УДК 517.97

М.М. Ягубова, Р.Б. Заманова

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННОМ И СТАРТОВОМ УПРАВЛЕНИЯХ

Ключевые слова: начально-краевая задача, обобщенное решение, метод Фурье, задача на собственные значения.

Постановка задачи. Пусть процесс в прямоугольнике $Q=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le t_1\}$ описывается начально-краевой задачей

$$\beta z_{tt}+z_t-\varepsilon z_{xxt}-z_{xx}=u(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$z(x,0)=0,\ \ z_t(x,0)=v^1(x),\ \ 0<x<1, \tag{2}$$

$$z(0,t)=z(1,t)=0,\ \ 0<t<t_1, \tag{3}$$

где β,ε — положительные постоянные, $u(x,t)$ — распределенное управление, $v^1(x)$ — стартовое управление, t_1 — фиксированный момент времени.

Требуется найти такие управляющие функции $u(x,t)\in L_2(Q)$, $v^1(x)\in L_2(0,1)$, для которых соответствующее им решение $z(x,t)$ задачи (1)–(3) удовлетворяет условию

$$z(x,t_1)=\varphi(x) \tag{4}$$

и функционал

$$J(u,v^1)=\iint\limits_Q u^2(t,x)\,dtdx+\alpha_1\int\limits_0^1 (v^1(x))^2\,dx \tag{5}$$

принимает минимальное значение, где α_1 — положительное постоянное число, $\varphi(x)\in L_2(0,1)$ [1–8].

В дальнейшем под решением понимается обобщенное решение $z(x,t)\in$ $\in L_\infty(0,t_1;\ W_2^1(0,1))$, $z_t(x,t)\in L_\infty(0,t_1;\ L_2(0,1))$, удовлетворяющее тождеству

$$\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^1\{[\beta\ z_t(x,\tau)+z(x,\tau)]g(x,\tau)-\varepsilon z(x,\tau)\,g_{xx}(x,\tau)-\beta v^1(x)g(x,\tau)\}\,dxd\tau=$$

$$=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^1[z(x,s)\,g_{xx}(x,\tau)+u(x,s)\,g(x,\tau)]\,dxdsd\tau$$

для произвольной функции $g(x,t)\in L_2(0,t_1;\overset{0}{W}{}_2^2(0,1))$, $g_t(x,t)\in L_2(0,t_1;\ 0,1)$ [9].

Представление решения начально-краевой задачи. Для фиксированных $u(t,x),v^1(x)$ решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$z(x,t)=y(x,t)+\omega(x,t),$$

где $y(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \beta y_{tt} + y_t - \varepsilon\, y_{xxt} - y_{xx} = 0, \\ y(x,0) = 0,\ y_t(x,0) = v^1(x), \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

а $\omega(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \beta\omega_{tt} + \omega_t - \varepsilon\omega_{xxt} - \omega_{xx} = u(x,t), \\ \omega(x,0) = \omega_t(x,0) = 0, \\ \omega(0,t) = \omega(1,t) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решение задачи (6) ищем в виде $y(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя это в уравнение, относительно $X(x)$ получим задачу на собственные значения

$$X''(x) + \lambda X = 0,\ \ X(0) = X(1) = 0.$$

Известно, что собственными значениями и соответствующими ортонормированными собственными функциями этой задачи являются

$$\lambda_k = k^2\pi^2,\ \ X_k(x) = \sqrt{2}\sin \pi kx,\ \ k = 1, 2, \ldots .$$

С учетом этого относительно $T(t)$ получаем линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\beta\ddot{T} + (1 + \varepsilon k^2\pi^2)\,\dot{T} + k^2\pi^2 T = 0, \tag{8}$$

общим решением которого является

$$T_k(t) = a_k e^{l_i(k)t} + b_k e^{l_2(k)t},$$

где $l_1(k), l_2(k)$ — корни соответствующего характеристического уравнения, a_k, b_k — неизвестные числа, которые определяются из условий $y(x,0) = 0$, $y_t(x,0) = v^1(x)$. Тогда относительно a_k, b_k получается система

$$\begin{cases} a_k + b_k = 0, \\ l_1(k)a_k + l_2(k)b_k = \dfrac{1}{2}v_k^1. \end{cases}$$

$$v_k^1 = \sqrt{2}\int_0^1 v^1(x)\sin \pi kx dx.$$

Из этой системы имеем

$$a_k = \frac{-1}{\sqrt{2}(l_2(k) - l_1(k))}\int_0^1 v^1(\xi)\sin \pi k\xi d\xi,$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{2}(l_2(k) - l_1(k))}\int_0^1 v^1(\xi)\sin \pi k\xi d\xi.$$

Следовательно, получаем, что

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(l_2(k) - l_1(k))}\times$$

$$\times\left\{\int_0^1 [(-v^1(\xi))e^{l_1(k)t}+(v^1(\xi))e^{l_2(k)t}]\sin\pi k\xi d\xi\right\}\sin\pi kx \tag{9}$$

формально является решением задачи (6).

Решение задачи (7) ищем в виде

$$\omega(x,t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}R_k(t)\sin\pi kx,$$

учитывая условия $\omega(x,0)=\omega_t(x,0)=0$ и разложение

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\pi kx,\ \ u_k(t)=\sqrt{2}\int_0^1 u(\xi,t)\sin\pi k\xi d\xi.$$

Тогда относительно $R_k(t)$ получается следующая задача Коши

$$\beta\ddot{R}_k+(1+\varepsilon\pi^2k^2)\dot{R}_k+\pi^2k^2R_k=u_k(t), \tag{10}$$

$$R_k(0)=0,\ \ \dot{R}_k(0)=0. \tag{11}$$

Легко проверить, что решение задачи (10), (11) имеет вид

$$R_k(t)=\frac{1}{\beta(l_2(k)-l_1(k))}\int_0^t [e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)}]u_k(s)ds,\ \ k=1,2,\ldots,$$

поэтому формальным решением задачи (7) будет

$$\omega(x,t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta(l_2(k)-l_1(k))}\int_0^t [e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)}]u_k(s)\,ds\sin\pi kx. \tag{12}$$

На основе (9) и (12) получаем, что

$$z(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{l_2(k)-l_1(k)}\times$$

$$\times\left\{-\sqrt{2}\int_0^1 [(-v^1(\xi))e^{l_1(k)t}+(v^1(\xi))e^{l_2(k)t}]\sin\pi k\xi d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta}\int_0^t (e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)})\,u_k(s)\,ds\right\}\sin\pi kx \tag{13}$$

формально является решением задачи (1)–(3). Чтобы доказать, что ряд (13) является обобщенным решением (1)–(3), докажем, что ряды в (13) и ряды, получаемые дифференцированием по t один раз и один раз по x, сходятся равномерно по t в $L_2(0,1)$.

Поскольку система собственных функций $\{\sqrt{2}\sin\pi kx\}$ ортонормированная, для доказательства сходимости ряда (13) достаточно доказать равномерную сходимость ряда, составленного из квадратов коэффициентов, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(l_2(k)-l_1(k))}[(-v_k^1)e^{l_1(k)t}+(v_k^1)e^{l_2(k)t}]+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\beta}\int_0^t (e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)})u_k(s)ds\Bigg\}^2. \qquad (14)$$

Применяя сначала неравенство о среднем значении, а потом неравенство Коши–Буняковского, получаем, что ряд (14) мажорируется рядом

$$4\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(l_2(k)-l_1(k))}[(-v_k^1)^2e^{2l_1(k)t}+(v_k^1)^2e^{2l_2(k)t}]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta^2}\int_0^t (e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)})^2ds\int_0^t u_k^2(s)\,ds\right\}. \qquad (15)$$

Так как $l_1(k)<l_2(k)<0,$ то

$$\frac{1}{(l_2(k)-l_1(k))}[(-v_k^1)^2e^{2l_1(k)t}+(v_k^1)^2e^{2l_2(k)t}]\le(v_k^1)^2,$$

и так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(v_k^1)^2$ сходится, то ряд, составленный из первых слагаемых (15), сходится равномерно по t.

Оценим общий член ряда, составленного из вторых слагаемых (15). Вычисляя интеграл $\int_0^t [e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)}]^2ds$ и отбрасывая отрицательные слагаемые, получаем, что

$$\frac{1}{\beta^2(l_2(k)-l_1(k))^2}\int_0^t [e^{2l_2(k)(t-s)}-2e^{l_1(k)+l_2(k)(t-s)}+e^{2l_1(k)(t-s)}]ds\le$$

$$\le\frac{1}{\beta^2(l_2(k)-l_1(k))^2}\left[-\frac{l_1(k)+l_2(k)}{2l_1(k)l_2(k)}-\frac{2}{l_1(k)+l_2(k)}\right].$$

Так как $l_1(k)+l_2(k)=-\frac{1+\varepsilon k^2\pi^2}{\beta}$, $l_1(k)l_2(k)=\frac{k^2\pi^2}{\beta}$, то легко показать, что

$$\frac{1}{\beta^2(l_2(k)-l_1(k))^2}\left[-\frac{l_1(k)+l_2(k)}{2l_1(k)l_2(k)}-\frac{2}{l_1(k)+l_2(k)}\right]\sim\frac{1}{k^4}.$$

В силу этого можно заключить, что ряд, составленный из вторых слагаемых (15), равномерно сходится в $L_2(0,1)$.

Теперь рассмотрим ряды, составленные из производных по t и x, формально обозначая

$$z_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{l_2(k)-l_1(k)}\times$$

$$\times\left\{\int_0^1 [(-v^1(\xi))e^{l_1(k)t}+l_2(k)(v^1(\xi))e^{l_2(k)t}]\sin\pi k\xi\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{\beta}\int_0^t (l_2(k)e^{l_2(k)(t-s)}-l_1(k)e^{l_1(k)(t-s)})u_k(s)ds\right\}\sin\pi kx, \qquad (16)$$

 ISSN 0572-2691

$$z_x(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{l_2(k)-l_1(k)}\times$$

$$\times\left\{\int_0^1[(-v^1(\xi))e^{l_1(k)t}+(v^1(\xi))e^{l_2(k)t}]\sin\pi k\xi\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{\beta}\int_0^t(e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)})u_k(s)ds\right\}\pi k\cos\pi kx. \quad (17)$$

Чтобы доказать сходимость в $L_2(0,1)$ ряда (16) с учетом ортонормированности системы $\{\sqrt{2}\sin\pi kx\}$, достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(l_2(k)-l_1(k))^2}\left\{\int_0^1[l_2(k)e^{l_2(k)t}-l_1(k)e^{l_1(k)t}]\sin\pi k\xi d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta}\int_0^t(l_2(k)e^{l_2(k)(t-s)}-l_1(k)\,e^{l_1(k)(t-s)})u_k(s)ds\right\}^2\sin^2\pi kx, \quad (18)$$

составленного из квадратов коэффициентов ряда (16).

Рассуждая так же, как и в доказательстве сходимости ряда (14), получаем, что ряд (18) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(l_2(k)-l_1(k))^2}\left\{(l_2(k)\,e^{l_2(k)t}-l_1(k)\,e^{l_1(k)t})^2(v_k^1)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta^2}\int_0^t(l_2(k)\,e^{l_2(k)(t-s)}-l_1(k)\,e^{l_1(k)(t-s)})^2ds\int_0^t u_k^2(s)ds\right\}. \quad (19)$$

Так как $l_1(k)<l_2(k)<0,$ порядок $(l_2(k)\,e^{l_2(k)t}-l_1(k)\,e^{l_1(k)t})^2$ не превосходит четырех по $k,$ а $(l_2(k)-l_1(k))^2\sim k^4.$ Далее, если интегрировать $\int_0^t[l_2(k)\,e^{l_2(k)(t-s)}-$ $-l_1(k)\,e^{l_1(k)(t-s)}]^2ds$ и отбрасывать отрицательные слагаемые, получим, что порядок этого интеграла не превосходит двух. Поэтому ряд (19) мажорируется рядом $M\sum_{k=1}^{\infty}[(v_k^1)^2+u_k^2],$ где $M>0$ — некоторое число, $v_k^1=\sqrt{2}\int_0^1 v^1(x)\sin\pi kxdx,$ $u_k^2=\int_0^1\int_0^{t_1}u^2(x,t)dxdt.$ Но так как $u(x,t)\in L_2(Q),\ v^1(x)\in L_2(0,1),$ то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(v_k^1)^2=\|v^1\|_2^2,\ \sum_{k=1}^{\infty}u_k^2=\|u\|_2^2,$$

и в силу этого ряд (19) сходится равномерно по t в $L_2(0,t_1),$ следовательно, ряд (16) сильно сходится в $L_2(Q).$

Докажем сходимость (17). Рассуждая так же, как и выше, при доказательстве сходимости ряда (16) с учетом ортонормальности системы $\{\cos\pi kx,\ k=1,2,\ldots\}$ получим, что достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^2k^2}{(l_2(k)-l_1(k))^2}\left\{\int_0^1(e^{l_2(k)t}-e^{l_1(k)t})\,v^1(\xi)\sin\pi k\xi d\xi+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\beta^2}\int_0^t (e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)})u_k(s)\,ds\Bigg\}^2. \qquad (20)$$

А сходимость этого ряда, применением вышеупомянутых неравенств, сводится к исследованию сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi^2k^2}{(l_2(k)-l_1(k))^2}\Bigg\{(e^{l_2(k)t}-e^{l_1(k)t})^2\frac{1}{2}(v_k^1)^2+$$

$$+\frac{2}{\beta^2}\int_0^t (e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)})^2ds\int_0^t u_k^2(s)\,ds\Bigg\}.$$

Так как $l_1(k)<l_2(k)<0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} l_2(k)=-\frac{2}{\varepsilon}$, можно считать, что порядок малости $(e^{l_2(k)t}-e^{l_1(k)t})^2$ не меньше $\frac{1}{k^2}$. Вычисляя интеграл $\int_0^t (e^{l_2(k)(t-s)}-e^{l_1(k)(t-s)})^2ds$ и отбрасывая отрицательные слагаемые, получим, что этот интеграл имеет одинаковый порядок с $\frac{1}{k^2}$. Следовательно, k-е слагаемое в последнем ряду имеет порядок $\frac{1}{k^4}$. Отсюда следует, что этот ряд мажорируется рядом $M_1\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}[(v_k^1)^2+u_k^2]$, который, в силу того что $v^1(x)\in L_2(0,1)$, $u(x,t)\in L_2(Q)$, сходится, и значит, ряд (20) сходится равномерно по t. Поэтому ряд (17) сходится сильно в $L_2(Q)$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. Для любых $u(t,x)\in L_2(Q)$, $v^1(x)\in L_2(0,1)$ решение задачи (1)–(3) представляется в виде (13).

Учитывая доказанные утверждения, задачу минимума функционала (5) приведем к задаче на условный экстремум.

Для этого в (4) вместо $z(x,t_1)$ подставим (13). Тогда после несложных преобразований получим равенства

$$2\int_0^{t_1} A_k(t)u_k(t)\,dt+\beta C_kv_k^1=2\beta(l_2(k)-l_1(k))\varphi_k,\ k=1,2,..., \qquad (21)$$

где

$$A_k(t)=e^{l_2(k)(t_1-t)}-e^{l_1(k)(t_1-t)},\ C_k=e^{l_2(k)t_1}-e^{l_1(k)t_1},\ \varphi_k=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\sin\pi kx dx.$$

Подставляя разложение $u(x,t)$ и $v^1(x)$ в (5) и учитывая ортонормированность системы $\{\sin\pi kx\}$, функцию $J(u,v^1)$ приведем к виду

$$J(u,v^1)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{t_1}u_k^2(t)\,dt+\alpha_1(v_k^1)^2\right]. \qquad (22)$$

Таким образом, задача минимума функционала (5) сведена к задаче минимума (22) при условиях (21). Так как условия (21) и слагаемые в (22) не зависят друг от друга, можно рассматривать последовательность задач минимума функционала

$$J_k(u_k, v_k^1) = \int_0^{t_1} u_k^2(t)\,dt + \alpha_1 (v_k^1)^2$$

при условии (21).

Составим функционал Лагранжа этой задачи

$$L(u_k, v_k^1, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 [u_k^2(t) + \alpha_1 (v_k^1)^2] + \lambda_1 [2A_k(t)\,u_k(t) + \beta C_k v_k^1].$$

Из [10] для определения $u_k(t),\ v_k^1$ получаем систему

$$\lambda_0 u_k(t) + \lambda_1 A_k(t) = 0,\ \lambda_0 \alpha_1 v_k^1 + \beta C_k = 0.$$

Полагая здесь $\lambda_0 = 1,$ находим

$$u_k(t) = -\lambda_1 A_k(t),\ v_k^1 = -\lambda_1 \frac{\beta}{\alpha_1} C_k. \qquad (*)$$

Определяя λ_1 из условия (21) и подставляя в (*) окончательно, получаем

$$\tilde{u}_k(t) = \frac{\alpha_1 \beta (l_2(k) - l_1(k))\,\varphi_k A_k(t)}{D_k},\ \ \tilde{v}_k^1 = \frac{\beta^2 (l_2(k) - l_1(k)\,\varphi_k C_k}{D_k}, \qquad (23)$$

где

$$D_k = 2\alpha_1 \int_0^{t_1} A_k^2(t)\,dt + \beta^2 C_k^2.$$

Покажем, что найденные $\tilde{u}_k(t),\ \tilde{v}_k^1$ доставляют минимум функционалу $J(u_k, v^1)$ при условии (21). Для этого рассмотрим задачу минимума функции

$$I_k(\delta, \gamma) = \int_0^{t_1} (\tilde{u}_k(t) + \delta h_k(t))^2\,dt + \alpha_1 (\tilde{v}_k^1 + \gamma r_k)^2$$

при условии

$$2\int_0^{t_1} A_k(t)[\tilde{u}_k(t) + \delta h_k(t)]\,dt + \beta C_k (\tilde{v}_k^1 + \gamma r_k) = \beta (l_2(k) - l_1(k))\,\varphi_k. \qquad (24)$$

Составляя функцию Лагранжа и применяя известное достаточное условие из [11], получаем, что условно-стационарная точка $(0, 0)$ функции Лагранжа доставляет локальный минимум функции $I_k(\delta, \gamma)$ при условии (24). Следовательно, $\tilde{u}_k(t), \tilde{v}_k^1$ доставляет минимум функционалу $J_k(u_k, v_k^1)$ при условии (21) [12–18].

Теперь докажем сходимость рядов в (22) при $\tilde{u}_k(t),\ \tilde{v}_k^1.$ Для этого оценим $\tilde{u}_k^2(t), (\tilde{v}_k^1)^2.$ Ясно, что

$$\tilde{u}_k^2(t) = \frac{\alpha_1^2 \beta^2 (l_2(k) - l_1(k))^2 \varphi_k^2 A_k^2(t)}{\left[2\alpha_1 \int_0^{t_1} A_k^2(t)dt + \beta^2 C_k^2\right]^2} \le \frac{\alpha_1^2 \beta^2 (l_2(k) - l_1(k))^2 \varphi_k^2 A_k^2(t)}{\beta^4 C_k^4}.$$

Легко показать, что стационарная точка $t = t_1 - \dfrac{1}{l_2(k) - l_1(k)} \ln \dfrac{l_1(k)}{l_2(k)}$ функции $A_k^2(t)$ является точкой ее наибольшего значения, и так как

$$A_k^2(t) \le A_k^2(\tilde{t}) = \left(\frac{l_2(k) - l_1(k)}{l_2^{(k)}}\right)^2 e^{2l_1(k)(t_1 - \tilde{t})},$$

то

$$\tilde{u}_k^2(t) \le \frac{\alpha_1^2}{\beta^2}\frac{(l_2(k) - l_1(k))^4}{C_k^4 l_2^2(k)}\varphi_k^2 e^{2l_1(k)\frac{1}{l_2(k) - l_1(k)}\ln\frac{l_1(k)}{l_2(k)}}.$$

Так как $l_1(k) < l_2(k) < 0,$ из последних оценок следует, что порядок роста $\tilde{u}_k^2(t)$ и $(\tilde{v}_k^1)^2$ не меньше e^{-k^2}. А это означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k^2(t)$ сходится.

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $u(x,t) \in L_2(Q), v^1(x) \in L_2(0,1), \varphi(x) \in L_2(0,1)$. Тогда для $\tilde{u}_k(t),\ \tilde{v}_k^1,$ определяемых выражениями (23), ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k^2(t),\ \sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{v}_k^1)^2$ доставляют минимум функционалу (5) при условии (4).

М.М. Ягубова, Р.Б. Заманова

ВИРІШЕННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ПРИ РОЗПОДІЛЕНОМУ І СТАРТОВОМУ КЕРУВАННЯХ

На сьогодні є велика кількість наукових статей і монографій, присвячених різним задачам теорії керування в системах, що описуються рівняннями у частинних похідних і досить добре викладені в [1–6] та в багатьох інших наукових статтях. Однак у всіх цих роботах розглядаються задачі, що пов’язані, в основному, з рівняннями класичних типів, що вивчаються в математичній фізиці. Останнім часом з’явилися роботи [7, 8], в яких вирішуються пов’язані з рівняннями у частинних похідних четвертого порядку різні задачі, отримані на практиці. Є численні прикладні задачі, що описані рівняннями третього порядку або так званими рівняннями змінного типу. Незважаючи на те що початково-крайові задачі для таких рівнянь вивчено досить повно [9], є декілька робіт [12–18], в яких вивчаються задачі керування у таких системах. У даній роботі розглянуто задачу мінімуму квадратичного функціонала для початково-крайової задачі для лінійного рівняння третього порядку. Спочатку, застосовуючи метод Фур’є, отримано уявлення щодо розв’язання початково-крайової задачі, а далі задачу оптимального керування зведено до задачі на умовний екстремум та отримано її рішення у вигляді ряду.

Ключові слова: початково-крайова задача, узагальнене рішення, метод Фур’є, завдання на власні значення.

M.M. Yaqubova, R.B. Zamanova

THE SOLUTION OF AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION IN THE PRESENCE OF DISTRIBUTED AND STARTING CONTROLS

There are a large number of scientific articles and monographs devoted to various problems of control theory in systems described by partial differential equations, which are fairly well represented in [1–6]. However, in all these works, problems are considered that are related mainly to equations of classical types studied in courses of mathematical physics. Recently, papers have appeared that solve various problems associated with fourth-order partial differential equations, obtained from the practice. Along with it, there are numerous applied problems described by third-order equations or the so-called equations of variable type. Despite the fact that the initial-boundary value problems for such equations are studied well, but there are only a few works [12–18] in which control problems in such systems are investigated. In this paper, the minimum problem of the quadratic functional for the initial-boundary value problem for a third-order linear equation is studied. First, using the Fourier method, a representation of the solution of the initial-boundary value problem is obtained, and then the optimal control problem is reduced to a conditional extremum problem and its solution is obtained in the form of a series.

Keywords: initial-boundary value problems, generalized solution, Fourier method, eigenvalue problem.

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М. : Наука, 1965. 474 с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М. : Мир, 1972. 414 с.
3. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М. : Наука, 1975. 478 с.
4. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М. : Наука, 1980. 255 с.
5. Литвинов В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями в механике. М. : Наука, 1987. 366 с.
6. Райтум У.Е. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Рига : Зинатне, 1989. 277 с.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. : Факториал Пресс, 2002. 818 с.
8. Егоров А.И. Основы теории управления. М. : Физматлит, 2004. 504 с.
9. Ларкин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск : Наука, 1983. 269 с.
10. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М. : Наука, 1979. 489 с.
11. Методы оптимизации. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.В. Альсевич, А.И. Калинин, В.В. Крахотко, Н.С. Павленок. Минск : Четыре четверти, 2011. 465 с.
12. Кулиев Г.Ф., Рамазанова А.Т. Об определении правых частей уравнений изгибно-крутильных колебаний стержня. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2016. № 4. С. 74–86.
13. Quliyev H.F., Seyfullayeva Kh.I. Optimal control problem for the equation of vibrations of an elastic plate. *Georgian. Math. J.* 2018. N 3. P. 1–9.
14. Ягубов М.А., Гусейнова Р.Б. Необходимые условия оптимальности в одной задаче, описываемой уравнением переменного типа. *Известия НАН Азербайджана*. Сер. физико-математических и технических наук. 2004. **XXIV**, № 3. С. 50–53.
15. Ягубов М.А., Заманова Р.Б. О свойствах скользящих режимов в процессах, описываемых нелинейным уравнением третьего порядка. *Вестник Бакинского университета*. Сер. физико-математических наук. 2011. № 3. С. 29–36.
16. Yaqubov M.A., Zamanova R.B. A formula for the gradient of a functional and a theorem on existence of optimal control in a gas dynamics problem. *An International Journal Applied and Computational Mathematics*. 2013. **12**, N 1. P. 97–102.
17. Ягубова М.М. О построении методом моментов оптимального управления для линейного уравнения третьего порядка с квадратичным критерием качества. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2016. № 4. С. 47–53.
18. Yaqubova M.M. On a solution of an optimal control problem for the linear third order partial differential equations. *Reports of National Academy of Sciences of Azerbaijan*. 2017. **LXXIII**, N 1. P. 11–15.

Получено 03.06.2019