УДК 517.5

Т.В. Жигалло

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ИХ ИНТЕГРАЛАМИ АБЕЛЯ–ПУАССОНА

Ключевые слова: дробные производные, краевая задача, разрешающие функции, асимптотическое равенство, приближение в среднем.

Введение

Математическое моделирование различных естественных процессов в большинстве случаев не обходится без применения математического аппарата дробного дифференцирования, что, в свою очередь, нашло широкое применение практически во всех отраслях науки — в теории информации, социологии, экономике, биологии, физике, биофизике и прочее. Несомненно, что перед выбором количества необходимой для исследований информации и ее точности в первую очередь стоит задача применения таких современных подходов к математическому моделированию, которые обеспечивали бы решение в первую очередь прикладных задач.

Одним из таких современных подходов как раз и есть использование задач теории приближения в прикладных аспектах. Наверное, все-таки основная задача теории приближений заключается в том, чтобы на основании постулируемых свойств данной функции установить свойства ее аппроксимативных характеристик. Традиционно в качестве таких характеристик выступают скорости сходимости различных линейных методов суммирования рядов Фурье [1, с. 36]. В данной статье в роли такой аппроксимационной характеристики выступает хорошо известный метод Абеля–Пуассона (см., например [2, 3]). С другой стороны, исследуемые с практической точки зрения функции, имеющие одинаковые априорные свойства, объединяются в соответствующие классы функций. И тогда факты, установленные для данного класса функций, относятся, конечно, и к каждому его представителю. При этом появляется возможность формулировать новые задачи, теперь уже для целых классов функций [1, с. 10]. Как, например, в данной работе это сделано для классов функций с дробными производными, что особенно актуально с возможностью их применения к дальнейшему исследованию методов разрешающих функций игровых задач динамики [4–7].

Постановка задачи

Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая непрерывная или просто суммируемая (т.е. $f \in L$) функция,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ее ряд Фурье,

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,\ b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt,\ k = 0, 1, \ldots,$$

— коэффициенты Фурье.

Обозначим $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ множество функций натурального аргумента, зависящих от параметра δ, изменяющегося на некотором множестве $E_\Lambda \subseteq R$, содержащем, по крайней мере, одну предельную точку. Пусть $\lambda_\delta(0) = 1$, $\lambda \in E_\Lambda$. С помощью множества Λ каждой функции $f \in L$ поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ \delta \in E_\Lambda. \tag{1}$$

Пусть множество Λ таково, что ряд (1) при каждом $\delta \in E_\Lambda$ является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, которую обозначим $U_\delta(f; x; \Lambda)$. В этом случае говорят, что множество Λ определяет конкретный метод (Λ-метод) суммирования рядов Фурье [1, с. 38].

При условии, что последовательность $\{\lambda_\delta(k)\}_{k=\overline{0,\infty}}$ такова, что ряд

$$K_\delta(t; \Lambda) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)\cos kt \tag{2}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, аналогично [1, с. 46] можно показать выполнение равенства

$$U_\delta(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_\delta(t; \Lambda)\,dt. \tag{3}$$

Если в соотношении (2) положить $\lambda_\delta(k) = e^{-\frac{k}{\delta}}$, $\delta > 0$, то интегралы типа (3) будем называть интегралами Пуассона [8, 9] или же интегралами Абеля–Пуассона [2, 3], и соответственно обозначать $P_\delta(f, x)$, т.е.

$$P_\delta(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt\right) dt. \tag{4}$$

Теперь перейдем к определению классов функций, используемых в данной работе. Итак, пусть $\tilde{N}$ — пространство 2π-периодических непрерывных функций, в котором норма определена равенством $\| f \|_C = \max\limits_t | f(t) |$; L_∞ — пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\| f \|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t | f(t) |$; L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций, в котором норма определена равенством $\| f \|_L = \| f \|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} | f(t) | dt.$

Далее, пусть $r > 0$ и β — фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\varphi \in L$, то такую функцию φ называют (r, β)-производной функции f в смысле Вейля–Надя (см., например [10, с. 24]) и обозначают $f_\beta^r(\cdot)$. Множество функций $f \in L$, которые удовлетворяют такому условию, обозначают W_β^r. Если $f \in W_\beta^r$ и $\| f_\beta^r(\cdot)\|_\infty \le 1$, то говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу $W_{\beta,\infty}^r$. Если же $f \in W_\beta^r$ и $\| f_\beta^r(\cdot)\|_1 \le 1$, то считается, что $f(x)$ принадлежит классу $W_{\beta,1}^r$.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(W_{\beta,1}^r; P_\delta)_1 = \sup_{f \in W_{\beta,1}^r} \| f(x) - P_\delta(f; x)\|_1, \ \ \delta \to \infty, \tag{5}$$

будем называть, следуя А.И. Степанцу [1, с. 198], задачей Колмогорова–Никольского. И если в явном виде найдена функция $\varphi(\delta) = \varphi(W_{\beta,1}^r; P_\delta(f, x))$ такая, что при $\delta \to \infty$ $\mathcal{E}(W_{\beta,1}^r; P_\delta(f, x))_1 = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, то считается, что решена задача Колмогорова–Никольского для класса $W_{\beta,1}^r$ и метода $P_\delta(f, x)$ Абеля–Пуассона.

Следует отметить, что задача Колмогорова–Никольского для интегралов Абеля–Пуассона на различных классах функций в равномерной метрике в свое время исследовалась в работах И.П. Натансона [11], А.Ф. Тимана [12], Е.Л. Штарка [13], В.А. Баскакова [14] и других авторов [15–22]. Что же касается решения этой задачи Колмогорова–Никольского на классах $W_{\beta,1}^r$ в интегральной метрике, то она до сих пор не была решена. Поэтому и возникла задача об отыскании асимптотических равенств для величин $\mathcal{E}(W_{\beta,1}^r; P_\delta)_1$ при $\delta \to \infty$, в этом и заключается основная цель данной работы.

Приближение функций классов Вейля–Надя их интегралами Абеля–Пуассона в интегральной метрике

Согласно соотношению (2) из [23] для интеграла Абеля–Пуассона (4) введем суммирующую, непрерывную на $[0, \infty)$ функцию $\mu(u)$, следующим образом:

$$\mu(u) = \mu_\delta(u) = \begin{cases} (1-e^{-u})\delta^r, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\ (1-e^{-u})u^{-r}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда

$$\hat{\mu}(t) = \hat{\mu}_\delta(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du, \ \ \beta \in R, \tag{7}$$

аналогично (4) из [24] обозначим преобразование Фурье-функции $\mu(u)$, заданной с помощью соотношения (6).

Согласно (6) из [25] положим, что

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty \mu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\mu}(t)|\,dt. \tag{8}$$

Теорема. Для любых действительных значений β и $r \in (0,1]$ при $\delta \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}(W^r_{\beta,1};\, P_\delta)_1 = \frac{1}{\delta^r} A(\mu) + O\left(\frac{1}{\delta}\right),\ \ \delta \to \infty, \tag{9}$$

где

$$A(\mu) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \begin{cases} \ln\delta + O(1), & r = 1, \\ O(1), & r < 1. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. Используя схему доказательства теоремы 1 из [26], в первую очередь покажем суммируемость преобразования Фурье-функции $\mu(t)$, заданной соотношением (6). Иными словами, надо доказать сходимость интеграла (8). А для этого, согласно теореме 1 работы [27], достаточно показать сходимость следующих интегралов:

$$\int\limits_0^{1/2} u\,|\,d\mu'(u)\,|,\ \int\limits_{1/2}^{\infty} |\,u-1\,|\,|\,d\mu'(u)\,|, \tag{11}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_0^{\infty} \frac{|\,\mu(u)\,|}{u}\,du,\ \int\limits_0^{1} \frac{|\,\mu(1-u)-\mu(1+u)\,|}{u}\,du. \tag{12}$$

Так как и при оценке первого интеграла (11) из [28] для оценки интеграла $\int\limits_0^{1/2} u\,|\,d\mu'(u)\,|$ разобьем промежуток $[0;1/2]$ на две части: $[0;1/\delta]$ и $[1/\delta;1/2]$. Исходя из (6), $\mu''(u) = -e^{-u}\delta^r$, $u \in [0;1/\delta]$, поэтому используя неравенство

$$1 - e^{-u} < u,\ \ u \ge 0, \tag{13}$$

получаем

$$\int\limits_0^{1/\delta} u\,|\,d\mu'(u)\,| = O(\delta^{r-2}),\ \ \delta \to \infty. \tag{14}$$

Положим $\mu(u) = \mu_1(u) + \mu_2(u)$, где

$$\mu_1(u) := (1 - e^{-u} - u)\,u^{-r}, \tag{15}$$

$$\mu_2(u) := u^{-r+1}. \tag{16}$$

Тогда

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\,|\,d\mu'(u)\,| \le \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\,|\,d\mu_1'(u)\,| + \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\,|\,d\mu_2'(u)\,|. \tag{17}$$

Найдем оценку первого интеграла в правой части неравенства (17). Сначала исследуем функцию

$$\bar{\nu}(u) = 1 - e^{-u} - u. \tag{18}$$

Имеем $\bar{\nu}'(u) = e^{-u} - 1$, $\bar{\nu}''(u) = -e^{-u}$, $\bar{\nu}(0) = 0$, $\bar{\nu}'(0) = 0$ и для $u \ge 0$

$$\bar{\nu}(u) \le 0,\ \ \bar{\nu}'(u) \le 0,\ \ \bar{\nu}''(u) < 0. \tag{19}$$

Учитывая (19) и неравенство $e^{-u} \le 1 - u + \dfrac{u^2}{2}$, $u \ge 0$, находим, что

$$|\,\bar{\nu}(u)\,| = u - 1 + e^{-u} \le \frac{u^2}{2},\ \ |\,\bar{\nu}'(u)\,| = 1 - e^{-u} \le u,\ \ |\,\bar{\nu}''(u)\,| = e^{-u} \le 1. \tag{20}$$

 ISSN 0572-2691

Далее, для $u \ge 1/\delta$, с учетом (15), (18) получаем

$$|d\mu_1'(u)| \le (|\bar{\nu}(u)| r(r+1)u^{-r-2} + 2|\bar{\nu}'(u)| ru^{-r-1} + |\bar{\nu}''(u)| u^{-r})\, du.$$

Отсюда, используя (20), находим

$$\int_{1/\delta}^{1/2} u\,|d\mu_1'(u)| \le \int_{1/\delta}^{1/2} \frac{r}{2}(r+1)u^{-r+1}du + (2r+1)\int_{1/\delta}^{1/2} u^{-r+1}du \le K \tag{21}$$

(здесь и далее константа K обозначает постоянные, вообще говоря, разные в разных соотношениях).

Оценим второй интеграл в соотношении (17). Учитывая, что при $u > 0$, $0 < r \le 1$ $d\mu_2'(u) = (-r(1-r)u^{-r-1})\, du < 0$, находим

$$\int_{1/\delta}^{1/2} u|d\mu_2'(u)| = -\int_{1/\delta}^{1/2} u\, d\mu_2'(u)\, du = O(1),\ \delta \to \infty. \tag{22}$$

Используя (17), (21), (22) и учитывая (14), получаем оценку

$$\int_{0}^{1/2} u\,|d\mu'(u)| = O(1),\ \delta \to \infty. \tag{23}$$

Перейдем к оценке второго интеграла из (11). При $u \in [1/\delta; \infty)$ из (6) следует, что

$$d\mu'(u) = \{(1-e^{-u})r(r+1)u^{-r-2} - 2ru^{-r-1}e^{-u} - u^{-r}e^{-u}\}\, du. \tag{24}$$

Тогда в силу (24) видим, что

$$\int_{1/2}^{\infty} |u-1||d\mu'(u)| \le r(r+1)\int_{1/2}^{\infty}(1-e^{-u})u^{-r-1}du + 2r\int_{1/2}^{\infty} e^{-u}u^{-r}du + \int_{1/2}^{\infty} e^{-u}u^{-r+1}du.$$

Применяя неравенства $1-e^{-u} \le 1, u \ge 0$ и $ue^{-u} \le K,\ u^{-r} \le 2^r,\ u \in [1/2, \infty)$, получаем

$$\int_{1/2}^{\infty} |u-1||d\mu'(u)| = O(1). \tag{25}$$

Аналогично оценке интеграла (2.29) из [29] найдем оценку первого интеграла из соотношений (12) на каждом промежутке — $[0;1/\delta]$, $[1/\delta;1]$ и $[1;\infty)$. Как следует из (6) и (13),

$$\int_{0}^{1/\delta} \frac{\mu(u)}{u}du = \delta^r \int_{0}^{1/\delta} (1-e^{-u})\frac{du}{u} = O(1). \tag{26}$$

Далее, из соотношений (6), (18) и (20) имеем

$$\left| \int_{1/\delta}^{1} \frac{\mu(u)}{u}du - \int_{1/\delta}^{1} u^{-r}du \right| \le \int_{1/\delta}^{1} \frac{|\bar{\nu}(u)|}{u}u^{-r}du \le K.$$

Отсюда

$$\int_{1/\delta}^{1} \frac{\mu(u)}{u}du = \begin{cases} \ln\delta + O(1), & r = 1, \\ O(1), & r < 1. \end{cases} \tag{27}$$

Для функции $\mu(\cdot)$ в случае, когда $u \ge 1$, можем записать, что

$$\left| \int_{1}^{\infty} \frac{\mu(u)}{u}du - \delta^r \int_{\delta}^{\infty} u^{-r-1}du \right| \le K. \tag{28}$$

Объединяя (26)–(28), получаем оценку

$$\int_0^{\infty}\frac{\mu(u)}{u}du=\begin{cases}\ln\delta+O(1), & r=1,\\ O(1), & r<1.\end{cases} \tag{29}$$

В силу формулы (21) работы [18] для функции $\mu(\cdot)$ заданной соотношением (6), запишем равенство

$$\int_0^1\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u}du=\int_0^1\frac{|e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}|}{u}du+O(H(\tau)),$$

где

$$H(\tau)=|\mu(0)|+|\mu(1)|+\int_0^{1/2}u|d\mu'(u)|+\int_{1/2}^{\infty}|u-1||d\mu'(u)|.$$

Поскольку $\int_0^1\frac{|e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}|}{u}du=O(1),$ то, как следует из (6), (23) и (25),

$$\int_0^1\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u}du=O(1),\ \delta\to\infty. \tag{30}$$

Таким образом, согласно теореме 1 из [27], интеграл $A(\mu)$ вида (8) сходится на всей числовой оси.

Пусть далее $f\in W^r_{\beta,1}.$ Тогда для функция $\mu(u),$ заданной соотношением (6), обозначим

$$F^r_{\beta,\delta}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^r_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\mu}(t)dt.$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2 работы [30, с. 976], несложно убедиться, что для 2π-периодической непрерывной функции $F^r_{\beta,\delta}(x)$ справедливо равенство

$$S[F^r_{\beta,\delta}(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}k^r\mu\left(\frac{k}{\delta}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Тогда, принимая во внимание (4) и (6), получаем

$$S\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f^r_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\mu}(t)dt\right]=\delta^r S[f(x)-P_{\delta}(f;x)].$$

Отсюда следует, что для каждой функции $f\in W^r_{\beta,1}$ и функции $\mu(u)$ вида (6)

$$f(x)-P_{\delta}(f;x)=\frac{1}{\delta^r}\int_{-\infty}^{+\infty}f^r_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat{\mu}(t)dt,\ \delta>0. \tag{31}$$

Далее, базируясь на результатах С.М. Никольского [31] и используя интегральное представление (31), можно показать, что для интеграла Абеля–Пуассона имеет место соотношение

$$\mathcal{E}(W^r_{\beta,1};P_{\delta})_1=\delta^{-r}A(\mu)+O\left(\delta^{-r}\int_{|t|\ge\delta\pi/2}|\hat{\mu}_{\delta}(t)|dt\right). \tag{32}$$

ISSN 0572-2691

Кроме того, согласно неравенствам (2.14) и (2.15) работы Л.И. Баусова [27], принимая во внимание формулы (23), (25), (29) и (30) настоящей работы, для величины $A(\mu)$ получаем оценку (10).

Оценим интеграл из правой части равенства (32). Для этого представим преобразование Фурье $\hat{\mu}(t) = \hat{\mu}_\delta(t)$ в виде

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{1/\delta} + \int_{1/\delta}^{\infty}\right)\mu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{33}$$

Дважды интегрируя по частям интегралы из (33) и используя тот факт, что $\mu(0) = 0$, $\lim\limits_{u\to\infty}\mu(u) = \lim\limits_{u\to\infty}\mu'(u) = 0$, получаем

$$\int_0^{1/\delta}\mu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du = \frac{1}{t}\mu\left(\frac{1}{\delta}\right)\sin\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \frac{1}{t^2}\mu'\left(\frac{1}{\delta}\right)\cos\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\mu'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2} - \frac{1}{t^2}\int_0^{1/\delta}\mu''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{34}$$

$$\int_{1/\delta}^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du = -\frac{1}{t}\mu\left(\frac{1}{\delta}\right)\sin\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2}\mu'\left(\frac{1}{\delta}\right)\cos\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int_{1/\delta}^{\infty}\mu''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{35}$$

Объединяя (34) и (35), запишем

$$\int_0^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du = -\frac{1}{t^2}\mu'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2} - \frac{1}{t^2}\int_0^{1/\delta}\mu''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int_{1/\delta}^{\infty}\mu''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Тогда

$$\left|\int_0^{\infty}\mu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le \frac{K}{t^2}\delta^r + \frac{1}{t^2}\left(\int_0^{1/\delta} + \int_{1/\delta}^{1} + \int_1^{\infty}\right)\left|\mu''(u)\right|du. \tag{36}$$

Оценим теперь интегралы в правой части соотношения (36). Учитывая, что $\mu''(u) < 0$, $u \in [0; 1/\delta]$, находим следующую оценку:

$$\int_0^{1/\delta}\left|\mu''(u)\right|du = O(\delta^{r-1}). \tag{37}$$

Используя представления (13) и (14) для функции $\mu(u)$, оценим второй интеграл в правой части соотношения (36). Имеем

$$\int_{1/\delta}^{1}|\mu''(u)|\,du \le \int_{1/\delta}^{1}|\mu_1''(u)|\,du + \int_{1/\delta}^{1}|\mu_2''(u)|\,du. \tag{38}$$

Обращая внимание на (19), (20), получаем

$$\int_{1/\delta}^{1/2} |\mu_1''(u)|\, du \le \left(\frac{r}{2}(r+1)+2r+1\right)\int_{1/\delta}^{1/2} u^{-r} du = \begin{cases} O(\ln\delta), & r=1, \\ O(1), & r<1; \end{cases} \tag{39}$$

$$\int_{1/\delta}^{1/2} |\mu_2''(u)|\, du = O(\delta^r). \tag{40}$$

Из (38)–(40) следует, что

$$\int_{1/\delta}^{1/2} |\mu''(u)|\, du = O(\delta^r),\ \ \delta\to\infty. \tag{41}$$

Используя (24), найдем оценку третьего интеграла в правой части соотношения (36). Имеем

$$\int_1^\infty |\mu''(u)|\, du \le r(r+1)\int_1^\infty (1-e^{-u})u^{-r-2}du + 2r\int_1^\infty e^{-u}u^{-r-1}du + \int_1^\infty e^{-u}u^{-r}du.$$

Отсюда, используя то, что $u^{-r}\le 1,$ для $u\in[1,\infty),$ а также (11), легко показать, что при $\delta\to\infty$

$$\int_1^\infty |\mu''(u)|\, du = O(1). \tag{42}$$

Объединив формулы (37), (41) и (42) получаем $\int_0^\infty |\mu''(u)|\, du = O(\delta^r).$ Отсюда

$$\int_{|t|\ge(\delta\pi)/2} |\hat{\mu}_\delta(t)|\, dt = O(\delta^{r-1}),\quad \delta\to\infty.$$

Таким образом, справедливость равенства (9) следует из последней оценки и соотношения (32).

Теорема доказана.

Заключение

В данной работе решена одна из классических задач теории приближения функций и прикладной математики. А именно, исследован вопрос о приближении в интегральной метрике классов функций с дробными производными их интегралами Абеля–Пуассона, которые в свою очередь являются решением краевой задачи эллиптического типа с заданными граничными условиями на границе области.

О тесной взаимосвязи между задачами о приближении линейными методами суммирования рядов Фурье в равномерной и интегральной метриках до сих пор было известно только для классов функций с целыми производными.

В ходе проведенных исследований на примере конкретного метода суммирования рядов Фурье, а именно метода Абеля–Пуассона, показана эквивалентность аппроксимативных характеристик как в равномерной, так и в интегральной метриках даже для классов функций с дробными производными. Таким образом, доказанная в работе теорема значительно расширяет границы применения задач теории приближения в равномерной метрике не только для классов функций с целыми производными, но и для классов функций с дробными производными.

Т.В. Жигалло

ПРО НАБЛИЖЕННЯ В СЕРЕДНЬОМУ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ ЇХ ІНТЕГРАЛАМИ АБЕЛЯ–ПУССОНА

Постійний розвиток прикладної математики зумовлений її тісним зв'язком із фундаментальними напрямками досліджень у суміжних областях природничих наук. Одним з актуальних напрямків сучасної науки є вивчення лінійних та нелінійних математичних ігрових моделей різних явищ та процесів природи. Поява таких моделей обумовлена використанням в сучасній фізиці і техніці впливів на речовину електричних полів великої інтенсивності, пучків частинок високої енергії, потужного лазерного когерентного випромінювання ударних хвиль високої інтенсивності, потужних теплових потоків. В основі таких моделей лежать диференціальні рівняння в частинних похідних, одним з типів яких є рівняння еліптичного типу, що описують стаціонарні процеси різної фізичної природи. Найбільш простим і поширеним рівнянням еліптичного типу є рівняння Лапласа, розв'язком якого при заданих умовах на межі області, що розглядається, є відомий інтеграл Абеля–Пуассона. Досліджено апроксимативні властивості розв'язку крайової задачі еліптичного типу із заданими граничними умовами на межі області на класах функцій з дробовими похідними. Розв'язок даної проблеми може використовуватися при вивченні та подальшому застосуванні методів розв'язуючих функцій для ігрових задач динаміки. Отримано асимптотичні рівності точних верхніх меж відхилень класів функцій з дробовими похідними від інтегралів Абеля–Пуассона в інтегральній метриці. Показано еквівалентність апроксимативних характеристик розв'язків крайових задач еліптичного типу із заданими граничними умовами на межі області як в рівномірній, так і в інтегральній метриках для класів функцій з дробовими похідними.

Ключові слова: дробові похідні, крайова задача, розв'язувальні функції, асимптотична рівність, наближення в середньому.

T.V. Zhyhallo

APPROXIMATION IN THE MEAN OF CLASSES OF FUNCTIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES BY THEIR ABEL–POISSON INTEGRALS

The constant development of the of applied mathematics is due to its close connection with the fundamental directions of research in the related fields of natural sciences. One of the most important areas of modern science is the study of linear and nonlinear mathematical game models of various phenomena and processes of nature. The emergence of such models is due to the use in modern physics and techniques of influence on matter of electric fields of high intensity, beams of high-energy particles, powerful laser coherent radiation of shock waves of high intensity and powerful heat fluxes. The basis of such models is the differential equations in partial derivatives, one of which is the equation of the elliptic type, describing the stationary processes of different physical nature. The simplest and most widespread equation of the elliptic type is the Laplace equation whose solution, under given conditions, on the boundary of the considered region, is the well-known Abel–Poisson integral. Approximate properties of the solution of an elliptic boundary value problem with given boundary conditions at the boundary of the domain on classes of functions with fractional derivatives are investigated. The solution to this problem finds its application in the study and further application of methods of resolving functions for game dynamics problems. Here we found the asymptotic equalities for the exact upper bounds of the deviations of classes of functions with fractional derivatives from their Abel–Poisson integrals in the integral metric. We establish the equivalence of the approximation characteristics of solutions of an elliptic boundary value problem with given boundary conditions at the boundary of domain both in the uniform and in the integral metrics for classes of functions with fractional derivatives.

Keywords: fractional derivatives; boundary problem; enable functions; asymptotic equality; approximation in the mean.

1. Степанец А.И. Методы теории приближения: В 2-х ч. Киев: Ин-т математики НАН Украны. 2002. Ч. 1. 427 с.
2. KharkevychYu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
3. Zhyhallo K.M., KharkevychYu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
4. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Pareto Optimality, Game Theory And Equilibria. Springer Optimization and Its Applications.* New York: Springer, 2008. **17**. P. 349–387. DOI: 10.1007/978-0-387-77247-9_13.
5. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in a parabolic system. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2016. **293**. P. 254–269. DOI: 10.1134/s0081543816050229.
6. Chikrii A.A. An analytic method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. **271**. P. 69–85. DOI: 10.1134/s0081543810040073.
7. Dziubenko K.G., Chikrii A.A. An approach problem for a discrete system with random perturbations. *Cybernet. Systems Anal.* 2010. **46**, № 2. P. 271–281. DOI: 10.1007/s10559-010-9204-3.
8. Kal'chuk I.V., KharkevychYu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
9. KharkevychYu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C_\beta^\psi H^\alpha$. *Math. Notes.* 2014. **96**, N 5-6. P. 1008–1019. DOI: 10.1134/s0001434614110406.
10. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. Киев : Наук. думка, 1987. 268 с.
11. Натансон И.П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона. *Докл. АН СССР.* 1950. **72**, N 1. С. 11–14.
12. Тиман А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона. *Докл. АН СССР.* 1950. **74**, N 1. С. 17–20.
13. Stark E.L. The complete asymptotic expansion for the measure of approximation of Abel–Poisson's singular integral for $\mathrm{Lip}\,1$. *Math. Notes.* 1973. **13**, N 1. P. 14–18. DOI: 10.1007/BF01093622.
14. Baskakov V.A. Some properties of operators of Abel–Poisson type. *Math. Notes.* 1975. **17**, N 2. P. 101–107. DOI: 10.1007/BF01161864.
15. KharkevychYu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
16. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
17. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C_{\beta,\infty}^\psi$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
18. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J.* 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.

19. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
20. Falaleev L.P. On approximation of functions by generalized Abel–Poisson operators. *Siberian Math. J.* 2001. **42**, N 4. P. 779–788. DOI: 10.1023/A:1010409901592.
21. Falaleev L.P. Approximation of conjugate functions by generalized Abel–Poisson operators. *Math. Notes.* 2000. **67**, N 4. P. 505–511. DOI: 10.1007/BF02676407.
22. Zhyhallo T.V. Approximation of functions holding the Lipschitz conditions on a finite segment of the real axis by the Poisson–Chebyshev integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 5. P. 34–48. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i5.40.
23. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T.A. On the approximation of the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. C. 719–729. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6.
24. Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 9. P. 1342–1363. DOI: 10.1007/s11253-007-0091-3.
25. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}_{\beta,1}^{\psi}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
26. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of function from class $\hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the unifom metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
27. Баусов Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I. *Изв. вузов. Математика.* 1965. **46**, № 3. С. 15–31.
28. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximation of functions from the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x.
29. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W_\beta^r H^\alpha$. *J. Math. Sci.* (N.Y.). 2018. **231**, N 1. P. 41–47. DOI: 10.1007/s10958-018-3804-2.
30. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
31. Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР.* Сер. мат. 1946. **10**, N 6. С. 207–256.

Получено 29.03.2019