УДК 519.1

А.Л. Гурин, А.Г. Донец, С.П. Загороднюк

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЕЙФЕ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ГРАФАХ

Ключевые слова: математический сейф, вектор состояний замков сейфа, неориентируемый граф, путь, контур, цепь, цикл, веер, лесенки двух типов и усложненные лесенки, метод выделения переменных, метод суммарных представлений.

Задача о математическом сейфе формулируется с помощью графов и матриц, а ее решение сводится к решению систем линейных уравнений в конечных полях или конечных кольцах [1–5]. Однако задачу о математическом сейфе на графах удается решать эффективнее, учитывая топологию графа, задающего математический сейф.

Задача о математическом сейфе на графах впервые была упомянута в работе [1], но не послужила поводом для более интенсивного изучения проблемы.

В данной работе предпринята попытка ликвидировать этот пробел. Предлагаются методы решения задач о математическом сейфе для элементарных графов, таких как путь, контур, цепь, цикл и, так называемые, веер, трехступенчатая, четырехступенчатая и удвоенная лесенки. Каждому замку в сейфе соответствует определенная вершина графа.

Вершины графов будем изображать в виде кружочков. Занумеруем его вершины от 1 до N, начиная с вершины, не имеющей входящей дуги. Номера вершин указаны в кружочках, а под ними указаны состояния замков (вершин). Навчальное состояние замков обозначим вектором $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$.

Задача состоит в том, чтобы, исходя из этого начального состояния сделать в данном замке количество поворотов x_i, $i = 1, 2, ..., n$, достаточного для перевода сейфа в состояние, в котором все b_i станут равными 0.

Каждому замку соответствует уравнение, которое представляет собой сумму неизвестных от входящих вершин для ориентированных графов или смежных вершин для неориентированных графов. К этой сумме прибавляется количество поворотов в данном замке и его начальное состояние. В общей сумме это должно равняться нулевому состоянию.

Рассмотрим сейф на графе в виде пути (рис.1).

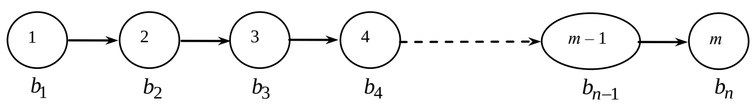

Рис. 1

Пусть b = (1, 3, 3, 0, 3). Покажем, что задача решается для произвольных типов замков, т.е. для замков, которые имеют различные количества состояний. Пусть первый замок имеет два состояния, второй — четыре, третий и четвертый — по три, пятый — пять. Составим систему уравнений относительно каждого замка:

$$x_1 + ... + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$$

$$x_2 + x_3 + \ldots + 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3) \qquad (1)$$

$$x_3 + x_4 + \ldots + 0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$$

$$x_4 + x_5 + 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$$

Пусть $x_1 = 3$. Это не противоречит первому уравнению. Далее, решая систему, находим, что $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$.

Проверим это решение:

(1, 3, 3, 0, 3), $x_1 = 3 \rightarrow$ (0, 2, 3,0,3), $x_2 = -2 \rightarrow$ (0, 0, 1, 0, 3), $x_3 = -1 \rightarrow$ (0, 0, 0, – 1,3), $x_4 = 1 \rightarrow$ (0, 0, 0, 0, 4), $x_5 = 1 \rightarrow$ (0(mod 2), 0(mod 4), 0(mod 3), 0(mod 3), 0(mod 5)) = b_{fin}.

Рассмотрим сейф на графе в виде контура (рис. 2).

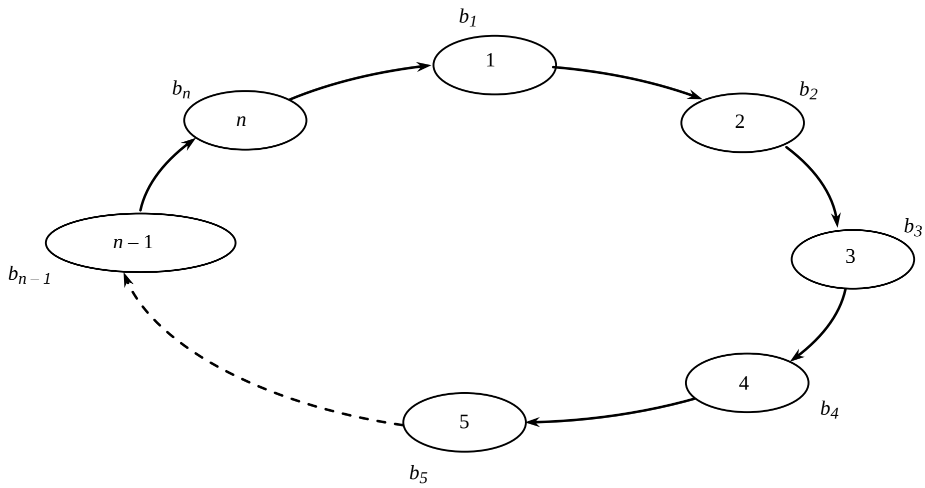

Рис. 2

Запишем общую систему для n-вершинного контура.

$$\left.\begin{array}{llllllll}
x_1 + \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + x_n & \equiv -b_1 \\
x_1 + x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv -b_2 \\
 & x_2 + x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv -b_3 \\
 & & x_3 + x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv -b_4 \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & x_{n-1} & + x_n & \equiv -b_n
\end{array}\right\} (\mathrm{mod}\ K). \qquad (2)$$

Рассмотрим прием, который назовем методом выделения переменных. Для этого вычтем уравнение (2) из уравнения (3). Получим $-x_1 + x_3 = (b_2 - b_3)$ (mod K). Вычитая последовательно полученные таким образом выражения из следующих уравнений, окончательно получаем

$$(-1)^n x_1 + x_n = \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i} b_i \ (\mathrm{mod}\ K). \qquad (3)$$

Если n = 0(mod 2), то в левой части (3) получим левую часть первого уравнения. Это означает, что система (2) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i b_i = 0 \ (\mathrm{mod}\ K). \qquad (4)$$

Если n = 1(mod 2), то из уравнения (1) системы (2) и (3) находим значения переменных:

$$x_n = (\sum_{i=1}^{n}(-1)^i b_i,\ x_1 = -b_1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1} b_i)/2\,. \tag{5}$$

Если K — четное число, то выражения в числителях (5) должны быть также четными, иначе система (2) не имеет решения.

Пример 1. Пусть b = (1, 1, 1, 1, 6), а все замки относятся к одному типу с числом состояний K = 4. Поскольку n = 1(mod 2), то согласно (3) получаем решение $x_1 = 2$. Дальше из системы (2) находим остальные значения: $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -3$, $x_5 = -3$.

Проверим это решение:

(1, 1, 1, 1, 6), $x_1 = 2 \to$ (3, 3, 1, 1, 6), $x_2 = -3 \to$ (3, 0, – 2, 1, 6), $x_3 = 2 \to$(3, 0, 0, 3, 6), $x_4 = -3 \to$ (3, 0, 0, 0, 3), $x_5 = -3 \to$ (0, 0, 0, 0, 0(mod 4)) = b_{fin}.

Рассмотрим сейф на графе в виде цепи (рис. 3).

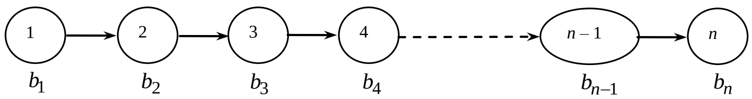

Рис. 3

Общая система для n-вершинной цепи отличается от системы (2) для пути тем, что каждая строка содержит на одну переменную больше.

Пусть n = (– 1) (mod 3), т.е. n = 3$к$ +2. В качестве примера запишем такую систему для цепи с n = 8:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
x_1+ & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv -b_1 \\
x_1+ & x_2+ & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv -b_2 \\
\cdot & x_2+ & x_3+ & x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv -b_3 \\
\cdot & \cdot & x_3+ & x_4+ & x_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv -b_4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & x_4+ & x_5+ & x_6 & \cdot & \cdot & \equiv -b_5 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_5+ & x_6+ & x_7 & \cdot & \equiv -b_6 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_6+ & x_7+ & x_8 & \equiv -b_7 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_7+ & x_8 & \equiv -b_8
\end{array}\right\} (\mathrm{mod} K). \tag{6}$$

Вычтем уравнение (1) из уравнения (2). Получим $x_3 = (b_1 - b_2)$ (mod K). Далее вычтем четвертое уравнение из пятого. Получим $x_6 = (b_4 - b_5 + x_3)$ (mod K). Подставляя значение x_3, получаем $x_6 = (-b_5 + b_4 - b_2 + b_1)$ (mod K). С другой стороны, вычитая из уравнения (7) восьмое, получаем, что $x_6 = (b_8 - b_7)$ (mod K). Значит, $b_8 - b_7 + b_5 - b_4 + b_2 - b_1 \equiv 0$ (mod K).

В общем случае для n-вершинной цепи это условие будет выглядеть так:

$$\sum_{i=0}^{k}(b_{3i+2} - b_{3i+1}) = 0(\mathrm{mod} K). \tag{7}$$

ISSN 0572-2691

Это является необходимым условием для существования решения. Чтобы получить решение системы (6), необходимо при выполнении условия (7) присвоить произвольное значение переменной x_1.

Пример 2. Пусть b = (2, 3, 4, 1, 2, 2, 3, 1), K = 5, $n=8$. Проверим необходимое условие: 3 – 2 + 2 – 1 + 1 – 3 = 0(mod 5). Пусть x_1= 2. Решая систему (6), получаем остальные значения: $x_2=-4$, $x_3=-1$, $x_4=1$, $x_5=-1$, $x_6=-2$, $x_7=1$, $x_8=-2$.

Проверим это решение:
(2, 3, 4, 1, 2, 2, 3, 3), x_1 = 2 → (4, 5, 4, 1, 2, 2, 3, 3), $x_2=-4$ → (0, 1, 0, 1, 2, 2, 3, 3), $x_3=-1$→ (0, 0, – 1, 0, 2, 2, 3, 3), x_4=1 → (0, 0,0, 1, 3, 2, 3, 3), $x_5=-1$→ (0, 0, 0, 0, 2, 1, 3, 3), $x_6=-2$ → (0, 0,0, 0, 0, –1, 1, 1), → x_7=1→ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2), $x_8=-2$→ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) (mod 5)).

Подставляя x_1=0, получаем другое решение: $x_2=-2$, $x_3=-1$, $x_4=-1$, $x_5=1$, $x_6=-2$, $x_7=-1$, $x_8=0$.

Пусть n = (0)(mod 3). В этом случае из общей системы непосредственно вычисляются значения переменных x_{3i}, $i=1, 2, \dots$. Аналогично вычисляются значения переменных x_{n-2}, x_{n-5} и так до x_1. Затем, подставляя значение x_1 последовательно в соответствующие уравнения, получаем решение системы.

Пусть n = (1)(mod 3). В этом случае аналогичным образом получаем значения x_{n-2}, x_{n-5} и так до x_2. Затем, подставляя значение x_2 в первое уравнение, получаем значение x_1, а дальше последовательно получаем значения остальных переменных. Таким образом, для последних двух значений n решение существует всегда для произвольного начального состояния сейфа.

Рассмотрим сейф на графе, который представляет цикл наподобие контура на рис. 2. Система уравнений, записанная для него, также будет иметь строки, в каждой из которых на одну переменную больше, чем в аналогичной системе для контура :

$$\left.\begin{array}{llllllll} x_1+ & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & +x_n & \equiv -b_1 \\ x_1+ & x_2+ & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \equiv -b_2 \\ \cdot & x_2+ & x_3+ & x_4 & \cdot & \cdot & \equiv -b_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1+ & \cdot & \cdot & \cdot & +x_{n-1} & +x_n & \equiv -b_n \end{array}\right\}(\operatorname{mod} K). \tag{8}$$

Это привносит дополнительную сложность при решении системы уравнений, при этом также существенную роль играет значение числа n.

Пусть n = (0)(mod 3) или n = 3k, где k — произвольное натуральное число. Сложив последовательно все уравнения с номерами 1 (mod 3), затем — с номерами 2 (mod 3), затем — с номерами, кратными трем, получим соотношения

$$(-\sum_{i=0}^{k-1} b_{3i+1} = -\sum_{i=0}^{k-1} b_{3i+2} = -\sum_{i=1}^{k} b_{3i} = \sum_{i=1}^{n} x_i)(\operatorname{mod} K). \tag{9}$$

Это является необходимым условием существования решения.

Решение системы (8) будем искать путем последовательного перевода состояний замков в нулевые. Для перевода первого замка в состояние нуль необходимо предать переменной x_2 значение $-b_1$. При этом второй замок перейдет в состояние b_2-b_1, а третий — в состояние b_3-b_1. Для перевода второго замка в состояние нуль необходимо предать переменной x_3 значение b_1-b_2. При этом третий замок перейдет в состояние b_3-b_2, а четвертый — в состояние $b_4+b_1-b_2$. Для перевода третьего замка в состояние нуль необходимо предать переменной x_4 значение b_2-b_3. При этом четвертый замок перейдет в состояние $b_4+b_1-b_3$, а пятый — в состояние $b_5+b_2-b_3$. Для перевода четвертого замка в состояние нуль необходимо предать переменной x_5 значение $b_3-b_4-b_1$. При этом пятый замок перейдет в состояние $b_5+b_2-b_1-b_4$, а шестой — в состояние $b_6+b_3-b_4-b_1$. Для перевода пятого замка в состояние нуль необходимо предать переменной x_6 значение $b_1+b_4-b_2-b_5$. При этом шестой замок перейдет в состояние b_6+b_3- $-b_2-b_5$. Продолжая таким же образом дальше, для получения решения необходимо прийти к ситуации, когда состояния двух предпоследних замков будут равны b_n , а состояния всех других равны нулю. С другой стороны, в результате проведенных выше преобразований состояния двух предпоследних замков будут равны: $\left(\sum_{i=1}^{k-1} b_{3i} - \sum_{i=0}^{k-1} b_{3i+1}\right)(\operatorname{mod} K), \left(\sum_{i=1}^{k-1} b_{3i} - \sum_{i=0}^{k-1} b_{3i+2}\right)(\operatorname{mod} K)$. В силу необходимого условия (9) эти выражения равны b_n. Следовательно, необходимые условия являются также достаточными для существования решения.

Пусть n = (1)(mod 3). Воспользуемся методом выделения переменных и выделим переменную x_1. Для этого сложим все уравнения, кроме предпоследнего. В результате получим выражение $(2x_{n-2}+2x_{n-1}+2x_n+3\sum_{i=1}^{n-3} x_i = -\sum_{i=1}^{n-2} b_i - b_n)(\operatorname{mod} K)$. Отсюда вычтем три суммы уравнений с номерами 3, 6, 9 и так до $n-4$ и два предпоследних. В результате получим выражение для вычисления $3x_1$. Увеличивая в предыдущих рассуждениях все индексы на единицу, получим соответствующее выражение для вычисления $3x_2$. После этого, подставляя известные значения, начиная с x_1 и x_2, в соответствующие уравнения, последовательно получим все значения переменных. Очевидно, что решение существует всегда для произвольного начального состояния сейфа.

Пример 3. Пусть b = (2, 3, 4, 2, 1, 3, 3), K = 5, $n=7$. Система (8) состоит из семи уравнений. Сложим все уравнения, кроме шестого. Получим следующее выражение $3\sum_{i=1}^{4} x_i + 2(x_5 + x_6 + x_7) = -\sum_{i=1,\ i\neq 6}^{7} b_i$ = 15 = 0 (mod 5). Вычтем из него три третьих уравнения и два шестых. Получим $3x_1 = 18(\operatorname{mod} 5)$. Отсюда $x_1 = 1$. Теперь сложим все уравнения, кроме седьмого. Получим выражение $3\sum_{i=2}^{5} x_i + 2(x_6 + x_7 + x_1) = -\sum_{i=1,\ i\neq 7}^{7} b_i$ = 15 = 0 (mod 5). Вычтем из него три четвертых уравнения и два седьмых. Получим $3x_2 = 12(\operatorname{mod} 5)$. Отсюда $x_2 = -1$. Из второго уравнения получаем $x_3 = -b_2 - x_1 - x_2 = -3-1+1 = -3(\operatorname{mod} 5)$. Аналогично получаем (все по модулю 5): $x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = -2,\ x_7 = -2$.

Проверим это решение:

(2, 3, 4, 2, 1, 3, 3), $x_1 = 1 \to (3, 4, 4, 2, 1, 3, 4)$, $x_2 = -1 \to (2, 3, 3, 2, 1, 3, 4)$, $x_3 = -3 \to (2, 0, 0, -1, 1, 3, 4)$, $x_4 = 0 \to (2, 0, 0, -1, 1, 3, 4)$, $x_5 = 1 \to (2, 0, 0, 0, 2, 4, 4)$, $x_6 = -2 \to (2, 0, 0, 0, 0, 2, 2)$, $x_7 = -2 \to (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ (mod 5)).

Пусть n = (– 1) (mod 3). Сложив все уравнения, кроме последнего, получим выражение $3\sum_{i=2}^{n-2} x_i + 2(x_{n-1} + x_n + x_1) = -\sum_{i=1,\ i\neq n}^{n-1} b_i$ (mod K). Отсюда вычтем три суммы уравнений с номерами 2, 5, 8 и т.д. до $n-2$ и два последних. В результате получим выражение для вычисления $-3x_1$. Увеличивая в предыдущих рассуждениях все индексы на единицу, получаем соответствующее выражение для вычисления $-3x_2$. После этого, подставляя известные значения, начиная с x_1 и x_2, в соответствующие уравнения, последовательно получим все значения переменных. Очевидно, что для двух последних значений n решение существует всегда для произвольного начального состояния сейфа. Определенные трудности возникают для K, кратному 3. Тогда необходимым условием существования должно быть равенство, кратное 3, в выражениях для вычисления x_1 и x_2.

Рассмотрим сейф на графе типа веера (рис. 4).

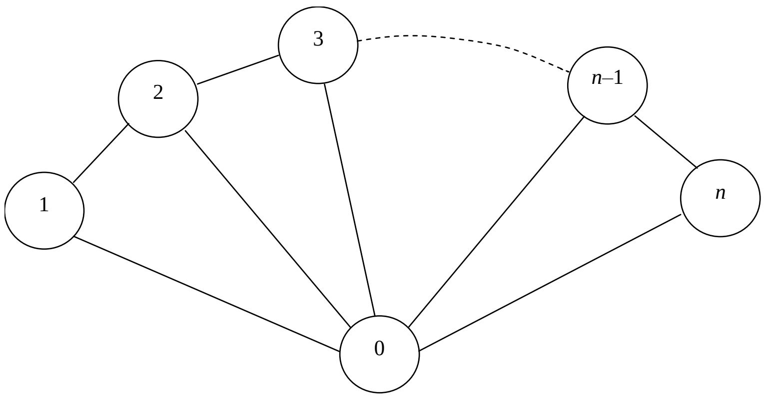

Рис. 4

Он представляет собой цепь из n вершин и начальной вершины 0, соединенной со всеми вершинами цепи. Общая система для веера имеет вид n-вершинной цепи, но с добавлением в каждой строке переменной x_0 и уравнения для x_0.

$$\left.\begin{array}{l}
x_0 + x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n \equiv -b_0 \\
x_0 + x_1 + x_2 \ldots\ldots \equiv -b_1 \\
x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots \equiv -b_2 \\
x_0 \quad + x_2 + x_3 + x_4 \ldots\ldots \equiv -b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_0 \ldots\ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \equiv -b_{n-1} \\
x_0 \ldots\ldots + x_{n-1} + x_n \equiv -b_n
\end{array}\right\} (\mathrm{mod} K).$$

Самый простой веер получится для n = 3. Для него левые части нулевого и второго уравнений совпадают. Поэтому необходимым условием существования решения является равенство $b_0 = b_2$ (mod K). Вычитая из нулевого уравнения первое и третье, получаем значения $x_3 = (b_1 - b_0)$ (mod K) и $x_1 = (b_3 - b_0)$ (mod K). Ввиду совпадения нулевого и второго уравнений переменной x_0 можно давать любое значение, что приведет к решению системы.

Для $n \geq 4$ прежде всего находим значение x_0. Пусть n = 0 (mod 3). Вычтем из нулевого уравнения сумму из второго, пятого и т.д. до (n – 1)-го уравнения. Получим соотношение

$$kx_0 = \sum_{i=0}^{k} b_{3i+2} - b_0 \text{, где } k = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor .$$

Пусть n = 1 (mod 3). В этом случае из нулевого уравнения вычитаем все уравнения с номерами 1 (mod 3). В результате получаем $kx_0 = \sum_{i=0}^{k} b_{3i+1} - b_0$, где k — прежнее. Исходя из этого, получаем значение x_0. Пусть n = (– 1) (mod 3). Вычтем из нулевого уравнения сумму из второго, пятого и т.д. до (n – 3)-го уравнения и n-го. Аналогично, как и в предыдущих случаях, находим значение x_0. Таким образом, задача во всех случаях сводится к задаче о сейфе на графе в виде цепи.

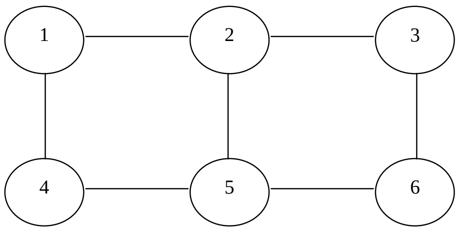

Рис. 5

Рассмотрим математический сейф на графе, полученный после склеивания двух прямоугольников по боковым сторонам (рис. 5). Такой граф назовем лесенкой с тремя ступенями (лесенка 1).

Запишем для этого сейфа основную систему:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + \;.\; x_4 \;.\;\;.\;\;.\; \equiv -b_1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + \;.\; x_5 \;.\; \equiv -b_2 \\
\;.\; x_2 + x_3 + \;.\;\;.\; x_6 \equiv -b_3 \\
x_1 + \;.\;\;.\; x_4 + x_5 \;.\; \equiv -b_4 \\
\;.\; x_2 + \;.\; x_4 + x_5 + x_6 \equiv -b_5 \\
\;.\;\;.\; x_3 + \;.\; x_5 + x_6 \equiv -b_6
\end{array}\right\} (\bmod K).$$

Образуя суммы уравнений первого с шестым и третьего с четвертым, получаем одинаковые левые части. Следовательно, правые части также будут равны, т.е. $b_1 + b_6 = b_3 + b_4$. Это условие необходимо для существования решения системы.

Воспользуемся методом выделения переменных для поиска решения системы. Для этого из суммы второго и пятого уравнений вычтем сумму четвертого и шестого. Получим $2x_2 = b_4 + b_6 - b_2 - b_5$. Аналогично, вычитая из суммы второго и пятого уравнений первое и третье, получаем $2x_5 = b_1 + b_3 - b_2 - b_5$. Для нечетного K легко находим значения x_2 и x_5. А для четного K находим значения x_2 и x_5 при условии, что все суммы $b_1 + b_3$, $b_2 + b_5$ и $b_4 + b_6$ будут одинаковой четности. Иначе задача не имеет решения.

Подставляя переменной x_1 произвольное значение, последовательно находим все остальные значения переменных.

Пример 4. Пусть b = (1, 2, 4, 5, 7, 8), K = 5. Необходимое условие выполняется: 1 + 8 = 4 + 5. Находим: 2 x_2 = 5 + 8 – 2 – 7 = 4 или x_2 = 2, 2 x_5 = 1 + 5 – 2 – 7 = – 4 или x_5 = – 2 (mod 5)**.** Подставив x_1 = 0 в первое уравнение, получим 0 + 2 + x_4 = – 1 (mod 5). Отсюда x_4 = – 3 (mod 5). Из второго уравнения x_3 = – 2 (mod 5). Из шестого уравнения x_6 = – 4 (mod 5).

Проверим это решение:
(1, 2, 4, 5, 7, 8), $x_2=2$ → (3, 4, 6, 5, 9, 8), $x_3=-2$ → (3, 2, 4, 5, 9, 6), $x_4=-3$ → → (0, 2, 4, 2, 6, 6), $x_5=-2$ → (0, 0, 4, 0, 4, 4), $x_6=-4$ → (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) (mod 5)).

Рассмотрим математический сейф на графе, полученный последовательным склеиванием трех прямоугольников по меньшим сторонам (рис. 6). Такой граф назовем лесенкой с четырьмя ступенями (лесенка 2).

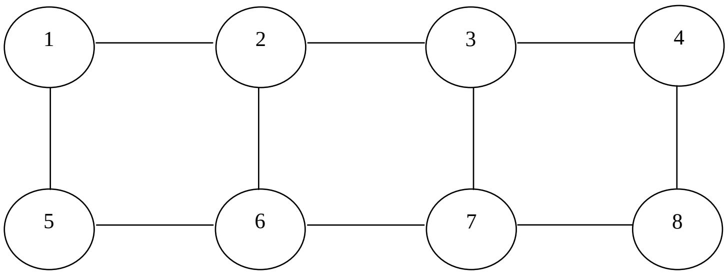

Рис. 6

Запишем для этого сейфа общую систему:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1+x_2+\ .\qquad x_5\quad .\quad .\quad \equiv -b_1\\
x_1+x_2+x_3+\ .\quad .\quad x_6\quad .\quad \equiv -b_2\\
.\quad x_2+x_3+\ .x_4+\ .\quad .\quad x_7\quad \equiv -b_3\\
\qquad x_3+x_4+\ .\qquad x_8\equiv -b_4\\
x_1+\ .\quad .\quad .\quad x_5+x_6\quad .\quad .\quad \equiv -b_5\\
.\quad x_2+\ .\quad .\quad x_5+x_6+x_7\ .\quad \equiv -b_6\\
\qquad x_3+\ .\quad .\quad x_6+x_7+x_8\equiv -b_7\\
\qquad\quad x_4+\ .\quad .\quad x_7+x_8\equiv -b_8
\end{array}\right\}(\bmod K).$$

Для решения системы воспользуемся методом суммарного представления. Запишем $S=\sum_{i=1}^{8} x_i$. Сложим четвертое и шестое уравнения. В левой части получим $S-x_1$. Отсюда $x_1=S+b_4+b_6$. Аналогично складывая соответствующие уравнения (1), (7), (2), (8), (3), (5), получаем $x_4=S+b_1+b_7$, $x_5=S+b_2+b_8$, $x_8=S+b_3+b_5$. Сложим теперь все уравнения системы и добавим к ним еще (1), (4), (5) и (8). В результате получим $5S=-\sum_{i=1}^{8} b_i-b_1-b_4-b_5-b_8$. Отсюда находим S, а затем — x_1, x_4, x_5, x_8. Подставляя эти значения в систему, получаем остальные значения переменных.

Решение существует всегда для произвольного начального состояния сейфа, если K не кратно 5.

Перейдем к рассмотрению графов более сложной структуры, на которых задаются математические сейфы. Рассмотрим математический сейф на графе, полученном путем склеивания двух лесенок 1 по большей стороне (рис. 7, окошко) .

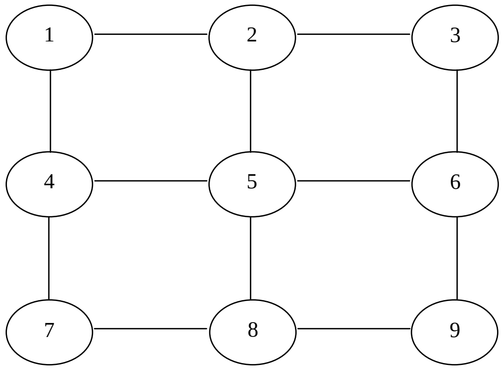

Рис. 7

Запишем для этого сейфа общую систему:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + \ . \ \ x_4 \ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \ \equiv -b_1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + \ . \ \ x_5 \ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \ \equiv -b_2 \\
. \ \ x_2 + x_3 + \ . \ \ . \ \ x_6 \ \ . \ \ . \ \ . \ \equiv -b_3 \\
x_1 + \ . \ \ . \ \ x_4 + x_5 + \ . \ \ x_7 \ \ . \ \ . \ \equiv -b_4 \\
x_2 + \ . \ \ x_4 + x_5 + x_6 + \ . \ \ x_8 \ \ . \ \equiv -b_5 \\
. \ \ . \ \ x_3 + \ . \ \ x_5 + x_6 + \ . \ \ . \ \ x_9 \equiv -b_6 \\
. \ \ . \ \ . \ \ x_4 + \ . \ \ . \ \ x_7 + x_8 \ \ . \ \equiv -b_7 \\
. \ \ . \ \ . \ \ x_5 + \ . \ \ x_7 + x_8 + x_9 \equiv -b_8 \\
. \ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \ \ x_6 + \ . \ \ x_8 + x_9 \equiv -b_9
\end{array}\right\} \ (\mathrm{mod}\ K).$$

Снова воспользуемся методом суммарных представлений, где $S = \sum_{i=1}^{9} x_i$. Сложим первое, третье и восьмое уравнения. В левой части получим $S + x_2$. Отсюда $x_2 = -(S + b_1 + b_3 + b_8)$. Аналогично складывая соответствующие уравнения (первое, шестое и седьмое, третье, четвертое и девятое, второе, седьмое и девятое), получаем $x_4 = -(S + b_1 + b_6 + b_7)$, $x_6 = -(S + b_3 + b_4 + b_9)$, $x_8 = -(S + b_2 + b_7 + b_9)$. Вычеслим тройную сумму первого, третьего, седьмого и девятого уравнений, прибавим к ним двойную сумму второго, четвертого, шестого и восьмого уравнений, вычтем из этого пятое уравнение. В результате получим $7S = -3(b_1 + b_3 + b_7 + b_9) - 2(b_2 + b_4 + b_6 + b_8) + b_5$. Отсюда находим S , а затем — x_2, x_4, x_6, x_8. Подставляя эти значения в систему, получаем остальные значения переменных.

Решение существует всегда для произвольного начального состояния сейфа, если K не кратно 7.

Пример 4. Пусть b = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 6, 5, 5) , K = 5. Найдем S из соответствующей формулы : $7S = -3(1+4+6+5) - 2(2+5+8+5) + 7 = -81 = (-1)$ (mod 5). S = 2.

Значит, $x_2 = -(2+1+4+5) = -12 = (-2)$ (mod 5), $x_4 = -(2+1+8+6) = -17 = (-2)$ (mod 5), $x_6 = -(2+4+5+5) = -16 = (-1)$ (mod 5), $x_8 = -(2+2+6+5) = -15 = 0$ (mod 5). Подставив эти значения в соответствующие уравнения, получим остальные значения переменных: $x_1 = 3$, $x_3 = -1$, $x_5 = -2$, $x_7 = -4$, $x_9 = -4$.

Проверим это решение:
(1, 2, 4, 5, 7, 8, 6, 5, 5), $x_1 = 3 \to$ (4, 5, 4, 8, 7, 8, 6, 5, 5), $x_2 = -2 \to$ (2, 3, 2, 8, 5, 8, 6, 5, 5), $x_3 = -1 \to$ (2, 2, 1, 8, 5, 7, 6, 5, 5), $x_4 = -2 \to$ (0, 2, 1, 6, 3, 7, 4, 5, 5), $x_5 = -2 \to$ $\to$ (0, 0, 1, 4, 1, 5, 4, 3, 5), $x_6 = -1 \to$ (0, 0, 0, 4, 0, 4, 4, 3, 4), $x_7 = -4 \to$ $\to$ (0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, – 1, 4), $x_9 = -4 \to$ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) (mod 5).

Рассмотрим математический сейф на графе, полученном путем склеивания двух лесенок 2 по большей стороне (рис. 8).

Запишем для этого сейфа общую систему:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + \;.\;\;.\;\; x_5 \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; \equiv -b_1 \\
x_1 + x_2 + x_3 + \;.\;\;.\;\; x_6 \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; \equiv -b_2 \\
.\;\; x_2 + x_3 + x_4 \;.\;\;.\;\; x_7 \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; \equiv -b_3 \\
.\;\;.\;\; x_3 + x_4 + \;.\;\;.\;\;.\;\; x_8 \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; \equiv -b_4 \\
x_1 + \;.\;\;.\;\;.\;\; x_5 + x_6 + \;.\;\;.\;\; x_9 \;.\;\;.\;\;.\;\; \equiv -b_5 \\
.\;\; x_2 + \;.\;\;.\;\; x_5 + x_6 + x_7 + \;.\;\;.\;\; x_{10} \;.\;\;.\;\; \equiv -b_6 \\
.\;\;.\;\; x_3 + \;.\;\;.\;\; x_6 + x_7 + x_8 + \;.\;\;.\;\; x_{11} \;.\;\; \equiv -b_7 \\
.\;\;.\;\;.\;\; x_4 + \;.\;\;.\;\; x_7 + x_8 + \; x_{12} \equiv -b_8 \\
.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\, x_5 + \;.\;\;.\;\; x_9 + x_{10} \;.\;\; \equiv -b_9 \\
.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; x_6 + \;.\;\; x_9 + x_{10} + x_{11} \;.\;\; \equiv -b_{10} \\
.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; x_7 + \;.\;\;.\;\; x_{10} + x_{11} + x_{12} \equiv -b_{11} \\
.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\; x_8 + \;.\;\; x_{11} + x_{12} \equiv -b_{12}
\end{array}\right\} \pmod{K}.$$

Снова воспользуемся методом суммарных представлений, где $S = \sum_{i=1}^{12} x_i$. Сложим четвертое, пятое и одиннадцатое уравнения. В левой части получим $S - x_2$. Отсюда $x_2 = S + b_4 + b_5 + b_{11}$. Аналогично складывая соответствующие уравнения (первое, восьмое и десятое, третье, пятое и двенадцатое, второе, восьмое и девятое), получаем $x_3 = S + b_1 + b_8 + b_{10}$, $x_{10} = S + b_3 + b_5 + b_{12}$, $x_{11} = S + b_2 + b_8 + b_9$. Сложим все уравнения, кроме шестого и седьмого. Получим соотношение $3S = -\left(\sum_{i=1}^{5} b_i + \sum_{i=8}^{12} b_i\right)$. Отсюда находим S, а затем — x_2, x_3, x_{10}, x_{11}.

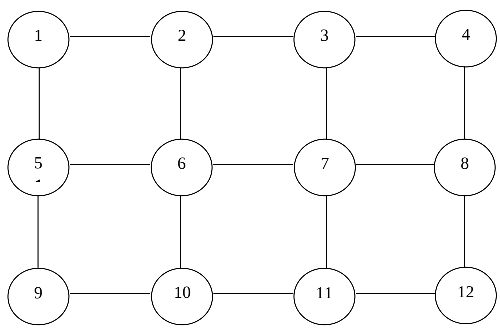

Рис. 8

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $x_5 - x_3 - x_6 = b_2 - b_1$. Вычитая из четвертого уравнения третье, получаем $x_8 - x_7 - x_2 = b_3 - b_4$. Сложим эти результаты, затем прибавим к ним два шестых уравнения и вычтем седьмое. В результате получим $x_2 - 2x_3 + 3x_5 + 2x_{10} - x_{11} = -b_1 + b_2 + b_3 - b_4 - 2b_6 + b_7$. Отсюда находим значение x_5, что вместе с известными четырьмя переменными становится достаточным для последовательного определения значений остальных переменных.

Пример 5. Пусть b = (2, 2, 4, 5, 7, 8, 6, 5, 5, 3, 2, 1) , K = 5. Найдем S из соответствующей формулы: $3S = -(2+2+4+5+7+5+5+3+2+1) = -36$. Значит, S = = 3 (mod 5). Тогда $x_2 = 2$ (mod 5), $x_3 = 3$ (mod 5), $x_{10} = 0$ (mod 5), $x_{11} = 0$ (mod 5), $x_5 = 1$ (mod 5). Из системы получим $x_1 = 0$ (mod 5), $x_9 = (-1)$ (mod 5), $x_6 = (-2)$ (mod 5), $x_7 = 1$ (mod 5), $x_8 = 2$ (mod 5), $x_4 = 0$ (mod 5), $x_{12} = (-3)$ (mod 5).

Проверим это решение:
(2, 2, 4, 5, 7, 8, 6, 5, 5, 3, 2, 1), $x_2 = 2 \rightarrow$ (4, 4, 6, 5, 7, 10, 6, 5, 5, 3, 2, 1), $x_3 = 3 \rightarrow$ $\rightarrow$ (4, 7, 9, 8, 7, 10, 9, 5, 5, 3, 2, 1), $x_5 = 1 \rightarrow$ (0, 7, 9, 8, 8, 11, 9, 5, 6, 3, 2, 1), $x_6 = -2 \rightarrow$ (0, 0, 9, 8, 6, 9, 7, 5, 6, 1, 2, 1), $x_7 = 1 \rightarrow$ (0, 0, 0, 8, 6, 0, 8, 6, 6, 1, 3, 1), $x_8 = 2 \rightarrow$ (0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 8, 6, 1, 3, 3), $x_9 = -1 \rightarrow$ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 3, 3), $x_{12} = -3 \rightarrow$ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) (mod 5).

Два метода, продемонстрированные в данной работе, при раздельном или комбинированном использовании могут оказать существенную помощь для решения задач о математических сейфах на графах более сложной структуры.

А.Л. Гурин, А.Г. Донець, С.П. Загороднюк

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО МАТЕМАТИЧНИЙ СЕЙФ НА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ГРАФАХ

Розглянуто задачу про математичний сейф, який представляє собою деяку систему взаємопов'язаних замків із заданими початковими станами. Таку систему можна представити у вигляді орієнтованого чи неорієнтованого графа, вершинами якого є замки. В даній роботі розглядаються графи з достатньо простою конструкцією. До них відносяться такі графи як шлях, контур, ланцюг, цикл, віяло, драбинки з визначеною кількістю щаблинок та ускладнені драбинки. Розв'язок такої задачі в загальному випадку зводиться до розв'язування системи лінійних рівнянь в класі віднімань за модулем, що дорівнює числу станів кожного замка сейфа. Насправді таке число являє собою кількість поворотів ключа в кожному замку таку, щоби врешті-решт сейф перейшов у стан, у якому всі замки будуть відкритими. Для розв'язання задачі пропонується два оригінальних метода — метод виділення змінних та метод сумарних представлень. Суть першого методу полягає в наступному. Для деяких простих графів існує можливість виділення деяких рівнянь для безпосереднього їх розв'язання відносно будь-якої однієї змінної. Після, підставляючи послідовно отримані значення у відповідні рівняння, отримаємо розв'язок системи. Цей метод був застосований при розв'язанні задачі для графа типу цикл. Суть другого методу полягає у введенні спеціального параметра, який називається сумою невідомих. Деякі графи дозволяють представити змінні системи через такий параметр. Просумувавши ці змінні, отримаємо рівняння відносно нього. Розв'язавши це рівняння, отримаємо значення цього параметру, а разом з ним значення всіх змінних. Цей метод був застосований при розв'язанні задачі для графа типу віконця та драбинок. Кожна задача для відповідного типу сейфа ілюструється прикладами та супроводжується перевіркою розв'язку.

Ключові слова: математичний сейф, вектор станів замків сейфа, неорієнтований граф, шлях, контур, ланцюг, цикл, віяло, драбинки двох типів та ускладнені драбинки, метод виділення змінних, метод сумарних представлень.

A.L. Gurin, A.G. Donets, S.P. Zagorodnyuk

METHODS OF SOLVING THE PROBLEMS ON MATHEMATICAL SAFE ON ELEMENTARY GRAPHS

We consider the problem on mathematical safe, consisting of certain system of interrelated locks with given initial states. Such system can be presented in the form of oriented or non-oriented graph, which tops are locks. In this paper we deal with graphs of sufficiently simple design, such as path, contour, chain, cycle, umbrella, stairs with prescribed quantity of steps, and complicated stairs. In general case, solution of this problem reduces to solving a system of linear equations in the class of residues in modulo, which equal to the number of states of each safe lock. In fact, it equals to the number of key turns in each lock, sufficient for safe to switch info the state with all open locks. To solve this problem, two original methods are suggested, namely, the method of variables separation and the method of combined representations. The gist of first method consists in the following. For some elementary graphs some equations can be separated and solved in certain variable. Then, upon successive substation of obtained solutions into corresponding equations, we come to solution of the system. This method was applied to solve the problem for the graph of cycle type. The gist of second method consists in introduction of special parameter, called the sum of unknowns. For some graphs, to present the system variables through this parameter is a possibility. Upon summing these variables, we obtain equation in the mentioned parameter. We add these variables and come to the equation in this parameter. Upon solving this equation we obtain value of this parameter as well as the values of all variables. This method was applied to solve the problem for the graphs of window and complicated stairs types. Each problem for prescribed safe types is illustrated by examples and accompanied by solution verification.

Keywords: mathematical safe, vector of safe locks states, non-oriented graph, path, contour, chain, cycle, umbrella, stairs of two types and complicated stairs, method of variables separation, method of combined representations.

1. Donets G.A. Solution of safe problem on (0,1)-matrices. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2002. N 1. P. 98–105.
2. Агаи Аг Гамиш Якуб, Донец Г.А. Задача о математическом сейфе на матрицах. *Теорія оптимальних рішень*. 2013. С. 124–130.
3. Kryvyi S.L. Algorithms for solution of systems of linear Diophantine equations in residue fields. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. **43**(2). P. 171–178.
4. Донец Г.А., Гурин А.Л. Задача о математическом сейфе из замков с двумя состояниями. *Международный научно-технический журнал«Проблемы управления и информатики»*. 2018. № 5. С. 33–41.
5. Kryvyi S.L. Solution algorithms for systems of linear equations over residue rings. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**(5). P. 149−160.

Получено 23.04.2019
После доработки 14.05.2019