

УДК 533.6.013.42

Ю.И. Калюх, Я.А. Берчун

## ЧЕТЫРЕХМОДОВАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

**Ключевые слова:** четырехмодовая модель, распределенные системы, петля, численное моделирование.

### Введение

Распределенные системы (РС) нашли широкое применение на практике: распределенные системы (космические связи) на околоземном пространстве протяженностью в десятки километров [1, 2]. РС аппроксимируют железобетонные сваи в грунте при прочностных расчетах и оценке технического состояния [3]; трубопроводы как в воздухе, так и в жидкости [4]; подводные буксируемые системы большой протяженности [5, 6]; распределенные системы эрлифтинга для добычи минералов со дна океана протяженностью в 5–10 км [7] и др. Для совершенствования описания их напряженно-деформированного состояния (НДС) используются различные модели РС. В космических связках — это модель абсолютно гибкой нити, в буксируемых системах — модель каната (от модели абсолютно гибкой нити до модели стержня с учетом продольной, поперечных и крутильных жесткостей). В модели железобетонной сваи — от модели стержня Эйлера до модели балки Тимошенко и др. [3, 8]. В то же время для решения задач управления РС в различных средах (космосе [1, 2], воздушной и водной средах [6, 7]) существующие математические модели РС не вполне корректны с точки зрения учета многообразия переходных волновых процессов, ответной реакции на управляющие воздействия и др. Это, в свою очередь, приводит к погрешностям в амплитуде и направлении управляющих воздействий, необходимости дополнительной корректировки курса РС, погрешностям при движении на траектории элементов РС (измерительных блоков, распределенных по длине системы и др.) [9–11]. В целом это определяет необходимость построения уточненных волновых моделей РС, находящихся в поле массовых и поверхностных сил, что и было предпринято ниже.

### Четырехволновая модель динамики РС

Рассмотрим РС с постоянными характеристиками поперечного сечения. Радиус-вектор начального положения элемента обозначим  $\bar{R}_0(S, 0)$ , а деформированного —  $\bar{R}(S, t)$ . Введем деформацию элемента РС:

$$\varepsilon = \frac{(d\bar{S}^2 - dS_0^2)}{dS_0^2} = \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial S} \right|^2 - 1. \quad (1)$$

Тогда переменные  $S_0$  и  $S$ , характеризующие недеформированную и растянутую длину РС, будут связаны между собой соотношением

$$dS = \sqrt{1+\varepsilon} \cdot dS_0. \quad (2)$$

Введем естественную систему координат с единичными взаимно ортогональными векторами  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  (рис. 1).

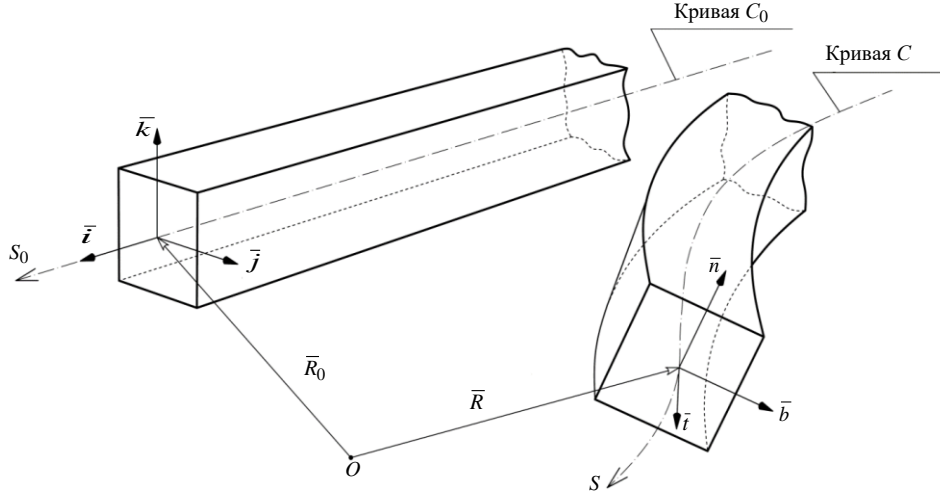


Рис. 1

Вектор  $\vec{t}$  — единичный вектор касательной, определяется из соотношения

$$\vec{t}(S, t) = \frac{\partial \vec{R}(S, t)}{\partial S}. \quad (3)$$

Два других — нормали  $\vec{n}$  и бинормали  $\vec{b}$  — ортогональны по  $\vec{t}$ . Рассмотрим производную радиус-вектора  $\vec{R}$  кривой  $C_0$  в деформированном состоянии:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial S} = \vec{t}(1+\varepsilon). \quad (4)$$

С другой стороны, для производной от радиус-вектора  $\vec{R}(S, t)$   $\partial \vec{R} / \partial t$  имеем следующее выражение:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = U_t \vec{t} + U_n \vec{n} + U_b \vec{b}. \quad (5)$$

Здесь  $U_t, U_n$  и  $U_b$  — проекции относительной скорости  $\vec{U}$  РС на текущие единичные векторы  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$ .

Исходя из условий непрерывности и существования производных от радиус-вектора  $\vec{R}(S, t)$  необходимого порядка и равенства смешанных производных, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial U_t}{\partial S} - k_1 U_n - k_2 U_b; \quad -(1+\varepsilon)\Omega_1 = \frac{\partial U_b}{\partial S} - k_2 U_t + k_3 U_n; \\ (1+\varepsilon)\Omega_2 = \frac{\partial U_n}{\partial S} + k_1 U_t + k_3 U_b. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим полные производные по времени от кривизны  $k_3$  :

$$\frac{\partial k_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{n}}{\partial S} \bar{b} \right) = \frac{\partial b}{\partial t} \frac{\partial \bar{n}}{\partial S} + \bar{b} \left( \frac{\partial^2 \bar{n}}{\partial S \partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \bar{n}}{\partial S} \frac{1}{1+\varepsilon} \right) \quad (7)$$

или

$$\frac{\partial k_3}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial S} - k_1 \Omega_1 - k_2 \Omega_2 - \frac{k_3}{1+\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (8)$$

По аналогии для  $k_1$  и  $k_2$

$$\frac{\partial k_1}{\partial t} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial S} + k_2 \Omega_3 + k_3 \Omega_1 - \frac{k_1}{1+\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \frac{\partial k_2}{\partial t} = -\frac{\partial \Omega_1}{\partial S} + k_3 \Omega_2 + k_1 \Omega_3 - \frac{k_2}{1+\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (9)$$

Соотношения (10) и (11) представляют собой кинематические условия, которые, как следует из этих соотношений, можно рассматривать как функции четырех зависимых переменных:  $U_t, U_n, U_b$  и  $\Omega_3$  ( $\Omega_i$  — углы поворота РС).

Запишем общие теоремы о сохранении количества движения и сохранения момента количества движения для элемента РС в векторной форме [12]:

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial S} + \bar{F}^{(E)} + \bar{F}^{(I)} + \bar{F}^{(M)} = 0; \quad \frac{\partial \bar{M}}{\partial S} + \bar{t} \times \bar{N} + \bar{M}^{(E)} + \bar{M}^{(I)} + \bar{M}^{(M)} = 0. \quad (10)$$

где  $\bar{F}^{(E)}$  и  $\bar{M}^{(E)}$  — векторы внешних распределенных сил и моментов,  $\bar{F}^{(M)}$  и  $\bar{M}^{(M)}$  — векторы массовых сил и моментов,  $\bar{F}^{(I)}$  и  $\bar{M}^{(I)}$  — векторы силы инерции и момента инерции,  $\bar{N}$  — перерезывающая сила.

Для изгибающих моментов  $M_1, M_2$ , а также  $M_3$  примем соотношения [12]

$$M_1 = -EI_{22}k_2; \quad M_2 = EI_{11}k_1; \quad M_3 = GJk; \quad k = k_3 - \eta_3. \quad (11)$$

Здесь величина  $\eta_3$  — угол закручивания единицы длины РС;  $I_{22}, I_{11}, J$  — моменты инерции;  $E$  — модуль Юнга;  $G$  — модуль сдвига.

Полученная в работе [12] система уравнений описывает пространственную модель динамики криволинейного стержня. Однако она является гиперболически-параболической вследствие неучета инерции поворота поперечного сечения стержня, т.е. описывает только три волновые моды из четырех: продольные, крутильные, изгибные (две).

Для вывода обобщенной четырехмодовой уточненной модели введем углы  $\alpha$  и  $\beta$ , которые будут характеризовать поворот поперечных сечений стержня, т.е. деформацию сдвига в осредненном смысле. Поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после, но, возможно, повернутыми, т.е. не обязательно перпендикулярными к серединной оси стержня. Таким образом, для перерезывающих сил  $N_1$  и  $N_2$  можно записать следующие выражения:

$$N_1 = \alpha z_1 G F_s; \quad N_2 = \beta z_2 G F_s, \quad (12)$$

где  $z_1, z_2$  — коэффициенты, учитывающие влияние сдвига (Shear),  $F_s$  — площадь поперечного сечения РС.

Используя выражение (12), путем несложных тождественных преобразований получим систему квазилинейных уравнений, описывающих шесть мод колебаний РС в пространстве четырех типов: продольную, крутильную, конфигурационную (поперечную) (две) и изгибную (две):

$$\text{а) } \begin{cases} a_{11} \frac{\partial k_1}{\partial S} + a_{12} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + a_{13} \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} = P_1; \\ a_{21} \frac{\partial k_2}{\partial S} + a_{22} \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + a_{23} \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} = P_2; \\ a_{31} \frac{\partial k_3}{\partial S} + a_{32} \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} = P_3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} a_{41} \frac{\partial k_1}{\partial t} + a_{42} \frac{\partial \Omega_2}{\partial S} = P_4; \\ a_{51} \frac{\partial k_2}{\partial t} + a_{52} \frac{\partial \Omega_1}{\partial S} = P_5; \\ a_{61} \frac{\partial k_3}{\partial t} + a_{62} \frac{\partial \Omega_3}{\partial S} = P_6; \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{в) } \begin{cases} a_{71} \frac{\partial \alpha}{\partial S} + a_{72} \frac{\partial U_n}{\partial t} + a_{73} \frac{\partial N_3}{\partial t} = P_7; \\ a_{81} \frac{\partial \beta}{\partial S} + a_{82} \frac{\partial U_b}{\partial t} + a_{83} \frac{\partial N_3}{\partial t} = P_8; \\ a_{91} \frac{\partial N_3}{\partial S} + a_{92} \frac{\partial U_t}{\partial t} + a_{93} \frac{\partial N_3}{\partial t} = P_9; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} a_{101} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + a_{102} \frac{\partial U_n}{\partial S} = P_{10}; \\ a_{111} \frac{\partial \beta}{\partial t} + a_{112} \frac{\partial U_b}{\partial S} = P_{11}; \\ a_{121} \frac{\partial N_3}{\partial t} + a_{122} \frac{\partial U_t}{\partial S} = P_{12}. \end{cases} \quad (14)$$

Первые три уравнения (а) описывают закон сохранения момента движения элементом РС, вторая группа уравнений (б) — динамическую связь между нестационарными производными от кривизн  $k_i$  и конвективными производными от угловых скоростей  $\Omega_i$ . Совместно системы уравнений (а) и (б) (13) описывают три моды колебаний: изгибные в двух взаимно ортогональных плоскостях  $(\bar{n}, \bar{t})$ ,  $(\bar{b}, \bar{t})$  и крутильную. Третья группа уравнений (в) (14) выражает динамический закон сохранения количества движения элементом РС, а четвертая (г) (14) — получена с использованием гипотезы (12). Вместе уравнения (в) и (г) (14) описывают три моды колебаний: конфигурационные (поперечные) в двух взаимно ортогональных плоскостях  $(\bar{n}, \bar{t})$  и  $(\bar{b}, \bar{t})$ , а также продольную. Систему уравнений (13), (14) запишем в виде одного матричного уравнения типа переноса в стандартной форме [6]:

$$E \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial S} = D. \quad (15)$$

Здесь  $E$  — единичная матрица размерности  $12 \times 12$ ,  $B$  — матрица конвективных членов  $12 \times 12$ . Вектор-столбец правых частей  $D$  определяется распределенными массовыми и поверхностными силами, а также моментами этих сил.  $D$  зависит от времени  $t$ , лагранжевой координаты  $S$ , вектора-столбца неизвестных  $W$ , компонент распределенных массовых и поверхностных сил (10).

Рассмотрим краевые и начальные условия для модели (15). В верхней части РС (при  $S = L$ ) могут быть заданы проекции скорости  $\bar{U}$ :

$$\begin{aligned} U_t(L, t) &= U_t^*(t), \\ U_n(L, t) &= U_n^*(t), \\ U_b(L, t) &= U_b^*(t). \end{aligned} \quad (16)$$

На нижнем конце РС (при  $S = 0$ ) могут быть заданы условия динамического равновесия сил  $\bar{F}_i$  и моментов  $\bar{M}_j$  на транспортируемом грузе (приборе) или конце РС:

$$\sum_{i=1}^3 \bar{F}_i = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \bar{M}_j = 0. \quad (17)$$

В качестве начальных условий используется решение задачи статики на основе модели (15) при  $\frac{\partial}{\partial t}(\dots) = 0$ . Модель (15) с начальными и краевыми условиями (16), (17) представляет собой замкнутую систему квазилинейных уравнений в частных производных.

### Корректность модели (13), (14)

**Теорема [13].** Задача Коши для системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных (13), (14) с начальными условиями

$$W(t, 0) = W_0(t) \quad (18)$$

будет поставлена корректно при выполнении следующих трех условий [13]:

- решение должно существовать (I);
- решение должно определяться однозначно (II);
- решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (требование устойчивости) (III).

Доказательство положения теоремы о существовании решения (I) связано с существованием зависимых и независимых переменных модели (13), (14), а также производных от них первого и второго порядка по искомым переменным. Эту часть доказательства ввиду громоздкости выражений приводить не будем. Оно полностью описано в докторской диссертации Ю.И. Калюха. Доказательство второго положения теоремы (II) связано с доказательством гиперболичности системы (13), (14). Приравняв к нулю определитель матрицы  $B$ , получим уравнение двенадцатой степени для определения собственных значений  $\lambda$  матрицы  $B$ . Собственные значения матрицы  $B$  — характеристические скорости колебаний, определяющие скорости изгибных, продольных, крутильных и конфигурационных волн. Если некоторые из собственных значений матрицы  $B$  становятся равными нулю или принимают комплексные значения, тип модели (15) может измениться на гиперболически-параболический или гиперболически-эллиптический [14].

Для трехволновой модели, описывающей пространственное продольно-поперечное взаимодействие волн в РС, можно получить следующие собственные значения матрицы  $B$  (корни уравнения шестой степени — скорости распространения продольных и конфигурационных (поперечных) волн):

$$V_{1,2} = \frac{U_t}{1+eT} \pm \sqrt{\left(\frac{U_t}{1+eT}\right)^2 + \frac{4}{me}}, \quad V_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{T - MU_t^2}{M + m}}; \quad V_{5,6} = V_{3,4}, \quad (19)$$

где  $V_{1,2}$  — скорость распространения продольных волн,  $V_{3,4(5,6)}$  — скорость распространения конфигурационных (поперечных) волн в стержне в направлении нормали  $\vec{n}$  и бинормали  $\vec{b}$ ,  $T$  — продольная сила,  $e$  — эффективная жесткость РС,  $m$  и  $M$  — погонная и присоединенная масса единицы длины РС до деформирования.

Скорость распространения продольных волн зависит от величины эффективной жесткости стержня  $e$ . Скорость распространения конфигурационных волн зависит от продольной силы  $T$  и может принимать мнимые значения при отрицательном значении выражения под знаком корня в (19) для  $V_{3,4(5,6)}$ . Это может быть одним из факторов нарушения устойчивости РС при движении на траектории [2, 6, 14], который детально рассмотрен в статье для пространственной модели РС, учитывающей продольные, крутильные и конфигурационные волны.

### Трехволновая редукция модели (13), (14)

Трехволновую модель РС в пространственно-неоднородном поле массовых и поверхностных сил, учитывающую крутильные, продольные и конфигурационные (две) волны на основе модели (13), (14), можно получить:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T}{\partial S} - m \frac{\partial U_t}{\partial t} + m U_n \frac{\partial \phi}{\partial t} - m U_b \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{m U_t}{1 + \delta} \frac{1}{EF} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{m U_t}{1 + \delta} n \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial S} = \\
 & = \omega \sin \phi + \frac{\pi k_f \rho d}{2} \sqrt{1 + \delta} |U_t| U_t; \\
 & (T - M U_t^2) \frac{\partial \phi}{\partial S} - (m + M) \frac{\partial U_n}{\partial t} - U_t (m + M) \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_b (m + M) \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\
 & + \frac{(m + M) U_n}{1 + \delta} \frac{1}{EF} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{(m + M) U_n}{1 + \delta} n \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial S} = \omega \cos \phi + \frac{k_n \rho d}{2} \sqrt{1 + \delta} \sqrt{U_n^2 + U_b^2} U_n; \\
 & (T - M U_t^2) \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial S} + (m + M) \frac{\partial U_b}{\partial t} + (m + M) (U_n \sin \phi - U_t \cos \phi) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \\
 & - \frac{(m + M) U_b}{1 + \delta} \frac{1}{EF} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{(m + M) U_b}{1 + \delta} n \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial S} = \frac{k_n \rho d}{2} \sqrt{1 + \delta} \sqrt{U_n^2 + U_b^2} U_b; \\
 & \frac{1}{EF} \frac{\partial T}{\partial t} - n \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial S} - \frac{\partial U_t}{\partial S} + U_n \frac{\partial \phi}{\partial S} - U_b \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial S} = 0; \\
 & (1 + \delta) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial U_n}{\partial S} - U_t \frac{\partial \phi}{\partial S} + U_b \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial S} = 0; \\
 & (1 + \delta) \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial U_b}{\partial S} + (U_n \sin \phi - U_t \cos \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S} = 0; \\
 & r_0 m \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - n \frac{\partial T}{\partial S} - B \frac{\partial^2 \gamma}{\partial S^2} = 0; \\
 & \delta = \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial S}; \quad \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial S} = \frac{1}{EF} \frac{\partial T}{\partial S} - n \frac{\partial \gamma}{\partial S}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь  $d$  — первоначальный диаметр каната до деформирования,  $\phi$  — угол наклона каната к горизонтали,  $\theta$  — угол отклонения каната от вертикальной плоскости,  $m, M, \omega$  — масса, присоединенная масса и плавучесть единицы длины каната до деформирования,  $k_f, k_n$  — гидродинамические коэффициенты сопротивления трения и формы каната,  $\rho$  — плотность среды,  $B$  — крутильная жесткость каната,  $r_0$  — радиус инерции массы поперечного сечения каната до деформирования,  $E$  — модуль Юнга материала каната,  $F$  — площадь его поперечного сечения.

При выводе (20) использована гипотеза Г.Н. Савина и О.А. Горошко [15] для описания продольных деформаций каната:

$$\varepsilon^*(S, t) = \varepsilon(S, t) - n \gamma(S, t), \tag{21}$$

где  $\varepsilon^*(S, t)$  — полное удлинение каната,  $\varepsilon(S, t)$  — упругое удлинение каната, вызванное продольным натяжением,  $\gamma(S, t)$  — поворот произвольного сечения каната,  $n$  — коэффициент раскрутки.

Таким образом, в трехмерной РС (канате) распространяется четыре волны трех типов: продольные волны со скоростью  $V_{1,2}$ , конфигурационные (поперечные) в направлении нормали  $\vec{n}$  и бинормали  $\vec{b}$  со скоростью  $V_{3,4(5,6)}$  и крутильные со скоростью  $V_{7,8}$ . Для скорости распространения крутильных волн  $V_{7,8}$  имеем

$$V_{7,8} = \pm \sqrt{\frac{B}{r_0^2 m}}. \quad (22)$$

Одним из факторов, нарушающих эксплуатационные условия использования РС (канатов, нитей и т.д.) в космических связках [2], подвесных канатных дорогах, при шахтном подъеме [16] и других, является петлеобразование при их работе. В первом случае петли могут образовываться за счет несимметрии распределения касательных и нормальных напряжений по диаметальному сечению. При этом первоначальная структура поперечного сечения каната нарушается и отдельные слагающие его пряди (проволоки) могут деформироваться, образуя складки, петли и кольшки. Другой тип петлеобразования связан с возможностью образования петли без изменения дифференциальных геометрических свойств РС (каната) как в целом, так и в каждом поперечном сечении в отдельности [17]. Механизм образования петли во втором случае является уменьшение осевого усилия в отдельных сечениях каната и изменение знака угла его закрутки  $\gamma$ , характеризующего качественное различие в крутильных деформациях каната — переход от раскручивания каната к его закручиванию и образованию петли. С помощью модели (20) можно описать петлеобразование в перечисленных выше механических системах по второму типу. Продемонстрируем это численно на примере метаматематического моделирования движения РС (буксировочного каната) на эволюции во время качки судна-буксировщика.

Граничными условиями на судне-буксировщике являются нестационарный закон его движения  $V_x, V_y$  и угол закрутки БС  $\gamma^*(t)$  в точке касания РС лебедки  $S = L$ :

$$\begin{aligned} U_t(L, t) &= \text{Cos } \theta \text{Cos } \phi V_x - \text{Sin } \theta \text{Cos } \phi V_y; \\ U_n(L, t) &= -\text{Cos } \theta \text{Sin } \phi V_x + \text{Sin } \phi \text{Sin } \theta V_y; \\ U_e(L, t) &= \text{Sin } \theta V_x + \text{Cos } \theta V_y; \\ \gamma(L, t) &= \gamma^*(t). \end{aligned} \quad (23)$$

Граничными условиями на другом конце  $S = 0$  являются условия динамического равновесия сил на подводном буксируемом аппарате:

$$\begin{aligned} T + P \text{Sin } \phi + M^* \left( \frac{\partial U_t}{\partial t} - U_n \frac{\partial \phi}{\partial t} + U_e \text{Cos } \phi \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \frac{k_* S_* \rho}{2} |\bar{U}| U_t &= 0; \\ P \text{Cos } \phi + M^* \left( \frac{\partial U_n}{\partial t} + U_t \frac{\partial \phi}{\partial t} - U_e \text{Sin } \phi \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \frac{k_* S_* \rho}{2} |\bar{U}| U_n &= 0; \\ M^* \left( \frac{\partial U_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (U_n \text{Sin } \phi - U_t \text{Cos } \phi) \right) + \frac{k_* S_* \rho}{2} |\bar{U}| U_e &= 0; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{U} = U_t \bar{t} + U_n \bar{n} + U_b \bar{b},$$

и условие, накладываемое на крутильную степень свободы РС,

$$\gamma(0, t) = 0, \quad M_k^* = kT(0, t). \quad (25)$$

Начальные условия для нашей краевой задачи определяются в ходе решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются из модели (20), если в ней производную по времени  $\frac{\partial(\dots)}{\partial t}$  положить равной нулю [18].

Рассмотрим выполнение условия петлеобразования для следующих характеристик РС до деформирования: погонная масса 2,5 кг/м, присоединенная масса 1 кг/м соответственно. Первоначальный диаметр РС составлял 0,02 м, гидродинамические коэффициенты сопротивления формы и трения — 0,3 и 0,01. Крутильная жесткость РС —  $1,0 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ , коэффициент раскрутки — 0,001, эффективная продольная жесткость троса —  $6,4 \cdot 10^{-4} \text{ 1/Н}$ , масса и присоединенная масса подводного буксируемого аппарата — 300 кг, площадь его миделевого сечения —  $0,2 \text{ м}^2$ , гидродинамический коэффициент сопротивления — 0,5 соответственно. Общая длина РС составляла 80 м. Шаг по длине в процессе счета выбирался из диапазона  $[0,1 \div 10 \text{ м}]$ , по времени — из условий устойчивости численного алгоритма. Для численного решения краевой задачи используем апробированную схему Кранка–Никольсона [19, 20]. Ввиду отсутствия данных в литературе по расчету трехмодовой модели (учитывающей продольные, конфигурационные (две) и крутильные волны в РС), проверка численного алгоритма проводилась путем серии расчетов на грубой и измельченной сетках [20]. Шаг по длине в процессе счета выбирался из диапазона  $[0,1 - 1 \text{ м}]$ , по времени — из условия устойчивости численного алгоритма в соответствии с критерием Фридрикса–Куранта–Левы [19, 20].

### Результаты

Расчеты проведены для скорости буксировки 5 м/с и для двух радиусов разворота судна-буксировщика —  $R = 50 \text{ м}$  и  $R = 100 \text{ м}$ . Эволюция осевого усилия  $T$ , а также угла  $\gamma$  и крутящего момента  $M_k$  при этом претерпевает незначительные изменения. Причиной этого является плавный характер изменения осевого напряжения в коренной точке каната, относительно слабо возбуждающий крутильные волны в системе. Однако, в среднем, волнение в океане составляет постоянно 4–5 баллов. Поэтому режимы эволюции сопровождаются различными видами качки судна-буксировщика. Проведено численное моделирование режима эволюции при продольной качке судна-буксировщика. Радиус разворота составлял 50 м при низкочастотных продольных колебаниях коренного конца каната ( $S = L$ ) с периодом 20 и 10 с. Для этого на скорость в этой точке  $S = L$  было наложено следующее условие:

$$U_t = V_x \text{Cos} \phi - V_y \text{Cos} \phi \text{Sin} \theta + A \text{Sin} \nu t, \quad (26)$$

где  $A$  — амплитуда вынужденных колебаний,  $\nu$  — частота вынужденных колебаний.

Эволюция угла  $\gamma$  и момента  $M_k$  в точке крепления буксируемого аппарата ( $S = 0$ ) для амплитуды  $A = 1 \text{ м/с}$  и периода  $\tau = 20 \text{ с}$  показаны на рис. 2 для заданного режима качки (26) функция  $U_t(L, t)$ . Из графиков следует, что качка судна-буксировщика приводит к возбуждению крутильных волн большой амплитуды в системе. Это способствует качественному переходу в отдельных сечениях РС



(в данном случае буксировочного каната) от его раскрутки под действием гравитационных сил и веса буксируемого аппарата к закрутке при прохождении крутильных волн (см. рис. 2). Нестационарный характер колебательного процесса в РС, а также слабое демпфирование крутильных колебаний может способствовать их усилению и петлеобразованию как по первому, так и по второму типу [17, 18] (путем выпучивания проволок из прядей и их облома, скручивания в петли и т.д.).

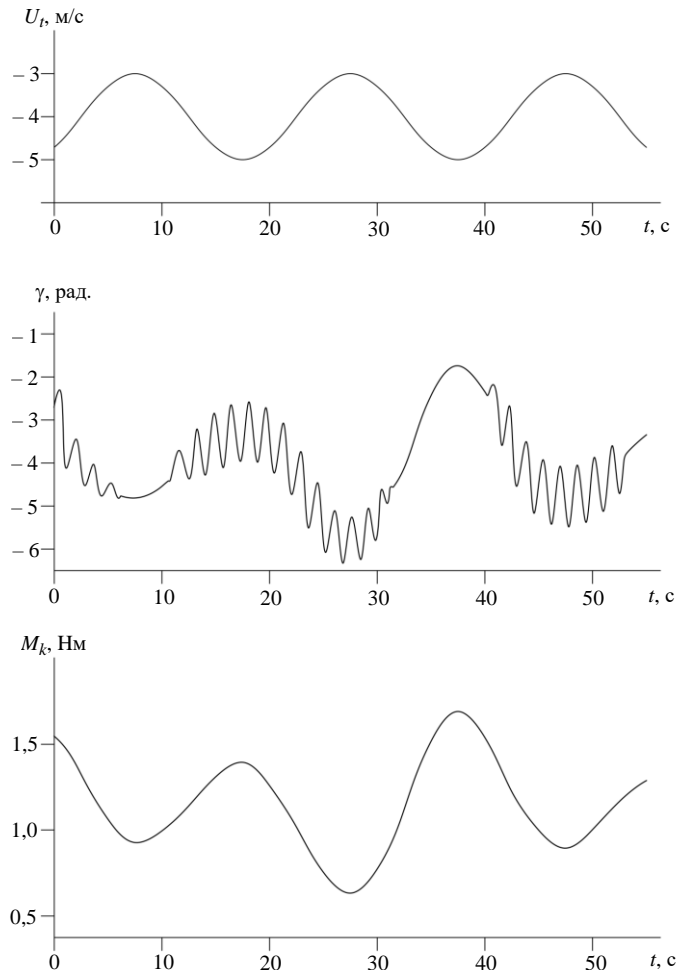


Рис. 2

### Заключение

Получена математическая модель, описывающая нелинейную четырехмодовую динамику РС в пространственно-неоднородном поле массовых и поверхностных сил. Для нее выполняются принципы предельности и гиперболичности, сформулированные И.Т. Селезовым [8]. В совокупности с краевыми и начальными условиями она может применяться для управления, описания динамики и статики геометрически и физически нелинейных космических связей, стержневых элементов, эрлифтных систем большой протяженности для добычи полезных ископаемых со дна Мирового океана, свай в грунте, канатов кранового оборудования, шахтных подъемников, подвесных канатных дорог, буксируемых систем в потоке жидкости и газа и др.

Апробация полученной четырехволновой модели проведена на основе численного анализа трехволновой модели, описывающей пространственное распространение четырех волн трех типов: продольных, конфигурационных (поперечных) в направлении нормали  $\vec{n}$  и бинормали  $\vec{b}$ , а также крутильных. С помощью предложенной модели и численного алгоритма определены необходимые количест-

венные оценки угла закрутки РС  $\gamma$  и крутящего момента  $M_k$ , приводящие к петлеобразованию. Расчеты показали, что для скорости буксировки РС 5 м/с для двух радиусов разворота судна-буксировщика —  $R = 50$  м и  $R = 100$  м эволюция осевого усилия  $T$ , угла  $\gamma$  и крутящего момента  $M_k$  не претерпевают значительных изменений, которые могут привести к петлеобразованию.

Численное моделирование режима продольной качки судна-буксировщика во время эволюции (для скорости буксировки РС 5 м/с для двух радиусов разворота судна-буксировщика —  $R = 50$  м и  $R = 100$  м) подтвердило возбуждение в РС крутильных волн большой амплитуды, что способствует качественному переходу в РС (буксировочном канате) от его раскрутки к закрутке. И, как следствие, петлеобразованию в отдельных сечениях каната как по первому, так и по второму типу.

*Ю.И. Калюх, Я.О. Берчун*

## ЧОТИРЬОХМОДОВА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ

Розподілені системи знайшли широке застосування на практиці. Це космічні зв'язки на навколосемному просторі протяжністю в десятки кілометрів. Ними описуються залізобетонні палі в ґрунті при розрахунках напружено-деформованого стану і оцінки технічного стану; трубопроводи як в повітрі, так і в рідині, підводні буксировані системи. Відомі підводні системи ерліфта великої протяжності для видобутку мінералів (конкрецій) з дна океану протяжністю в 5–10 км. Для вирішення завдань динаміки таких систем в різних середовищах відомі математичні моделі є не цілком коректними з точки зору врахування різноманіття хвильових процесів. Це визначає необхідність побудови уточнених хвильових моделей. У статті описано нову квазілінійну математичну модель, що стосується нелінійної чотирьохмодової динаміки розподіленої системи в просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил. Вона описується нелінійною системою дванадцяти рівнянь першого порядку в частинних похідних. Для неї виконуються принципи граничності і гіперболічності. У сукупності з крайовими і початковими умовами модель може застосовуватися для опису динаміки і статички геометрично і фізично нелінійних стрижневих елементів, палей в ґрунті, канатів кранового обладнання, шахтних підйомників, підвісних канатних доріг, систем, що буксировуються в потоці рідини і газу та ін. Для двохмодової просторової редукції моделі розглянуто теорему про коректність задачі Коші. Апробація моделі проведена на основі чисельного рішення просторової задачі про поширення чотирьох хвиль трьох типів: поздовжніх, конфігураційних в напрямку нормалі і бінормалі, крутильних. За допомогою чисельного алгоритму і програми на основі методу скінченних різниць визначено необхідні кількісні оцінки кута закрутки і крутного моменту для конкретної розподіленої системи в потоці рідини.

**Ключові слова:** чотирьохмодова модель, розподілені системи, петля, чисельне моделювання.

*Yu.I. Kaliukh, Ya.A. Berchun*

## FOUR-MODE MODEL OF DYNAMICS OF DISTRIBUTED SYSTEMS

Distributed systems are widely used in practice. These are cosmic ligaments in the near-Earth space with a length of tens of kilometers. They approximate reinforced concrete piles in the soil when calculating the stress-strain state and assessing the technical condition; pipelines both in air and in liquid, underwater towed systems. Known underwater airlift systems of great length for the extraction of minerals (nodules) from the ocean floor with a length of 5-10 km. To solve the problems of the dynamics of such systems in various environments, the well-known mathematical models are not quite correct from the point of view of taking into account the variety of

wave processes. This determines the need to build refined wave models. A new quasilinear mathematical model, which describes the nonlinear four-mode dynamics of the distributed system in the spatially inhomogeneous field of mass and surface forces, has been obtained. It is described by a nonlinear system of twelve first-order partial differential equations. For her, the principles of ultimate and hyperbolicity are fulfilled. Together with the boundary and initial conditions, it can be used to describe dynamics and statics of geometrically and physically nonlinear rod elements, piles in the ground, crane equipment ropes, mine lifts, aerial cableways, towed systems in liquid and gas flow, etc. For two-mode spatial reduction of the model, the theorem about correctness of Cauchy problem has been considered. The model was tested on the basis of a numerical solution of the spatial problem of the propagation of four waves of three types: longitudinal, configurational in the direction of the normal and binormal, torsion. Using the proposed model and the numerical algorithm based on the finite-difference method, to determined necessary quantitative estimates of the rope twist angle and the torque for specific distributed system in a fluid flow.

**Keywords:** four-mode model, distributed systems, loop, numerical simulation.

1. Губарев В.Ф. Рациональная аппроксимация систем с распределенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 2. С. 99–115.
2. Dynamics of tethered space systems (Advances in Engineering Series). H. Troger, A.P. Alpernton, V.V. Beletsky, V.I. Dranovskii, V.S. Khoroshilov, A.V. Pirozhenko, A.E. Zakrzhevskii. CRC Press; 1 edition (June 16, 2017). 245 p., ISBN-10: 1138117935, ISBN-13: 978-1138117938.
3. Трофимчук О.М., Калюх Ю.И., Дулін В.А., Берчун Я.О. Про можливість багатохвильової ідентифікації дефектів у палях. *Кибернетика та системний аналіз*. 2018. № 4. С. 98–108.
4. Amabili M., Païdoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. *Applied Mechanics Reviews*. 2003. **56**. P. 349–381.
5. Yuan Z. L Jin and W Chi. Finite difference method for solving the nonlinear dynamic equation of underwater towed system. *International Journal of Correlational Methods*. 2014. **11**(4). P. 85–89.
6. Калюх Ю.И., Вусатюк А.Е. Факторизация в задачах управления и динамики протяженных систем. *Кибернетика та системний аналіз*. 2019. № 2. С. 117–128.
7. Doyle R.L., Halkyard J. Large scale airlift experiments for application to deep ocean mining. *Proc. Conference: ASME 2007 26th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. DOI: 10.1115/OMAЕ2007-29641.
8. Селезов И.Т. Развитие и приложение метода Коши–Пуассона в эластодинамике слоя и уравнение Тимошенко. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 3. С. 106–115.
9. Fossen T.I. Guidance and control of ocean vehicles. 1994, Wiley. Frwid
10. Fossen T.I. Marine control systems guidance. Navigation and control of snips, rigs and underwater vehicles marine cybernetics.
11. Laura P.A.A. On the dynamic behaviour of cable system in a recovery operation. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1970. **49**, N 3. P. 615–621.
12. Hegemier G.A., Nair S. A nonlinear dynamical theory for heterogeneous, anisotropic, elastic rods. *AIAA*. 1977. **15**, N 1. P. 8–15.
13. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.
14. Спрингс Д., Месситер А., Андерсон В. Парадокс в задаче о флаттере мембраны, — объяснения при помощи методов сингулярных возмущений. *Ракетная техника и космонавтика*. 1969. **7**, № 9. С. 52–59.
15. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев : Из-во АН УССР, 1962. 332 с.
16. Sharhaty A.I. Nonlinear and hysteretic twisting effects in ocean cable laying. *Trans. ASME: J. Energy resource Nehnal*. 1983. **105**, A 3. P. 341–345.
17. Tiner N.A. Failure analysis for wire rope. *SAMPE Quart.* 1977. **11**, N 1. P. 38–46.
18. Калюх Ю.И., Трофимчук А.Н., Лебедь А.Г. Численное решение двухточечных задач статике распределенных протяженных систем с помощью метода Нелдера–Мида. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. № 4. С. 109–118.
19. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1983. 616 с.
20. Хрущ В.К. Численные методы газовой динамики. Днепропетровск : Днепропетровский ун-т, 1981. 102 с.

Получено 10.06.2019