УДК 517.988

С.В. Денисов, Д.А. Номировский, Б.В. Рублев, В.В. Семенов

СХОДИМОСТЬ ЭКСТРАГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА С МОНОТОННОЙ РЕГУЛИРОВКОЙ ШАГА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ И ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ*

Ключевые слова: слабая сходимость, экстраградиентный алгоритм Корпелевич, вариационное неравенство, операторное уравнение, псевдомонотонность, квазинерастягивающий оператор, неподвижная точка.

Введение

Множество актуальных задач исследования операций и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств [1–6], которые особенно популярны сейчас в математической экономике, математическом моделировании транспортных потоков и теории игр [3, 4]. Заметим, что с появлением генерирующих состязательных нейронных сетей (generative adversarial network, GAN) устойчивый интерес к алгоритмам решения вариационных неравенств возник и в среде специалистов в области машинного обучения [7].

Для решения вариационных неравенств к настоящему времени предложено множество методов, в частности проекционного типа (использующих операцию метрического проектирования на допустимое множество) [4, 8–23].

Наиболее известным обобщением метода проекции градиента для вариационных неравенств является экстраградиентный метод Г.М. Корпелевич [8], исследованию которого посвящено большое количество публикаций [9–19]. В частности, предлагались модификации алгоритма Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [11–17]. В так называемых субградиентных экстраградиентных алгоритмах [14–17] и алгоритме Корпелевич первые этапы итерации совпадают, а далее для получения следующего приближения, вместо проектирования на допустимое множество, осуществляют проектирование на некоторое опорное для допустимого множества полупространство.

Для вариационных неравенств одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского [18]. Данный метод можно интерпретировать как вариант экстраградиентного метода с проектированием, понимаемым в смысле расхождения Брэгмана. Он позволяет иногда эффективно использовать структуру допустимого множества

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МОН Украины (проект «Математичне моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0219U008403).

задачи. Например, для симплекса в качестве расстояния можно взять расхождение Кульбака–Лейблера (расхождение Брэгмана, построенное по отрицательной энтропии) и получить явно вычисляемый оператор проектирования на симплекс. В [19] предложена модификация субградиентного экстраградиентного алгоритма [14, 15] с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния. А в работах [20, 21] исследованы двухэтапные проксимальные зеркальные методы — брэгмановские модификации алгоритма [22].

В последнее время в теории некорректных задач сформировалось направление исследований, связанное с решением некорректно поставленных задач с априорной информацией [24–26]. Это класс задач, для которых наряду с базовым уравнением или неравенством известна дополнительная информация об искомом решении, заданная в форме некоторых соотношений и ограничений, содержащих важные сведения об изучаемом объекте. Учет этой информации в алгоритме, как правило, играет решающую роль для повышения точности решения некорректной задачи. Особенно это важно при решении прикладных задач в случае неединственности, поскольку позволяет выделить решение, отвечающее физической реальности. В работах [24–26] для операторных уравнений I-го рода развита техника представления дополнительных ограничений на решение в виде включений в множество неподвижных точек псевдосжимающих отображений и исследованы одношаговые итерационные процессы, являющиеся суперпозицией некоторой базовой схемы и схемы Красносельского–Манна. В [16, 17] для монотонных вариационных неравенств с априорными условиями изучены методы, являющиеся суперпозицией модифицированного алгоритма Корпелевич и алгоритма Гальперна [27] или Красносельского–Манна.

Настоящая работа является продолжением статей [16, 17], она посвящена алгоритму приближенного решения вариационных неравенств (или операторных уравнений) в гильбертовом пространстве H и с дополнительными условиями вида включения в множество неподвижных точек заданного оператора. Точнее, необходимо найти элемент $x \in C,$ такой, что

$$(Ax, y-x) \geq 0 \quad \forall y \in C \text{ и } x = Sx,$$

где $C \subseteq H,$ $A: H \to H,$ $S: H \to H.$ Предлагается модифицированный экстраградиентный алгоритм с монотонной регулировкой величины шага, не требующей знания константы Липшица оператора, входящего в вариационное неравенство. В отличие от применяемых ранее правил выбора величины шага [9, 16, 17], в данном алгоритме не выполняются дополнительные вычисления значений оператора и отображения проектирования. Доказана слабая сходимость алгоритма для задач с псевдомонотонными, липшицевыми, секвенциально слабо непрерывными операторами и квазинерастягивающими операторами, задающими дополнительные условия.

Вспомогательные сведения и постановка задачи

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$.

Пусть P_C — оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество $C,$ т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством $\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|$. Полезны следующие характеризации элемента $P_C x$ [28]:

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C \text{ и } (y-x, z-y) \geq 0 \quad \forall z \in C, \tag{1}$$

$$y = P_C x \Leftrightarrow y \in C \text{ и } \|y-z\|^2 \leq \|x-z\|^2 - \|y-x\|^2 \quad \forall z \in C. \tag{2}$$

Напомним, что оператор $T: H \to H$ называют квазинерастягивающим, если $F(T)=\{x\in H: Tx=x\}\neq\varnothing$ и $\|Tx-y\|\leq\|x-y\|$ для всех $x\in H$, $y\in F(T)$ [28]. Множество неподвижных точек $F(T)$ квазинерастягивающего оператора замкнуто и выпукло [28]. Оператор $S: C\to H$ называют демизамкнутым в $y\in H$, если для последовательности точек $x_n\in C$ из $x_n\to x$ слабо и $Sx_n\to y$ сильно следует $Sx=y$ [28]. Для нерастягивающего оператора $T: C\to H$ оператор $I-T$ демизамкнут в нуле [28].

Пусть C — непустое подмножество пространства H, A — оператор, действующий в H. Вариационным неравенством называют задачу

$$\text{найти } x\in C:\ (Ax, y-x)\geq 0 \quad \forall y\in C. \tag{3}$$

Множество решений (3) обозначим $VI(A, C)$. Из неравенства (1) следует, что $x\in VI(A, C)$ тогда и только тогда, когда

$$x=P_C(x-\lambda Ax),$$

где $\lambda>0$ [1]. Оператор называют псевдомонотонным, если для всех x, $y\in H$ из $(Ax, y-x)\geq 0$ следует $(Ay, y-x)\geq 0$ [4]. Если оператор $A: H\to H$ псевдомонотонный и непрерывный, а множество $C\subseteq H$ выпуклое и замкнутое, то $x\in VI(A, C)$ тогда и только тогда, когда $x\in C$ и $(Ay, y-x)\geq 0$ для всех $y\in C$ [4]. Кроме того, множество $VI(A, C)$ выпуклое и замкнутое.

При доказательстве слабой сходимости последовательностей элементов гильбертова пространства используем известную лемму Опяла [28].

Лемма 1. Пусть последовательность (x_n) элементов гильбертова пространства H слабо сходится к элементу $x\in H$. Тогда для всех $y\in H\setminus\{x\}$ имеем $\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x\|<\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$.

Рассмотрим задачу поиска решения вариационного неравенства (1), являющегося неподвижной точкой заданного оператора S:

$$\text{найти } x\in VI(A, C)\cap F(S). \tag{4}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

• множество $C\subseteq H$ — выпуклое и замкнутое;

• оператор $A: H\to H$ — псевдомонотонный, липшицевый и секвенциально слабо непрерывный;

• оператор $S: H\to H$ — квазинерастягивающий, такой, что оператор $I-S$ демизамкнутый в нуле;

• множество $VI(A, C)\cap F(S)$ не пусто.

Замечание 1. Пусть $g: H\to\mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая функция. Если множество $D=\{x\in H:\ g(x)\leq 0\}\neq\varnothing$ не пусто, то его можно трактовать как множество неподвижных точек квазинерастягивающего оператора

$$Sx=\begin{cases} x-\dfrac{g(x)}{\|g'(x)\|^2}g'(x), & \text{если } x\notin D,\\ x, & \text{если } x\in D,\end{cases}$$

где $g'(x) \in H$ — производная g в точке $x \in H$ [25]. Для демизамкнутости в нуле оператора $I - S$ достаточно ограниченности g на любом ограниченном множестве [25].

Замечание 2. Если оператор A монотонный, то результаты статьи справедливы без предположения о секвенциальной слабой непрерывности оператора A.

Экстраградиентный алгоритм с монотонной регулировкой величины шага

Для поиска элементов множества $VI(A, C) \cap F(S)$ рассмотрим следующий алгоритм, являющийся суперпозицией модифицированного экстраградиентного алгоритма с монотонной регулировкой величины шага и алгоритма Красносельского–Манна.

Алгоритм 1

Инициализация. Выбираем элемент $x_1 \in H$, $\tau \in (0,1)$, положительное число λ_1 и последовательность $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0,1)$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить
$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n).$$

Шаг 2. Вычислить
$$z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n),$$
где
$$T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \le 0\}.$$

Шаг 3. Вычислить
$$x_{n+1} = \delta_n x_n + (1 - \delta_n) S z_n.$$

Шаг 4. Вычислить
$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\| y_n - x_n \|}{\| A y_n - A x_n \|}\right\}, & \text{если } A x_n \ne A y_n, \\ \lambda_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $n := n + 1$ и перейдем к шагу 1.

Замечание 3. В отличие от правил выбора λ_n из работ [9, 16, 17], в алгоритме 1 не производится дополнительных вычислений значений оператора A и проекций P_C.

Замечание 4. Имеем $C \subseteq T_n$. Действительно, если существует точка $w \in C \setminus T_n$, то неравенство
$$(x_n - \lambda_n A x_n - y_n, w - y_n) > 0$$
противоречит равенству $y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$.

Перейдем к доказательству слабой сходимости алгоритма 1.

Сходимость алгоритма

Вначале докажем важные неравенства, связывающие расстояния от порожденных алгоритмом точек до множества решений задачи (4).

Лемма 2. Для последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство
$$\| z_n - z \|^2 \le \| x_n - z \|^2 - (1 - \mu_n) \| y_n - x_n \|^2 - (1 - \mu_n) \| z_n - y_n \|^2,$$
где $z \in VI(A, C)$, $\mu_n = \tau(\lambda_n / \lambda_{n+1})$.

Доказательство. Пусть $z \in VI(A, C)$. Запишем тождество

$$\|z_n - z\|^2 = \|x_n - z\|^2 - \|z_n - x_n\|^2 + 2(z_n - x_n, z_n - z). \tag{5}$$

Из определения точек z_n следует

$$\lambda_n (Ay_n, z - z_n) + (z_n - x_n, z - z_n) \geq 0. \tag{6}$$

Используя неравенство (6) для оценки скалярного произведения в (5), получаем

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|z_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n (Ay_n, z - z_n). \tag{7}$$

Второе слагаемое в правой части (7) представим в виде

$$\|z_n - x_n\|^2 = \|z_n - y_n\|^2 + \|y_n - x_n\|^2 + 2(y_n - x_n, z_n - y_n).$$

Получаем

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|z_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 +$$

$$+2(x_n - \lambda_n Ay_n - y_n, z_n - y_n) + 2\lambda_n (Ay_n, z - y_n).$$

Из псевдомонотонности оператора A следует

$$(Ay_n, z - y_n) \leq 0.$$

Таким образом,

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|z_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 +$$

$$+2(x_n - \lambda_n Ay_n - y_n, z_n - y_n). \tag{8}$$

Поскольку $z_n \in T_n$,

$$(x_n - \lambda_n Ay_n - y_n, z_n - y_n) = \underbrace{(x_n - \lambda_n Ax_n - y_n, z_n - y_n)}_{\leq 0} +$$

$$+\lambda_n (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n) \leq \lambda_n (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n). \tag{9}$$

Учитывая (9) в (8), получаем

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|z_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n). \tag{10}$$

Слагаемое $2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n)$ оценим следующим образом:

$$2\lambda_n (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n) \leq 2\lambda_n \|Ax_n - Ay_n\| \|z_n - y_n\| \leq$$

$$\leq 2\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \tau \|x_n - y_n\| \|z_n - y_n\| \leq \mu_n \|x_n - y_n\|^2 + \mu_n \|z_n - y_n\|^2.$$

Применив последнюю оценку в (10), получим

$$\|z_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - z_n\|^2 + \mu_n \|x_n - y_n\|^2 + \mu_n \|z_n - y_n\|^2,$$

что и требовалось доказать. ■

Лемма 3. Для последовательностей (x_n), (y_n) и (z_n), порожденных алгоритмом 1, имеет место неравенство

$$\|x_{n+1}-z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - (1-\delta_n)(1-\mu_n)\|y_n - x_n\|^2 -$$

$$-(1-\delta_n)(1-\mu_n)\|z_n - y_n\|^2 - \delta_n(1-\delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2,$$

где $z \in VI(A, C) \cap F(S)$.

Доказательство. Поскольку оператор S является квазинерастягивающим, для всех $z \in VI(A,C) \cap F(S)$ получаем

$$\|x_{n+1}-z\|^2 \le \|\delta_n(x_n - z) + (1-\delta_n)(Sz_n - z)\|^2 =$$

$$= \delta_n\|x_n - z\|^2 + (1-\delta_n)\|Sz_n - z\|^2 - \delta_n(1-\delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 \le$$

$$\le \delta_n\|x_n - z\|^2 + (1-\delta_n)\|z_n - z\|^2 - \delta_n(1-\delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2. \qquad (11)$$

Используя неравенство леммы 2 в (11) для оценки слагаемого $(1-\delta_n)\|z_n - z\|^2$, получаем желаемый результат. ■

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Последовательности (x_n), (y_n) и (z_n), порожденные алгоритмом 1, слабо сходятся к некоторой точке $z \in VI(A, C) \cap F(S)$.

Доказательство. Последовательность (λ_n) неубывающая и ограничена снизу числом $\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{L}\right\}$, где L — постоянная Липшица оператора A. Следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$. Поскольку

$$1-\mu_n = 1-\tau(\lambda_n / \lambda_{n+1}) \to 1-\tau \in (0,1) \text{ при } n \to \infty,$$

из леммы 3 можем сделать вывод, что для некоторого $\theta \in (0,1)$ и $m \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\|x_{n+1}-z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - (1-\delta_n)\theta\|y_n - x_n\|^2 -$$

$$-(1-\delta_n)\theta\|z_n - y_n\|^2 - \delta_n(1-\delta_n)\|x_n - Sz_n\|^2 \quad \forall n \ge m, \qquad (12)$$

где $z \in VI(A,C) \cap F(S)$.

Из неравенства (12) следует, что последовательность (x_n) фейеровская относительно множества $VI(A,C) \cap F(S)$, т.е.

$$\|x_{n+1}-z\|^2 \le \|x_n - z\|^2 \quad \forall n \ge m \quad \forall z \in VI(A, C) \cap F(S).$$

В частности, последовательность (x_n) ограничена. Кроме того, имеют место неравенства

$$\|x_n - y_n\|^2 + \|z_n - y_n\|^2 \le \frac{\|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2}{(1-\delta_n)\theta},$$

 ISSN 0572-2691

$$\| x_n - Sz_n \|^2 \leq \frac{\| x_n - z \|^2 - \| x_{n+1} - z \|^2}{\delta_n (1 - \delta_n)}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = \lim_{n\to\infty} \| z_n - y_n \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n - Sz_n \| = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), слабо сходящуюся к некоторой точке $z \in H$. Тогда (y_{n_k}), (z_{n_k}) слабо сходятся к z и $z \in C$. Покажем, что $z \in VI(A, C)$. Предположим, что $Az \neq 0$ (в противном случае доказывать нечего, т.е. $z \in VI(A, C)$). Имеем

$$(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} Ax_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{14}$$

Отсюда

$$0 \leq \frac{(y_{n_k} - x_{n_k} + \lambda_{n_k} Ax_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} = \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} +$$

$$+ (Ax_{n_k} - Ay_{n_k}, x - y_{n_k}) + (Ay_{n_k}, x - y_{n_k}).$$

Совершив предельный переход при $k \to \infty$, получим

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} (Ay_{n_k}, x - y_{n_k}) \geq 0. \tag{15}$$

Из (15) следует существование для каждого $k \in \mathbb{N}$ такого наименьшего числа $m_k \in \mathbb{N}$, что

$$(Ay_{n_i}, x - y_{n_i}) \geq -2^{-k} \text{ для всех } i \geq m_k.$$

Последовательность (m_k) возрастающая. Из секвенциальной слабой непрерывности оператора A и слабой полунепрерывности нормы получаем

$$0 < \| Az \| \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \| Ay_{n_{m_k}} \|. \tag{16}$$

Можно считать, что $Ay_{n_{m_k}} \neq 0$. Положим $v_k = \| Ay_{n_{m_k}} \|^{-2} Ay_{n_{m_k}}$. Очевидно, что

$$(Ay_{n_{m_k}}, v_k) = 1 \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$(Ay_{n_{m_k}}, x + 2^{-k} v_k - y_{n_{m_k}}) \geq 0.$$

Из псевдомонотонности оператора A следует

$$(A(x + 2^{-k} v_k), x + 2^{-k} v_k - y_{n_{m_k}}) \geq 0.$$

Отсюда получаем

$$(Ax, x - y_{n_{m_k}}) \geq (Ax - A(x + 2^{-k} v_k), x + 2^{-k} v_k - y_{n_{m_k}}) - 2^{-k} (Ax, v_k). \tag{17}$$

Из (16) следует ограниченность сверху последовательности $\| v_k \| = \| Ay_{n_{m_k}} \|^{-1}$. Следовательно, $\lim_{k\to 0} 2^{-k} \| v_k \| = 0.$ Совершив предельный переход в (17), получим

$$(Ax, x - z) = \lim_{k\to\infty} (Ax, x - y_{n_{m_k}}) = \varliminf_{k\to\infty} (Ax, x - y_{n_{m_k}}) \ge 0 \quad \forall x \in C.$$

Следовательно, $z \in VI(A, C)$.

Осталось показать, что $z \in F(S)$. Поскольку

$$\| z_n - Sz_n \| \le \| z_n - y_n \| + \| y_n - x_n \| + \| x_n - Sz_n \| ,$$

из (13) следует $\lim_{n\to\infty} \| z_n - Sz_n \| = 0.$

Оператор $I - S$ демизамкнутый в нуле. Следовательно, из $z_{n_k} \to z$ слабо и $\lim_{k\to\infty} \| z_{n_k} - Sz_{n_k} \| = 0$ получаем, что $z \in F(S)$.

Покажем теперь, что $x_n \to z$ слабо. Тогда из (13) будет следовать и слабая сходимость к z последовательностей (y_n), (z_n). Рассуждаем от противного. Пусть существует подпоследовательность (x_{m_k}), такая, что $x_{m_k} \to z'$ слабо и $z \ne z'$. Ясно, что $z' \in VI(A, C) \cap F(S)$. Применим дважды лемму Опяла. В результате имеем

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - z \| = \varliminf_{k\to\infty} \| x_{n_k} - z \| < \varliminf_{k\to\infty} \| x_{n_k} - z' \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n - z' \| =$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \| x_{m_k} - z' \| < \varliminf_{k\to\infty} \| x_{m_k} - z \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n - z \| ,$$

что невозможно. Таким образом, $z = z'$. ■

Замечание 5. В случае монотонности оператора A предельный переход в неравенстве (14) для доказательства $z \in VI(A, C)$ осуществляется без предположения о секвенциальной слабой непрерывности. Действительно, тогда имеем

$$0 \le \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + (Ax_{n_k}, x - x_{n_k}) \le$$

$$\le \frac{(y_{n_k} - x_{n_k}, x - y_{n_k})}{\lambda_{n_k}} + (Ax_{n_k}, x_{n_k} - y_{n_k}) + (Ax, x - x_{n_k}).$$

Совершив предельный переход, получим

$$(Ax, x - z) \ge 0 \quad \forall x \in C,$$

т.е. $z \in VI(A, C)$.

Замечание 6. Слабый предел $z \in VI(A, C) \cap F(S)$ порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n) имеет свойство $P_{VI(A,C)\cap F(S)} x_n \to z$ сильно [28]. Если множество $VI(A, C) \cap F(S)$ является аффинным многообразием, то $x_n \to P_{VI(A,C)\cap F(S)} x_0$ сильно [28].

 ISSN 0572-2691

Вариант алгоритма для операторного уравнения с априорной информацией

Рассмотрим теперь операторное уравнение с априорной информацией, заданной в виде множества неподвижных точек квазинерастягивающего оператора $T : H \to H$:

$$Ax = f, \quad x \in F(T), \tag{18}$$

где $f \in H$. Подобные задачи рассматривались ранее в монографии [26].

Алгоритм 1 для задачи (18) принимает следующий вид.

Алгоритм 2

Инициализация. Выбираем элемент $x_1 \in H$, $\tau \in (0,1)$, положительное число λ_1 и последовательность $(\delta_n) \subseteq [a, b] \subseteq (0,1)$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = x_n - \lambda_n (Ax_n - f).$$

Шаг 2. Вычислить

$$z_n = x_n - \lambda_n (Ay_n - f).$$

Шаг 3. Вычислить

$$x_{n+1} = \delta_n x_n + (1 - \delta_n) T z_n.$$

Шаг 4. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\| y_n - x_n \|}{\| Ay_n - Ax_n \|}\right\}, & \text{если } Ax_n \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $n := n + 1$ и перейдем к шагу 1.

Частным случаем теоремы 1 является следующий результат.

Теорема 2. Пусть оператор $A : H \to H$ — псевдомонотонный, липшицевый и секвенциально слабо непрерывный, оператор $T : H \to H$ — квазинерастягивающий, причем оператор $I - T$ демизамкнутый в нуле. Предположим, что $A^{-1} f \cap F(T) \neq \varnothing$ для $f \in H$. Тогда последовательности (x_n), (y_n) и (z_n), порожденные алгоритмом 2, слабо сходятся к некоторой точке $z \in$ $\in A^{-1} f \cap F(T)$.

Заключение

В работе рассмотрены вариационные неравенства (операторные уравнения) в гильбертовом пространстве и с дополнительными условиями вида включения в множество неподвижных точек заданного оператора. Для приближенного решения задач предложен алгоритм, являющийся суперпозицией модифицированного экстраградиентного алгоритма с монотонной регулировкой величины шага, не требующей знания константы Липшица оператора, и схемы Красносельского–Манна аппроксимации неподвижных точек. В отличие от применяемых ранее правил выбора величины шага, в данном алгоритме не производится дополнительных вычислений значений оператора и отображения проектирования. Основной результат — теорема о слабой сходимости алгоритма для задач с псевдомонотонными, липшицевыми, секвенциально слабо непрерывными операторами и квазинерастягивающими операторами, задающими дополнительные условия. Сильно сходящийся вариант алгоритма можно получить, используя метод итеративной регуляризации или гибридный метод из [29], что будет сделано в одной из ближайших работ.

С.В. Денисов, Д.А. Номіровський, Б.В. Рубльов, В.В. Семенов

ЗБІЖНІСТЬ ЕКСТРАГРАДІЄНТНОГО АЛГОРИТМУ З МОНОТОННИМ РЕГУЛЮВАННЯМ КРОКУ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто варіаційні нерівності та операторні рівняння в нескінченновимірному гільбертовому просторі та з додатковими умовами виду включення в множину нерухомих точок заданого оператора. Для наближеного розв'язання задач запропоновано новий ітераційний алгоритм, що є суперпозицією модифікованого екстраградієнтного алгоритму Корпелевич з монотонним регулюванням величини кроку, що не вимагає знання константи Ліпшиця оператора, та схеми Красносельського–Манна апроксимації нерухомих точок. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, в запропонованому алгоритмі не проводиться додаткових обчислень значень оператора і відображення проектування. Алгоритм досліджувався за допомогою теорії ітераційних фейєрівських процесів. Доведено слабку збіжність алгоритму для задач з псевдомонотонними, ліпшицевими, секвенційно слабко неперервними та квазінерозтягуючими операторами, що задають додаткові умови. Раніше аналогічні результати про слабку збіжність були відомі тільки для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими та з нерозтягуючими операторами, що задають додаткові умови.

Ключові слова: слабка збіжність, екстраградієнтний алгоритм Корпелевич, варіаційна нерівність, операторне рівняння, псевдомонотонність, квазінерозтягуючий оператор, нерухома точка.

S.V. Denisov, D.A. Nomirovskii, B.V. Rublyov, V.V. Semenov

CONVERGENCE OF EXTRAGRADIENT ALGORITHM WITH MONOTONE STEP-SIZE STRATEGY FOR VARIATIONAL INEQUALITIES AND OPERATOR EQUATIONS

A variational inequalities and operator equations in an infinite dimensional Hilbert space with additional conditions for the type of inclusion in the set of fixed points of a given operator are considered. For an approximate solution of the problems, a novel iterative algorithm that is a superposition of a modified Korpelevich extragradient algorithm with monotone step-size strategy that does not require knowledge of the Lipschitz constant of operator, and the Krasnoselskii–Mann scheme for approximating fixed points, is proposed. In contrast to the previously used rules for choosing the step size, the proposed algorithm does not perform additional calculations for the operator values and the projections mapping. The algorithm was investigated using the theory of iterative processes of the Fejer type. The weak convergence of the algorithm for problems with pseudo-monotone, Lipschitz-continuous, and sequentially weakly continuous operators and quasi-nonexpansive operators, which specify additional conditions is proved. Previously, similar results on weak convergence were known only for variational inequalities with monotone, Lipschitz-continuous operators and with nonexpansive operators, which specify additional conditions.

Keywords: weak convergence, Korpelevich extragradient algorithm, variational inequality, operator equation, pseudo-monotonicity, quasi-nonexpansive operator, fixed point.

1. Kinderlehrer D., Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York : Academic Press, 1980. Russian transl., Moscow : Mir, 1983. 256 p.
2. Baiocchi C., Capello A. Variational and quasi-variational inequalities. *Applications to Free Boundary Problems*. New York : Wiley, 1984. Russian transl., Moscow : Nauka, 1988. 448 p.
3. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3005-0.
4. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 2001. 181 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-56886-2.
5. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for problems with regular obstacles. *Doklady Akademii Nauk*. 2004. **397**, N 2. P. 170–173.
6. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities for nonlinear diffusion problems in perforated domains. *Izvestiya Mathematics*. 2005. **69**, N 5. P. 1035–1059. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/IM2005v069n05ABEH002287.
7. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A variational inequality perspective on generative adversarial networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551. 2018.
8. Korpelevich G.M. The extragradient method for finding saddle points and other problems. *Ekonomika i Matematicheskie Metody.* 1976. **12**, N 4. P. 747–756.
9. Khobotov E.N. Modification of the extra-gradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1987. **27**, N 5. P. 120–127. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90058-9.
10. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. In: Zgurovsky, M.Z. and Sadovnichiy, V.A. (eds.*) Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Springer International Publishing Switzerland, 2014. **211**. P. 131–146. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_10.
11. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2000. **38**. P. 431–446. DOI: https://doi.org/10.1137/S0363012998338806.
12. Semenov V.V. A strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. **46**, N 5. P. 45–56. DOI: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40.
13. Semenov V.V. Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**, N 5. P. 741–749. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y.
14. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2011. **148**. P. 318–335. DOI: https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3.
15. Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. **47**, N 4. P. 631–639. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1.
16. Denisov S.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of the modified extragradient method for variational inequalities with Non-Lipschitz operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. **51**, N 5. P. 757–765. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-015-9768-z.
17. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with Non-Lipschitz operators. *Journal of Automation and*

Information Sciences. 2015. **47**, N 7. P. 31–46. DOI: https://doi.org/10.1615/JAutomatInf Scien.v47.i7.40.
18. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/t) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization.* 2004. **15**. P. 229–251. DOI: https://doi.org/10.1137/S1052 623403425629.
19. Semenov V.V. Modified extragradient method with bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 8. P. 26–37. DOI: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.
20. Semenov V.V. A version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. **53**, N 2. P. 234–243. DOI: https://doi.org/10.1007/-s10559-017-9923-9.
21. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-Euclidean proximal method for equilibrium problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.) *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018.* Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Cham, 2019. **836**. P. 50–58. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.
22. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: Goldengorin B. (ed.) *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences.* Springer Optimization and Its Applications, Springer, Cham, 2016. **115**. P. 315–325. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.
23. Semenov V.V. On the parallel proximal decomposition method for solving the problems of convex optimization. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2010. **42**, N 4. P. 13–18. DOI: https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i4.20.
24. Vasin V.V. Iterative methods for solving ill-posed problems with a priori information in Hilbert spaces. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1988. **28**, N 4. P. 6–13. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(88)90104-8.
25. Vasin V.V. Iterative processes of the Fejе́r type in ill-posed problems with a prori information. *Russian Math.* (Iz. VUZ). 2009. **53**, N 2. P. 1–20. DOI: https://doi.org/10.3103/-S1066369X09020017.
26. Vasin V.V., Eremin I.I. Operators and iterative processes of Fejer type. *Theory and Applications.* Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2009. 155 p.
27. Halpern B. Fixed points of nonexpansive maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. **73**, N 6. P. 957–961. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0.
28. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 2011. 408 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-48311-5.
29. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. *J. Math. Anal. Appl.* 2003. **279**. P. 372–379. DOI: https://doi.org/10.1016/ S0022-247X(02)00458-4.

Получено 08.04.2019

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. НАН Украины Ляшко С.И.