operators, which have a wide range of applications in various fields of scientific research are studied. Special attention is paid to the approximation and differential properties of operators of Abel–Poisson type. In particular, an estimate was obtained for the approximation rate by the images of operators of Abel–Poisson type for functions having a given majorant of the type of the second modulus of continuity of the r-derivative Vall–Poussin sum of order $(n, 2n)$ in the integral metric $L_p(D)$. For further consideration of the differential properties of operators of Abel–Poisson type, the paper presents definitions of classes of functions that are a generalization of classes of differentiable functions of S.M. Nikol'skii. Operators of the Abel–Poisson type are among the main ones used in real and complex analysis and mathematical physics, and their images, which are differentiable functions, are often viewed as solutions of known boundary value problems. Therefore, the result obtained in the paper can be used to study the boundary properties of operators of Abel–Poisson type and is adjacent to the similar results of Ya.S. Bugrov. In addition, it is possible to use the described properties of these operators in the theory of game dynamics problems, which is especially important nowadays, for example, in finding stationary targets that have crashed and are in practically inaccessible places when developing computer search systems and monitoring moving objects, in the analysis and modeling of group interaction between moving objects. Such tasks often arise in the maintenance of sea and air transport.

Keywords: game problems of dynamics, boundary value problem, modeling, classes of Nikol'skii functions, operators.

1. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. **271**, N 1. P. 69–85. DOI: 10.1134/s0081543810040073.
2. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Generalized Mittag-Leffler matrix functions in game problems for evolutionary equations of fractional order. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. **36**, N 3. P. 315–338. DOI: 10.1007/BF02732983.
3. *Chikrii A.A., Eidelman S.D.* Control game problems for quasilinear systems with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2001. **37**, N 6. P. 836–864. DOI: 10.1023/A:1014529914874.
4. Бугров Я.С. Неравенства типа Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка. *Mathematica* (Cluj). 1963. **5**, № 28. С. 5–25.
5. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$. *Ukr. Math*. J. 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
6. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of function from class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric. *Ukr. Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
7. Baskakov V.A. Some properties of operators of Abel–Poisson type. *Mathematical Notes.* 1975. **17**, N 2. P.101–107.
8. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math*. 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
9. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
10. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators. *Ukr. Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
11. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
12. Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukr. Math. J*. 2007. **59**, N 9. P. 1342–1363. DOI: 10.1007/s11253-007-0091-3.
13. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. Acta Comment. Univ. Tartu. Math. 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.

14. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukr. Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
15. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukr. Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
16. KharkevychYu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$. *Mathematical Notes*. 2014. **96**, N 5–6. P. 1008–1019. DOI: 10.1134/ s0001434614110406.
17. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukr. Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
18. Zhyhallo T.V. Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson–Chebyshev integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 5. P. 34–48. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i5.40.
19. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$. *Journal of Mathematical Sciences (United States).* 2018. **231**, N 1. P. 41–47. DOI: 10.1007/s10958-018-3804-2.
20. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximation of functions from the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$ by Weierstrass integrals. *Ukr. Math. J.* 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x.
21. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukr. Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
22. Бугров С.Я. Свойства решений дифференциальных уравнений высшего порядка в терминах весовых классов. *Труды Мат. ин-та АН СССР*. 1972. **117**. С. 47–61.
23. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukr. Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.
24. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. 602 с.
25. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. **27**, N 1. P. 27–38.
26. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. Pareto optimality, game theory and equilibria. Springer Optimization and Its Applications. New York: Springer, 2008. **17**. P. 349–387. DOI: 10.1007/978-0-387-77247-9_13.
27. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in a parabolic system. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016. **293**. P. 254–269. DOI: 10.1134/ s0081543816050229.
28. Dziubenko K.G., Chikrii A.A. An approach problem for a discrete system with random perturbations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. **46**, N 2. P. 271–281. DOI: 10.1007/s10559-010-9204-3.

Получено 05.02.2019