МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

УДК 517.5

У.З. Грабова

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРИГАРМОНИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА НА КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Ключевые слова: классы Соболева, асимптотические равенства, суммируемая функция, моделирование периодических процессов в экономике.

Введение

Одним из базовых элементов теоретических основ и методов теории управления и принятия решений в социально-экономических системах является разработка проблемно-ориентированного математического обеспечения. Поскольку все чаще требуется, чтобы математические модели отражали качественные изменения в закономерностях развития управляемых процессов, подходящими математическими моделями подобных процессов могут быть динамические и дифференциальные игры [1–4]. При этом особое значение приобретает проблема моделирования экономической динамики, в частности усовершенствования методов моделирования периодических процессов в экономике, на основе которых периодическое решение можно получить представлением дифференциальных уравнений экономического состояния в форме краевой задачи, в частности асимптотического равенства [5, 6]. Такие модели позволяют повысить точность исследования экономических систем путем рассмотрения экономических процессов в дискретные моменты времени.

В данной статье предлагается построение математической модели при анализе экономической динамики и теории колебаний, рассматривающих полигармонические устойчивые модели в задачах планирования и прогнозирования экономических процессов.

1. Постановка задачи

Пусть L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций f с нормой $\| f \|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} | f(t) | \, dt$; C — пространство 2π-периодических непрерывных функций f, в котором норма определяется равенством $\| f \|_C = \max\limits_t | f(t) |$; L_∞ — пространство 2π-периодических существенно ограниченных функций f с нормой $\| f \|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t | f(t) |$.

Пусть $\Lambda = \left\| \lambda_{n,\,k} \right\|$ $(n,\, k = 0, 1, 2, \ldots;\ \lambda_n(0) = 1)$ — прямоугольная числовая матрица. С помощью множества Λ каждой функции $f \in L$ поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,\,k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Если ряд (1) при каждом n является рядом Фурье некоторой функции из L, то обозначим ее $U_n(f;\, x;\, \Lambda)$. В этом случае также говорят, что множество Λ определяет конкретный метод (Λ-метод) суммирования рядов Фурье [7, с. 36].

Если в (1) положить $\lambda_{n,\,k} = e^{-\frac{k^2}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, то оператор $U_n(f;\, x;\, \Lambda)$ называют интегралом Вейерштрасса и обозначают $W(n;\, f;\, x)$ [8]; при $\lambda_{n,\,k} = e^{-\frac{k}{n}}$ и $\lambda_{n,\,k} = \left(1 + \frac{k}{2}(1 - e^{-\frac{2}{n}})\right) e^{-\frac{k}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, получим соответственно интеграл Пуассона $P_1(n;\, f;\, x)$ [9, 10] и бигармонический интеграл Пуассона $P_2(n;\, f;\, x)$ [11, 12] функции f.

Обозначим

$$P_3(n;\, f;\, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,\,k} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \ \ n \in \mathbb{N},$$

где $\lambda_{n,\,k}$ определяется равенством

$$\lambda_{n,\,k} = \left(1 + \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{n}})(1 - e^{-\frac{2}{n}})k + \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{n}})^2 k^2\right) e^{-\frac{k}{n}}, \tag{2}$$

оператор, который называют тригармоническим интегралом Пуассона функции $f \in L$ [13, 14].

В данной работе рассматривается задача об отыскании асимптотических при $n \to \infty$ равенств для величины

$$\mathcal{E}(W_\infty^r;\, P_3(n))_C = \sup_{f \in W_\infty^r} \left\| f(\cdot) - P_3(n;\, f;\, \cdot) \right\|_{\tilde{N}}, \tag{3}$$

где W_∞^r — классы Соболева [7], т.е. классы 2π-периодических функций f, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и $\left\| f^{(r)}(\cdot) \right\|_\infty \le 1$, $r \in \mathbb{N}$.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(n)$, такая, что $\mathcal{E}(W_\infty^r;\, P_3(n))_C = \varphi(n) + o(\varphi(n))$ при $n \to \infty$, то согласно [7] будем говорить, что решена задача Колмогорова–Никольского для класса W_∞^r и тригармонического интеграла Пуассона в равномерной метрике.

Задача Колмогорова–Никольского для интегралов Вейерштрасса на классах дифференцируемых функций в равномерной и интегральной метриках изучалась в [15−17]. Аналогичная задача для интегралов Пуассона исследовалась в работах [18−22]; для бигармонических интегралов Пуассона — в [23−30] и др.

Отметим, что решение задачи Колмогорова–Никольского для величины $P_3(n)$ на классах Липшица $H^{\alpha}, 0<\alpha\le 1$, найдено в работах [31, 32]. В то же время остается открытым вопрос об аппроксимативных свойствах тригармонических интегралов Пуассона на классах Соболева.

2. Асимптотические представления решений

По аналогии с [20] для тригармонического интеграла Пуассона введем суммируемую функцию $\mu(u)$ следующим образом:

$$\mu(u)=\begin{cases}(1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u})n^r, & 0\le u\le \dfrac{1}{n},\\ (1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u})u^{-r}, & u\ge \dfrac{1}{n},\end{cases} \tag{4}$$

где $\gamma=\frac{1}{4}(3-e^{-\frac{2}{n}})(1-e^{-\frac{2}{n}})n,\ \theta=\frac{1}{8}(1-e^{-\frac{2}{n}})^2n^2,\ n\in\mathbb{N}$.

Если для функции $\mu(u)$ преобразование Фурье $\hat\mu(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \mu(u)\cos\left(ut+\frac{r\pi}{2}\right)du$ суммируемо на всей действительной оси, т.е. интеграл $A(\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat\mu(t)|dt$ сходится, то аналогично работе [7, с. 183] можно показать, что для любой функции $f\in W_\infty^r$ при всех $x\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(x)-P_3(n;f;x)=\frac{1}{n^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^r\left(x+\frac{t}{n}\right)\hat\mu(t)dt,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Используя представление (5), исследуем асимптотическое поведение величин (3).

Теорема 1. При $n\to\infty$ имеют место следующие асимптотические равенства:

а) при $r=2l+1,\ l\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}(W_\infty^r;P_3(n))_C=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+1}}\left(\left(1+\gamma\frac{k}{n}+\theta\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{k}{n}}-1\right)+$$
$$+O\left(\frac{1}{m^r}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\left|\left(1+\gamma\frac{m-k}{n}+\theta\left(\frac{m-k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{m-k}{n}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(1+\gamma\frac{m+k}{n}+\theta\left(\frac{m+k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{m+k}{n}}\right|\right)+O\left(e^{-\frac{1}{n}}\right); \tag{6}$$

$$\mathcal{E}(W_\infty^r;P_3(n))_C=\frac{4}{\pi^2m^r}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\left|\left(1+\gamma\frac{m-k}{n}+\theta\left(\frac{m-k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{m-k}{n}}-\right.$$
$$\left.-\left(1+\gamma\frac{m+k}{n}+\theta\left(\frac{m+k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{m+k}{n}}\right|+O\left(\left|\sin\frac{r\pi}{2}\right|\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+1}}\left(\left(1+\gamma\frac{k}{n}+\theta\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{k}{n}}-1\right)\right)+O\left(e^{-\frac{1}{n}}\right); \tag{7}$$

 ISSN 0572-2691

б) при $r = 2l,\ l \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}(W_\infty^r;\, P_3(n))_C = \frac{4}{\pi^2 m^r}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\times$$

$$\times\left|\left(1+\gamma\frac{m-k}{n}+\theta\left(\frac{m-k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{m-k}{n}}-\left(1+\gamma\frac{m+k}{n}+\theta\left(\frac{m+k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{m+k}{n}}\right|+O\left(e^{-\frac{1}{n}}\right). \quad (8)$$

Доказательство. Для исследования асимптотического поведения величины (3) необходима следующая теорема из [33].

Теорема 2. Пусть абсолютно непрерывные функции $\mu(u)$ и $\lambda(u)$ таковы, что

$$\mu\left(\frac{k}{n}\right)=(1-\lambda_{n,\,k})\left(\frac{k}{n}\right)^{-r},\quad \lambda\left(\frac{k}{n}\right)=\lambda_{n,\,k},\quad \mu(0)\sin\frac{r\pi}{2}=0,\quad \mu(u)=o\left(\frac{1}{\ln u}\right)\ (u\to\infty),$$

и сходятся интегралы

$$\int_0^{\frac{a}{2}} u\,|\,d\mu'(u)\,|,\quad \int_{\frac{a}{2}}^{\infty}|\,u-a\,||\,d\mu'(u)\,|,\quad \int_0^{\infty}\left|\sin\frac{r\pi}{2}\right|\frac{|\,\mu(u)\,|}{u}du,\quad \int_0^{a}\frac{|\,\lambda(a-u)-\lambda(a+u)\,|}{u}du.$$

Тогда при $n\to\infty$ справедливы формулы

$$\mathcal{E}(W_\infty^r;U_n)_C=\frac{2}{\pi n^r}\left|\sin\frac{r\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{|\,\mu(u)\,|}{u}du+O\left(\frac{1}{n^r}\left|\sin\frac{r\pi}{2}\right|\int_0^{\frac{2}{\pi n}}\frac{|\,\mu(u)\,|}{u}du\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^r a^r}\int_0^{a}\frac{|\,\lambda(a-u)-\lambda(a+u)\,|}{u}du\right)+O\left(\frac{1}{n^r}H(\mu)\right), \quad (9)$$

$$\mathcal{E}(W_\infty^r;U_n)_C=\frac{4}{\pi^2 n^r a^r}\int_0^{a}\frac{|\,\lambda(a-u)-\lambda(a+u)\,|}{u}du+$$

$$+O\left(\frac{1}{n^r a^r}\int_0^{\frac{2}{\pi n}}\frac{|\,\lambda(a-u)-\lambda(a+u)\,|}{u}du\right)+O\left(\frac{1}{n^r}\left|\sin\frac{r\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{|\,\mu(u)\,|}{u}du\right)+O\left(\frac{1}{n^r}H(\mu)\right), \quad (10)$$

где $H(\mu)=|\,\mu(0)\,|+|\,\mu(a)\,|+\int_0^{\frac{a}{2}}u\,|\,d\mu'(u)\,|+\int_{\frac{a}{2}}^{\infty}|\,a-u\,||\,d\mu'(u)\,|$.

Рассмотрим случай, когда $\mu(u)$ при $u=\frac{k}{n}$, $k=1,2,\ldots$, определяется равенством (4) и линейна на отрезках $\left[\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right]$, $k=0,1,2,\ldots$.

Пусть $a=\frac{m}{n}$ ($m\in\mathbb{Z}$), $\nu=\left[\frac{m}{2}\right]$, $\mu_{n,\,k}=(1-\lambda_{n,\,k})k^{-r}$. Тогда

$$\int_0^{\frac{a}{2}} u\,|\,d\mu'(u)\,| = n^r \sum_{k=1}^{\nu} k\,|\,\Delta^2\mu_{n,k-1}\,|, \qquad \int_{\frac{a}{2}}^{\infty} |\,u-a\,||\,d\mu'(u)\,| = n^r \sum_{k=\nu+1}^{\infty} |\,m-k\,||\,\Delta^2\mu_{n,k-1}\,|\,, \tag{11}$$

где $\Delta^2\mu_{n,\,k-1} = \mu_{n,\,k-1} - 2\mu_{n,\,k} + \mu_{n,\,k+1}$.

Так как при $\dfrac{k}{n} < u < \dfrac{k+1}{n}$

$$\mu(u) = \mu_{n,\,k} + \left(u - \frac{k}{n}\right)\mu'(u) = \mu_{n,k} + O(u\,|\,\mu'(u)\,|),$$

то

$$\int_0^{\infty} \frac{|\,\mu(u)\,|}{u} du = n^r \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{|\,\mu_{n,k}\,|}{u} du + O\left(n^r \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(u - \frac{k}{n}\right) |\,\mu'(u)\,| \frac{du}{u} \right) =$$

$$= n^r \sum_{k=0}^{\infty} |\,\mu_{n,k}\,| \left(\ln\frac{k+1}{n} - \ln\frac{k}{n} \right) + O\left(n^r \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |\,\mu'(u)\,|\,du \right) =$$

$$= n^r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\,\mu_{n,k}\,|}{k} + O\left(n^r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\,\mu_{n,k}\,|}{k^2} \right) + O\left(n^r \int_0^{\infty} |\,\mu'(u)\,|\,du \right).$$

Далее, применяя лемму 2 из [33], из последнего равенства получим

$$\int_0^{\infty} \frac{|\,\mu(u)\,|}{u} du = n^r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\,\mu_{n,k}\,|}{k} +$$

$$+ O\left(n^r \left(|\,\Delta^2\mu_{n,k-1}\,| + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} |\,m-k\,||\,\Delta^2\mu_{n,k-1}\,| + |\,\mu_{n,m}\,| \right) \right). \tag{12}$$

Поскольку

$$\lambda(a \pm u) = 1 - (a \pm u)^r \mu(a \pm u) = 1 - (a \pm u)^r \left[\frac{1 - \lambda_{n,m\pm k}}{\left(a \pm \frac{k}{n}\right)^r} \pm \mu'(a \pm u)\left(u - \frac{k}{n}\right) \right] =$$

$$= 1 + \lambda_{n,m\pm k} + O\left(u \left(\frac{|1 - \lambda_{n,m\pm k}\,|}{a} + a^r\,|\,\mu'(a \pm u)\,| \right) \right)$$

и $|\,1 - \lambda_{n,m\pm k}\,| \le a^r \max\limits_{0<u<a} |\,\mu(u)\,|$, то

$$\frac{1}{a^r} \int_0^a \frac{|\,\lambda(a-u) - \lambda(a+u)\,|}{u} du = \left(\frac{n}{m}\right)^r \sum_{k=1}^{m-1} \frac{|\,\lambda_{n,m-k} - \lambda_{n,m+k}\,|}{k} + O(n^r H_{n,m}(\mu)), \tag{13}$$

где

ISSN 0572-2691

$$H_{n,m}(\mu)=|\mu_{n,0}|+|\mu_{n,m}|+\sum_{k=1}^{\nu} k\,|\Delta^2\mu_{n,k-1}|+\sum_{k=\nu+1}^{\infty}|m-k|\,|\Delta^2\lambda_{n,k-1}|. \qquad (14)$$

В силу формул (9), (10) с учетом (11)−(14) получим равенства

$$\mathcal{E}(W_\infty^r;U_n)_C=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{r\pi}{2}\right|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu_{n,k}|}{k}+O\left(\frac{1}{m^r}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{|\lambda_{n,m-k}-\lambda_{n,m+k}|}{k}\right)+O(H_{n,m}(\mu)), \quad (15)$$

$$\mathcal{E}(W_\infty^r;U_n)_C=\frac{4}{\pi^2 m^r}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{|\lambda_{n,m-k}-\lambda_{n,m+k}|}{k}+O\left(\left|\sin\frac{r\pi}{2}\right|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu_{n,k}|}{k}\right)+O(H_{n,m}(\mu)). \quad (16)$$

Рассмотрим метод суммирования $P_3(n)$, что представляется функцией вида (4). Тогда

$$\mu_{n,k}=\left(1-\left(1+\gamma\frac{k}{n}+\theta\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{k}{n}}\right)k^{-r}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu_{n,k}|}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+1}}\left|1-\left(1+\gamma\frac{k}{n}+\theta\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{k}{n}}\right|=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{r+1}}\left(\left(1+\gamma\frac{k}{n}+\theta\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{k}{n}}-1\right). \qquad (17)$$

Далее, учитывая равенство (2), получим

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{|\lambda_{n,m-k}-\lambda_{n,m+k}|}{k}=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\left|\left(1+\gamma\frac{m-k}{n}+\theta\left(\frac{m-k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{m-k}{n}}-\right.$$

$$\left.-\left(1+\gamma\frac{m+k}{n}+\theta\left(\frac{m+k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{m+k}{n}}\right|=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\times$$

$$\times\left|\left(1+\gamma\frac{m-k}{n}+\theta\left(\frac{m-k}{n}\right)^2\right)e^{\frac{k}{n}}-\left(1+\gamma\frac{m+k}{n}+\theta\left(\frac{m+k}{n}\right)^2\right)e^{-\frac{k}{n}}\right|e^{-\frac{m}{n}}. \qquad (18)$$

Поскольку последовательность $\{\mu_{n,k}\}$ выпукла,

$$H_{n,m}(\mu)=O\left(\max_k|\mu_{n,k}|\right)=O\left(\left|1-\left(1+\frac{\gamma}{n}+\frac{\theta}{n^2}\right)e^{-\frac{1}{n}}\right|\right)=$$

$$=O\left(\left(1+\frac{\gamma}{n}+\frac{\theta}{n^2}\right)e^{-\frac{1}{n}}-1\right)=O\left(e^{-\frac{1}{n}}\right). \qquad (19)$$

Учитывая (17)–(19), из равенств (15), (16) имеем (6)−(8).

Теорема доказана.

Заключение

В данной работе проанализирован процесс построения асимптотических при $n \to \infty$ равенств для точных верхних граней приближений линейными методами, что определяются суммирующей функцией, зависящей от некоторого натурального параметра n на классах гладких функций. Получено решение задачи Колмогорова–Никольского для тригармонических интегралов Пуассона на классах Соболева в равномерной метрике.

Показана возможность применения такого класса задач для моделирования периодических процессов в экономике, что важно для развития систем управления экономическими объектами.

У.З. Грабова

РІВНОМІРНІ НАБЛИЖЕННЯ ТРИГАРМОНІЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА НА КЛАСАХ СОБОЛЄВА

Дано оцінку величини точної верхньої грані відхилень лінійних методів підсумування, що визначаються прямокутною числовою матрицею $\Lambda = \|\lambda_{n,k}\|$ на класах неперервних періодичних функцій в рівномірній метриці. Як можливе застосування отриманих результатів вивчається їх асимптотична поведінка для тригармонічних інтегралів Пуассона, коли об'єктом наближення є класи W_{∞}^{r}, $r \in \mathbb{N}$. Асимптотичні рівності розкривають теоретичні основи і математичні особливості однієї з основних задач теорії наближення — задачі Колмогорова–Нікольського. Зокрема, дана задача розв'язана для тригармонічних інтегралів Пуассона на класах Соболєва в рівномірній метриці. Виявляється, що тригармонічні інтеграли Пуассона володіють апроксимативними властивостями, які відрізняються від раніше вивчених властивостей гармонічних і бігармонічних інтегралів Пуассона, а деякі поняття і технічні прийоми теорії наближення можуть бути корисними і при вивченні просторів функцій з узагальненими похідними. Важливим моментом розв'язку даної задачі є той факт, що за допомогою досліджуваних асимптотичних рівностей можна вирішити широкий спектр економічних задач, розв'язок яких методами класичної лінійної алгебри і математичного аналізу є досить складним процесом. Економічне моделювання і прогнозування на основі побудованої математичної моделі може застосовуватися при аналізі процесів економічної динаміки, що розглядають полігармонічні режими. Мета роботи — розвивати математичний апарат, що дозволяє будувати математичні моделі періодичних економічних процесів. Моделювання служить засобом аналізу економіки і явищ, що в ній відбуваються, а також обґрунтування рішень, прогнозування і керування економічними процесами і об'єктами. Також проаналізовано деякі фундаментальні проблеми сучасної економіки, що розв'язуються методами теорії наближення.

Ключові слова: класи Соболєва, асимптотичні рівності, сумовна функція, моделювання періодичних процесів в економіці.

U.Z. Hrabova

UNIFORM APPROXIMATIONS BY THE THREEHARMONIC POISSON INTEGRALS ON THE SOBOLEV CLASSES

The quantity of the precise upper bound of the deviations of the linear methods of summation, determined by rectangular number matrix $\Lambda = \|\lambda_{n,k}\|$ on the classes of continuous periodic functions in the uniform metric is given. As possible application of the obtained results, we study the asymptotic behavior of threeharmonic Poisson integrals in the case when the classes W_{∞}^{r}, $r \in \mathbb{N}$, are an object of approximation. The asymptotic equalities reveal the theoretical foundations and mathematical features of one of the main problems of approximation theory — the Kolmogorov–Nikol'skii problem. In particular, the problem is solved for the threeharmonic Poisson integrals on the Sobolev classes in the uniform metric. We found that the threeharmonic Poisson integrals possess approximation properties that are different from the properties of the harmonic and biharmonic Poisson integrals, which were studied previously, and some concepts and techniques of approximation theory can also be useful in studying the spaces of functions with generalized derivatives. An important moment in the solution of this problem is the fact that with the help of the asymptotic equalities, which are studied, a wide range of economic problems can be solved, the solution of which by methods of classical linear algebra and mathematical analysis is a complicated process. Economic modeling and forecasting on the basis of the constructed mathematical model can be used in the analysis of processes of economic dynamics, considering polyharmonic regimes. The purpose of the work is to develop a mathematical apparatus that allows to build mathematical models of of periodic economic processes. Modeling serves as a means of analyzing the economy and the phenomena occurring in it, as well as justifying the decisions made, forecasting and managing economic processes and objects. We also analyze some fundamental problem of the modern economy, solved by methods of the approximation theory.

Keywords: Sobolev classes, asymptotic equalities, summable function, simulation of periodic processes in the economic.

1. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. On a differential game in a system with distributed parameters. *Proc. Steklov Inst. Math*. 2016. **292**. P. 276–285. DOI: 10.1134/S0081543816020243.
2. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2015. **291**. P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
3. Chikrii A.A. Ananalytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math*. 2010. **271**, N 1. P. 69–85. DOI: 10.1134/s0081543810040073.
4. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria. Springer Optimization and Its Applications.* 2008. **17**. P. 349–386. DOI: 10.1007/978-0-387-77247-9_13.
5. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 1. P. 51–63. DOI: 10.1023/A:1019789402502.
6. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 2018. **22**, N 1. P. 23–36. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.03.
7. Степанец А.И. Методы теории приближения: в 2-х ч. Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
8. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math.* J. 2007. **59**, N 7. P. 1059–1087. DOI: 10.1007/s11253-007-0069-1.
9. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 11. P. 1757–1779. DOI: 10.1007/s11253-010-0311-0.
10. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the class $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson integrals in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 12. P. 1893–1914. DOI: 10.1007/s11253-010-0321-y.
11. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepanyuk T. A. On the approximation of the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2018. **70**, N 5. C. 719–729. DOI: 10.1007/s11253-018-1528-6.
12. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W_{\beta}^{r} Í^{\alpha}$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **68**, N 11. P. 1727–1740. DOI: 10.1007/s11253-017-1323-9.
13. Hembars'ka S.B. On bound aryvalues of three-harmonic Poisson integral on the boundary of a unitdisk. *Ukrainian Math*. J. 2018. **70**, N 7. P. 1012–1021.DOI:10.1007/s11253-018-1548-2.

14. Zhyhallo K. M., KharkevychYu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by triharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2001. **53**, N 6. P. 1012–1018. DOI: 10.1023/A:1013364321249.
15. Kal'chuk I.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 9. P. 1342–1363. DOI: 10.1007/s11253-007-0091-3.
16. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximation of functions from the classes $W_\beta^r H^\alpha$ by Weierstrass integrals. *Ukrainian Math. J*. 2017. **69**, N 4. P. 598–608. DOI: 10.1007/s11253-017-1383-x.
17. Grabova U.Z., Kal'chuk I.V., Stepaniuk T.A. Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W_\beta^r H^\alpha$. *J. Math. Sci.* (N. Y.). 2018. **231,** N 1. P. 41–47. DOI: 10.1007/s10958-018-3804-2.
18. Kharkevich Yu.I., Stepanyuk T.A. Approximation properties of Poisson integrals for the classes $C_\beta^\psi H^\alpha$. *Math. Notes*. 2014. **96**, N 5–6. P. 1008–1019. DOI: 10.1134/s0001434614110406.
19. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ-methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Math. J*. 2004. **56**, N 9. P. 1509–1525. DOI: 10.1007/s11253-005-0130-x.
20. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukrainian Math. J.* 2005. **57**, N 8. P. 1297–1315. DOI: 10.1007/s11253-005-0262-z.
21. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 1. P. 86–98. DOI: 10.1007/s11253-009-0196-y.
22. Kharkevych Yu.I., Pozharska K.V. Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math*. 2018. **22**, N 2. P. 235–243. DOI: 10.12697/ACUTM.2018.22.19.
23. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. On the approximation of functions of the Hölder class by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2000. **52**, N 7. P. 1113–1117. DOI: 10.1023/A:1005285818550.
24. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2002. **54**, N 9. P. 1462–1470. DOI: 10.1023/A:1023463801914.
25. Kharkevych Yu.I., Kal'chuk I.V. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2007. **59**, N 8. P. 1224–1237. DOI: 10.1007/s11253-007-0082-4.
26. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of function from class $\hat{N}_{\beta,\infty}^\psi$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Math. J.* 2008. **60**, N 5. P. 769–798. DOI: 10.1007/s11253-008-0093-9.
27. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2009. **61**, N 3. P. 399–413. DOI: 10.1007/s11253-009-0217-x.
28. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $\tilde{N}_{\beta,\infty}^\psi$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2011. **63**, N 7. P. 1083–1107. DOI: 10.1007/s11253-011-0565-1.
29. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Math. J.* 2012. **63**, N 12. P. 1820–1844. DOI: 10.1007/s11253-012-0616-2.
30. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\hat{L}_{\beta,1}^\psi$. *Ukrainian Math. J.* 2017. **69**, N 5. P. 757–765. DOI: 10.1007/s11253-017-1393-8.
31. Hrabova U.Z. Uniform approximations of functions of Lipschitz class by threeharmonic Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2017. **49**, N 12. C. 57–70. DOI:10.1615/JAutomatInfScien.v49.i12.60.
32. Hrabova U.Z. Approximative properties of the threeharmonic Poisson integrals on the Hölder classes. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 8. C. 77–86. DOI: 10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.70.
33. Баусов Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. II. *Изв. вузов*. 1966. **55**, N 6. C. 3–17.

Получено 06.08.2019