УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.977

А.Г. Наконечный, Е.А. Капустян, А.А. Чикрий

ОБ УПРАВЛЕНИИ ИМПУЛЬСНЫМИ СИСТЕМАМИ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

Ключевые слова: импульсные системы, конфликтно-управляемые процессы, многозначные отображения, метод разрешающих функций, условие Понтрягина, измеримый выбор.

Введение

Наряду с классическими прямыми методами Л.С. Понтрягина [1], правилом экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [2], идеологией динамического программирования в изложении Р. Айзекса [3] в теории динамических игр достаточно эффективным средством для исследования конфликтно-управляемых процессов является метод разрешающих функций [4, 5].

Исторически этому методу предшествовала и сыграла ключевую роль некоторая скалярная минимаксиминная функция

$$\omega(n,k)=\min_{\|p_i\|=1}\max_{\|v\|=1}\min_{i=1,\ldots,k}\left|(p_i,v)\right|,\ \ p_i,v\in\mathbb{R}^n,\ \ n,k\geq 2,\ \ 0\leq\omega(n,k)\leq 1,$$

$\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово n-мерное пространство. Эта функция определяет преимущество убегающего над каждым из группы ν преследователей в глобальной задаче убегания одного управляемого объекта от группы. Она была введена на Одесской конференции по теории игр в 1974 г., а опубликована в работе [6]. Значения функции $\omega(n,k)$ в явном виде легко найти лишь при $n=2$, а для более высоких размерностей они до сих пор не найдены, известны лишь некоторые оценки.

Зная об этом и пытаясь вычислить функцию $\omega(n,k)$, Б.Н. Пшеничный обнаружил совершенно иной, но очень важный результат [7]. Он касался задачи в некотором смысле двойственной к задаче убегания от группы, а именно, задачи группового преследования. Сформулируем упомянутый результат на содержательном уровне.

Для этого рассмотрим простые движения (управление скоростью) группы преследователей

$$\dot{x}_i=u_i,\ \ \|u_i\|\leq 1,\ \ i=1,\ldots,k,\ \ x_i(0)=x_i^0,\ \ x_i\in\mathbb{R}^n$$

и одного убегающего

$$\dot{y}=v,\ \ \|v\|\leq 1,\ \ y(0)=y^0,\ \ y\in\mathbb{R}^n,\ \ n\geq 2.$$

Цель игры — точная поимка одним из преследователей убегающего $(x_i=y)$.

Оказалось, что если в выражении для функции $\omega(n, k)$ убрать внешний минимум и модуль и положить

$$p_i = \frac{x_i^0 - y^0}{\| x_i^0 - y^0 \|},$$

то справедливо следующее утверждение.

Неравенство $\max\limits_{\|v\|=1} \min\limits_{i=1,\ldots,k} (p_i, v) > 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $y^0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\{x_i^0\}$, где $\operatorname{int} \operatorname{co}$ — внутренность выпуклой оболочки, натянутой на векторы. Геометрически последнее означает «окружение» группой преследователей убегающего в начальный момент. Более того, этот факт является необходимым и достаточным условием поимки группой одного за конечное время, а процесс преследования реализуется с помощью параллельного преследования в классе контруправлений. При этом в построении управлений ключевую роль играют некоторые скалярные функции — прототип разрешающих.

Результат был настолько прост и нагляден, что получил впоследствии широкое развитие. Так, для линейных систем задача группового и поочередного преследования была рассмотрена в работах [4, 8, 9], нестационарные конфликтно-управляемые процессы изучены в [10, 11], дифференциально-разностным игровым задачам посвящены исследования [12, 13], игры с неполной или задержкой информации — [14, 15], конфликтные ситуации в системах с распределенными параметрами рассматривались в [16, 17], с дробными производными различных типов — в [18], в стохастических системах с уравнением Ито — в [19]. Близкие по содержанию минимаксные проблемы изучались в работах [20, 21].

Данная публикация посвящена применению аппарата верхних и нижних разрешающих функций, разработанного в [22], и изучавшегося в [23, 24], к исследованию управляемых импульсных систем, описанных в [25]. Главная черта таких процессов — разрывность траекторий. Импульсные процессы изучались, в частности, в [26, 27].

В настоящей статье на основе техники многозначных отображений и их селекторов получены достаточные условия разрешимости игровой задачи сближения для квазилинейных импульсных систем и цилиндрического терминального множества в ситуации, когда классическое условие Понтрягина, вообще говоря, не имеет места и в роли селекторов Понтрягина выступают некоторые функции сдвига.

Импульсные процессы. Постановка игровой задачи

В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается конфликтно-управляемый нестационарный квазилинейный процесс

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t, u, v), \quad t \ge t_0 \ge 0, \quad z(t_0) = z_0. \tag{1}$$

Здесь $A(t)$ — матричная функция с локально суммируемыми элементами. Функция $\varphi(t, u, v)$ задает блок управления, она измерима по t и непрерывна по совокупности (u, v). Управления игроков u и v в каждый момент времени выбираются из областей управления $U(t)$ и $V(t)$, являющихся измеримыми компактнозначными отображениями с образами в пространстве $\mathbb{R}^n$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

На рост в правой части в (1) наложено ограничение

$$\|\varphi(t, u, v)\| \le c(t) \quad \forall \; u \in U(t), v \in V(t), t \in [t_0, +\infty), \tag{2}$$

где $c(t)$ — некоторая локально суммируемая функция.

Наряду с системой (1) задано переменное терминальное множество

$$M^*(t) = M_0 + M(t), \ t \in [t_0, +\infty), \tag{3}$$

где M_0 — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, а $M(t)$ — измеримое компактнозначное отображение, образы которого принадлежат ортогональному дополнению к M_0 в $\mathbb{R}^n$. Обозначим его $L = M_0^{\perp}$. Предполагается, что процесс (1) является импульсным [25], т.е траектория системы (1) претерпевает разрывы первого ряда в заданных точках τ_i, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_i < \tau_{i+1} < \ldots < +\infty$, последовательность которых не имеет конечных точек сгущения.

Величина скачка в момент τ_i имеет вид

$$\Delta z\Big|_{t-\tau_i} = z(\tau_i + 0) - z(\tau_i) = B_i z_i + a_i, \ i = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где B_i — постоянные матрицы, $z_i = z(\tau_i)$, а a_i — заданные векторы из $\mathbb{R}^n$. Таким образом, траектория $z(t)$ в момент скачка непрерывна слева. Кроме того, предполагается, что матрицы $E + B_i$, $i = 1, 2, \ldots$, невырождены, E — единичная матрица.

В этих предположениях цель первого игрока (u), воздействуя на процесс (1)–(4) с помощью измеримого селектора $u(t)$ отображения $U(t)$, — вывести его траекторию на множество (3) за кратчайшее время при любом противодействии второго игрока (v) в виде измеримого селектора $v(t)$ отображения $V(t)$. Также управления предписывают допустимые стратегии игроков.

Определим взаимную информированность сторон в процессе игры. Игровая задача будет исследоваться с точки зрения первого игрока. Как уже было сказано, второй игрок в качестве допустимых управлений использует произвольные измеримые селекторы многозначного отображения $V(t)$. Таковые существуют в силу теоремы измеримого выбора [27]. Их совокупность обозначим Ω_E. Если первый игрок в момент t, $t \geq t_0$, имеет информацию о начальном состоянии процесса (t_0, z_0) и предыстории управления второго игрока $v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V(s), s \in [t_0, t]\}$, т.е. $u(t) = \ = u(t_0, z_0, t, v_t(\cdot))$, то говорят, что его управление предписано квазистратегией [2].

В случае, когда первый игрок принимает решение в момент t лишь на основе информации о начальном состоянии (t_0, z_0) и мгновенном значении управления второго игрока, т.е. $u(t) = u(t_0, z_0, t, v(t))$, то будем говорить о контруправлении по Н.Н. Красовскому [2], которое предписано стробоскопической стратегией О. Хайека [29].

Если противоборствующими сторонами выбраны допустимые управления $u(\tau)$ и $v(\tau)$, то из теории линейных импульсных систем [25] следует представление решения процесса (1) в виде аналога формулы Коши:

$$z(t) = \Phi(t, t_0)\, z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, \varphi(\tau, u(\tau), v(\tau))\, d\tau + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \Phi(t, \tau_i)\, a_i, \tag{5}$$

где

$$\Phi(t, t_0) = \Omega(t, \tau_{j+k})(E + B_{j+k}) \prod_{\nu=k}^{1} (\tau_{j+\nu}, \tau_{j+\nu-1})(E + B_{j+\nu-1})\, \Omega(\tau_j, t_0),$$

 ISSN 0572-2691

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1},$$

$$\Phi(t, \tau) = \Omega(t, \tau_{j+k}) \prod_{\nu=k}^{s+1} (E + B_{j+\nu}) \Omega(\tau_{j+\nu}, \tau_{j+\nu-1})(E + B_{j+s}) \Omega(\tau_{j+s}, \tau),$$

$$\tau_{j-1} < t_0 \le \tau_j \le \tau_{j+s-1} < \tau \le \tau_{j+s} < \tau_{j+k} < t \le \tau_{j+k+1}.$$

Здесь $\Omega(t, \tau)$ — матрицант [30] однородной системы (1).

Схема метода. Верхние и нижние разрешающие функции

Для исследования конфликтно-управляемого процесса (1)–(4) используем метод разрешающих функций [5] в ситуации, когда, вообще говоря, не имеет места условие Понтрягина [1].

Пусть π — оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ в L, положим

$$\varphi(t, U(t), v) = \{\varphi(t, u, v) : u \in U(t)\}, \ \ t \ge t_0, \ \ v \in V(t),$$

и введем многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Phi(t, \tau)\varphi(\tau, U(\tau), v), \ \ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W(t, \tau, v).$$

В дальнейшем будем предполагать, что отображение $W(t, \tau, v)$ замкнуто-значно, а $W(t, \tau)$ измеримо по τ в предположении, что оно имеет непустые образы на множестве

$$\Delta(t_0) = \{(t, \tau) : t_0 \le \tau \le t < +\infty\}.$$

Последнее условие называют условием Понтрягина [1, 5]. В дальнейшем будем предполагать, что это условие, вообще говоря, не имеет места, а, следовательно, не существует измеримого по τ селектора отображения $W(t, \tau)$. Его роль выполнит несколько иная функция, которая в случае справедливости условия Понтрягина совпадает с селектором Понтрягина [5, 22].

Итак, пусть $\gamma(t, \tau), \gamma : \Delta(t_0) \to L,$ — некоторая, почти везде ограниченная измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau \in [t_0, t]$ для каждого $t \in \mathbb{R}_{t_0}$, $\mathbb{R}_{t_0} = \{t : t \ge t_0\}$, функция, которую назовем функцией сдвига.

Обозначим

$$\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)) = \pi\Phi(t, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t} \gamma(t, \tau)\, d\tau + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \pi\Phi(t, \tau_i)\, a_i$$

и введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \ge 0 : [W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha[M(t) - \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot))] \ne \varnothing\}, \tag{6}$$

$$v \in V(\tau), \ (t, \tau) \in \Delta(t_0).$$

Взамен условия Понтрягина потребуем более слабое предположение, которое автоматически выполнено при упомянутом условии.

Условие 1. Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ имеет непустые образы при $v \in V(\tau)$, $(t, \tau) \in \Delta(t_0)$.

Отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции первого типа [22–24]:

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}, \alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\}$$

как соответствующие опорные функции [31] в направлении $+1$. Поскольку образы отображения $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ являются числовыми множествами, то, учитывая условие 1 теоремы о характеризации и обратном образе [28], можно показать [5], что замкнутозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ при фиксированном $t \in \mathbb{R}_{t_0}$ измеримо по τ при произвольном допустимом селекторе $v(\tau), \tau \in [t_0, t]$, а верхняя и нижняя разрешающие функции суперпозиционно измеримы по τ в силу теоремы об опорной функции [28], следовательно, функция $\alpha^*(t, \tau, v(\tau))$ измерима по $\tau, \tau \in [t_0, t]$, и интегрируема по Лебегу при любой измеримой функции $v(\cdot) \in \Omega_E$.

Рассмотрим множество

$$T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \geq t_0 : \inf_{v(\cdot)\in\Omega_E} \int_{t_0}^{t} \alpha^*(t, \tau, v(\tau))\, d\tau \geq 1 \right\}. \qquad (7)$$

Если для некоторого $t, t > t_0$, верхняя разрешающая функция первого типа $\alpha^*(t, \tau, v) \equiv +\infty$ для $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, то значение интеграла в соотношении (7) положим равным $+\infty$ и соответствующее неравенство выполнено автоматически, причем $t \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))$. В случае, когда неравенство в (7) не имеет места при всех $t > t_0$, положим $T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Наряду с ключевым многозначным отображением $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ введем следующее:

$$\mathfrak{A}(t, \tau) = \bigcap_{v\in V(\tau)} \mathfrak{A}(t, \tau, v), \ \ (t, \tau) \in \Delta(t_0).$$

Будем предполагать, что отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ измеримо по $\tau, \tau \in [t_0, t]$, для любых $t, t \geq t_0$.

Обозначив, следуя [31],

$$\operatorname{dom} \mathfrak{A} = \{(t, \tau) \in \Delta(t_0) : \mathfrak{A}(t, \tau) \neq \varnothing\},$$

предположим следующее.

Условие 2. $\operatorname{dom} \mathfrak{A} = \Delta(t_0)$.

Отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ порождает верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа:

$$\alpha^*(t, \tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\},\ \alpha_*(t, \tau) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}.$$

Эти функции не зависят от управляющих воздействий второго игрока, по теореме об опорной функции [28] они измеримы по τ.

Замечание 1. Верхние и нижние разрешающие функции первого и второго типа впервые введены в [22], для нестационарных процессов их свойства и взаимосвязь изучены в [23], а в работе [24] продемонстрирована эффективность предложенной техники на примере линейных конфликтно-управляемых процессов с простой матрицей.

Для формулировки основного результата введем дополнительно на основе верхних и нижних разрешающих функций второго типа следующие накопительные скалярные функции:

$$\alpha^*(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha^*(t, \tau)\, d\tau,\ \ \alpha_*(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha_*(t, \tau)\, d\tau.$$

Основной результат. Условия окончания игры

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть для импульсного конфликтно-управляемого процесса (1)–(4) существует такая функция сдвига $\gamma(t,\tau),\,(t,\tau)\in\Delta(t_0),$ что выполнено условие 2, к тому же отображение $M(t)$ выпуклозначно. Кроме того, множество $T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))$ непусто и T — некоторый его элемент.

Тогда если $\alpha_*(T)<1,$ то траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент T с помощью подходящей квазистратегии. Если, к тому же, выполнено условие $\alpha^*(T)\ge 1,$ то упомянутая цель может быть реализована в классе контруправлений.

Доказательство. Пусть $v(\tau),\ \ \tau\in[t_0,T],$ — произвольное допустимое управление второго игрока. Предположим, что верхняя разрешающая функция первого типа конечна для $v\in V(\tau),\ \ \tau\in[t_0,T]$ и $\alpha_*(T)<1.$ Учитывая содержательный смысл функции $\alpha^*(T,\tau,v)$, как выигрыш первого игрока в момент τ при противодействии $v\in V(\tau),$ а также накопительный критерий в (7), введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_{t_0}^{t}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau-\int_{t}^{T}\alpha_*(T,\tau)\,d\tau,\ \ t\in[t_0,T].$$

Здесь функция $\alpha^*(T,\tau,v)$ суперпозиционно измерима, поэтому $\alpha^*(T,\tau,v(\tau)),$ как, впрочем, и функция $\alpha_*(T,\tau),$ измеримы по $\tau,\tau\in[t_0,T].$ Следовательно, функция $h(t)$ абсолютно непрерывна на интервале $[t_0,T].$ Далее, так как

$$h(t_0)=1-\int_{t_0}^{T}\alpha_*(T,\tau)\,d\tau=1-\alpha_*(T)>0,$$

а по определению $h(T)=1-\int_{t_0}^{T}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau\le 0,$ то существует такой момент $t_*,$ $t_*\in[t_0,T],$ что $h(t_*)=0.$

Промежутки времени $[t_0,t_*)$ и $[t_*,T]$ игрового интервала назовем «активным» и «пассивным», имея ввиду то обстоятельство, что на первом из них суммарный выигрыш первого игрока накапливается в зависимости от поведения второго игрока, а на втором в этом уже нет необходимости — выигрыш фиксирован. В подтверждение сказанного для последующего выбора управлений введем многозначные отображения

$$\begin{gathered}U_1(\tau,v)=\\=\{u\in U(\tau):\pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v)-\gamma(T,\tau)\in\alpha^*(T,\tau,v)[M(T)-\xi(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot))]\},\\v\in V(\tau),\,\tau\in[t_0,t_*),\\U_2(\tau,v)=\\\{u\in U(\tau):\pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v)-\gamma(T,\tau)\in\alpha_*(T,\tau)[M(T)-\xi(t_0,z_0,T,\gamma(T,\cdot))]\},\\v\in V(\tau),\,\tau\in[t_*,T).\end{gathered}\tag{8}$$

Из предположений о свойствах параметров импульсного конфликтно-управляемого процесса, условия 2 и выражений для многозначных отображений $\mathfrak{A}(T,\tau,v)$ и $\mathfrak{A}(T,\tau)$ вытекает, что отображения $U_1(\tau,v)$ и $U_2(\tau,v)$ имеют непустые компактные образы.

По теореме об обратном образе [28] отображения $U_1(\tau, v)$ и $U_2(\tau, v)$ при допустимых управлениях $v(\tau)$ измеримы, а по теореме измеримого выбора [28] в каждом из них существует хотя бы по одному селектору: $u_1(\tau, v)$ и $u_2(\tau, v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями.

Положим $u_1(\tau) = u_1(\tau, v(\tau))$, $u_2(\tau) = u_2(\tau, v(\tau))$, где $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор отображения $V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Управление первого игрока на «активном» промежутке положим $u_1(\tau)$, а на «пассивном» — $u_2(\tau)$. Из формулы (5) имеем

$$\pi z(T) = \pi\Phi(T, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t_*} \pi\Phi(T, \tau)\varphi(\tau, u_1(\tau), v(\tau))\, d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{T} \pi\Phi(T, \tau)\varphi(\tau, u_2(\tau), v(\tau))\, d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \pi\Phi(T, \tau_i)\, a_i. \tag{9}$$

Учитывая законы выбора управления первым игроком на «активном» и «пассивном» промежутках, прибавив и вычтя из правой части (9) выражение $\int_{t_0}^{T} \gamma(T, \tau)\, d\tau$, получим

$$\pi z(T) \in \pi\Phi(T, t_0) z_0 + \int_{t_0}^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau))[M(T) - \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))]\, d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{T} \alpha_*(T, \tau)[M(T) - \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))]\, d\tau + \int_{t_0}^{T} \gamma(T, \tau)\, d\tau =$$

$$= \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))\left(1 - \int_{t_0}^{t_*} \alpha^* T, \tau, v(\tau)\, d\tau\right) - \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T, \tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau)) M(T)\, d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{T} \alpha_*(T, \tau) M(T)\, d\tau = \left[\int_{t_0}^{t_*} \alpha^* T, \tau, v(\tau)\, d\tau + \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T, \tau)\, d\tau\right] M(T) = M(T).$$

Здесь учтено равенство $h(t_*) = 0$, а соотношения при интегрировании многозначных отображений могут быть подтверджены применением аппарата опорных функций [31].

Случай $\alpha^*(T, \tau, v) = +\infty$ для некоторых $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, как следует из выражения (6), возможен лишь при условиях

$$0 \in M(T) - \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot)),\ \ 0 \in \pi\Phi(T, \tau)\varphi(\tau, U(\tau), v) - \gamma(T, \tau).$$

Если $\mathfrak{A}(T, \tau, v) = [0, +\infty)$, имеем возможность выбора в качестве разрешающей функции в тех точках $\tau \in [t_0, T]$, где $\alpha^*(T, \tau, v(\tau)) = +\infty$, произвольную положительную конечную суперпозиционно измеримую функцию с тем лишь условием, чтобы итоговая разрешающая функция обеспечивала равенство $h(t_*) = 0$ для некоторого момента переключения t_*, $t_* \in [t_0, T]$. Тем самым построение управления первого игрока сведено к предыдущей ситуации.

Случай $\alpha^*(T, \tau, v) = +\infty$ для всех $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, соответствует первому прямому методу Понтрягина [1, 5]. В самом деле, включение

 ISSN 0572-2691

$$0 \in \pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau, U(\tau), v) - \gamma(T,\tau)\ \forall\, v \in V(\tau),\ \tau \in [t_0, T],$$

гарантирует выполнение условия Понтрягина на интервале $[t_0, T]$, а функция сдвига $\gamma(T,\tau)$ является селектором Понтрягина [22]. Из включения $0 \in M(T) - -\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))$ вытекает соотношение

$$\pi\Phi(T, t_0)\, z_0 \in M(T) - \int_{t_0}^{T} W(T,\tau)\, d\tau,$$

из которого в силу конструкции первого прямого метода [1] вытекает возможность закончить игру (1)–(4) в момент T в классе стробоскопических стратегий [5].

Для рассмотрения случая $\alpha^*(T) \ge 1$, а $\alpha_*(T) < 1$ введем контрольную функцию

$$h_1(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \alpha^*(T,\tau)\, d\tau - \int_{t}^{T} \alpha_*(T,\tau)\, d\tau.$$

Будем считать, что $\alpha^*(T,\tau) \ne +\infty$, $\tau \in [t_0, T]$. Тогда

$$h_1(t_0) = 1 - \alpha_*(T) > 0,\ \ h_1(T) = 1 - \alpha^*(T) \le 0.$$

В силу непрерывности функции $h_1(t)$ существует такой момент t_*^1, $t_*^1 \in [t_0, T]$, что $h_1(t_*^1) = 0$, причем t_*^1 уже не зависит от $v(\cdot)$. На обоих участках $[t_0, t_*^1]$, $[t_*^1, T]$, соответствующих данной ситуации, рассмотрим многозначные отображения (8), где вместо t_* фигурирует момент переключения t_*^1, а в выражении для $U_1(\tau, v)$ вместо $\alpha^*(T,\tau,v)$ входит функция $\alpha^*(T,\tau)$. Это многозначное отображение обозначим $U_1'(\tau, v)$. Учитывая свойства отображений $U_1'(\tau, v)$ и $U_2(\tau, v)$, выберем их суперпозиционно измеримые селекторы, которые и определяют допустимые управления первого игрока на обоих участках. Заключительные рассуждения аналогичны предыдущим ситуациям.

Замечание 2. В случае, когда условие Понтрягина выполнено, нижние разрешающие функции обоих типов равны нулю [5, 22], что упрощает построение управлений первого игрока на «активном» и «пассивном» участках.

Замечание 3. Для иллюстрации полученных результатов можно воспользоваться примерами импульсных конфликтно-управляемых процессов, приведенных в [25].

Заключение

Для нестационарных квазилинейных игровых задач, описываемых системами с импульсным воздействием, установлены условия вывода траекторий на цилиндрическое терминальное множество в конфликтной ситуации. Базовым аппаратом для исследования является метод разрешающих функций, в основе которого лежит использование многозначных отображений и их селекторов, а также принцип измеримого выбора Филиппова–Кастена для построения управлений. Особенностью данной работы является использование верхних и нижних разрешающих функций двух типов, когда классическое условие Понтрягина не имеет места. Последнее обстоятельство позволяет существенно расширить класс задач, поддающихся решению.

О.Г. Наконечний, О.А. Капустян, А.О. Чикрій

ПРО КЕРУВАННЯ ІМПУЛЬСНИМИ СИСТЕМАМИ В КОНФЛІКТНІЙ СИТУАЦІЇ

Отримано достатні умови зближення траєкторії конфліктно-керованого процесу, який задається імпульсною системою диференціальних рівнянь, із заданою циліндричною термінальною множиною. Умови реалізовано при різній інформованості в класі квазі- та стробоскопічних стратегій на основі ідеології розв'язуючих функцій, що використовують обернені функціонали Мінковського. Математичним апаратом у дослідженні є многозначні відображення та їх селектори. Побудова керувань, що гарантують результат першого гравця, здійснюється на основі теорем вимірного вибору типу леми Філіппова–Кастена. Характерною особливістю є та обставина, що класична умова Понтрягіна, взагалі кажучи, не має місця і роль селекторів Понтрягіна відіграють спеціальні функції зсуву, а замість розв'язуючих функцій розглядаються верхні та нижні розв'язуючі функції двох типів, які дозволяють реалізувати процес зближення за скінченний час. Останнє нововведення дозволяє істотно розширити клас ігрових задач, які піддаються дослідженню на основі ідеології розв'язуючих функцій зі збереженням основних конструкцій методу. Зокрема, вдається охопити процеси з розривними траєкторіями, що функціонують в умовах конфлікту та невизначеності.

Ключові слова: імпульсні системи, конфліктно-керовані процеси, многозначні відображення, метод розв'язуючих функцій, умова Понтрягіна, вимірний вибір.

A.G. Nakonechnyi, E.A. Kapustian, A.A. Chikrii

CONTROL OF IMPULSE SYSTEMS IN CONFLICT SITUATION

The sufficient conditions are obtained for hitting of conflict-controlled process, given by impulse differential system with prescribed cylindrical terminal set. The conditions are realized at different information content in the class of quasi and stroboscopic strategies based on ideas of the method of resolving functions using the inverse Minkowski functionals. Many-valued mappings and their selections represent mathematical apparatus of investigation. Specific feature of the problem which the paper deals with is that generally speaking the classic Pontryagin condition does not hold. Here special shifting functions play the role of Pontryagin selection and instead of resolving functions the upper and the lower resolving functions of two kinds are applied that allow the convergence process to be realized in a finite time. Above mentioned innovation allows essential extention of the class of game problems which are susceptible to analysis on the basis of the resolving functions ideology under the main method constructions. In particular it becomes possible to encompass the processes with discontinuous trajectories functioning in condition of conflict and uncertainty.

Keywords: impulse system, conflict-controlled processes, set-valued mapping, method of resolving functions, Pontryagin's condition, measurable selection.

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М. : Наука, 1988. **2.** 576 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М. : Наука, 1970. 420 с.
3. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М. : Мир, 1967. 480 с.
4. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. — Springer Science and Business Media. Dordrecht; Boston; London. 2013. 424 p.
5. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения. *Труды Математического института имени В.А. Стеклова.* 2010. **271**. С. 76–92.
6. Чикрий А.А. Линейная задача убегания от нескольких преследователей. *Известия АН СССР, Техническая кибернетика.* 1976. № 4. С. 46–50.
7. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами. *Кибернетика.* 1976. № 3. С. 145–146.

8. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Групповое преследование в дифференциальных играх. *Труды политехнического института*. Лейпциг. 1982. С. 13–27.
9. Bigun Ya. I., Krivonos I.Yu., Chikrii Al.A., Chikrii K. A. Group approach under phase constraints. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. **46**, N 4. P. 1–8.
10. Krivonos I.Yu., Chikrii Al.A., Chikrii K. A. On a approach scheme in nonstationary game problems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2013. **45**, N 8. P. 32–40.
11. Pepelyaev V.A., Chikrii Al.A. On the game dynamics problems for nonstationary controlled processes. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. **49**, N 3. P. 13–23.
12. Baranovskaya L. A method of resolving functions for one class of pursuit problems. *Eastern–European Journal of Enterprise Technologies.* 2015. **2**, N 4. P. 4–8.
13. Baranovska L.V. Method of resolving functions for the differential–difference pursuit game for different–inertia objects, Studies in Systems. *Decision and Control.* 2016. **69**. P. 159–176.
14. Chikrii G.Ts. On one problem of approach for damped oscillations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2009. **41**, N 10. P. 1–9.
15. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. **43**, N 2. P. 233–245.
16. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2016. **293**, N 1. P. 254–269.
17. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. On a differential game in a system with distributed parameters. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2016. **292**, N 1. P. 276–285.
18. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *Int. J. Optimization methods and software*. Taylor and Francis Group Ltd, Oxfordshire, ИК. 2008. **3**, N 1. P. 39–73.
19. Власенко Л.А., Руткас А.Г., Чикрий А.А. О дифференциальной игре в стохастической системе. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2019. **25**, № 3. С. 45–61.
20. Kapustyan E.A., Nakonechnyj A.G. Optimal bounded control synthesis for a parabplic boundary–value problem with fast oscillatory coefficients. *Journal of Automation and Information Sciences.* 1999. **31**, N 12. P. 33–44.
21. Kapustyan E.A., Nakonechnyj A.G. The minimax problems of pointwise observation for a parabolic boundary value problem. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2002. **34**, N 5–8. P. 52–63.
22. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image Structure of Multivalued Mappings in Game Problems of Motion Control. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. **48**, N 3. P. 20–35.
23. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2017. № 1. С. 293–305.
24. Наконечный А. Г., Мащенко С.О., Чикрий В.К. Управление движением в условиях противодействия. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2018. № 1. С. 53–71.
25. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев : Вища шк., 1987. 288 с.
26. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. Київ : Наук. думка, 2005. 220 с.
27. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. : Наука, 1985. 224 с.
28. Aubin J.-P., Frankowska He. Set–valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
29. Hajek O. Pursuit Games. *Academic Press*. 1975. **12**. 266 p.
30. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 575 с.
31. Рокафеллар Т. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 470 с.

Получено 22.04.2019