МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 519.711

А.Г. Наконечный, Г.И. Кудин, П.Н. Зинько, Т.П. Зинько

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ МАТРИЧНОЙ РЕГРЕССИИ

Ключевые слова: метод возмущений, малый параметр, линейная регрессия, операторные уравнения, несмещенные оценки, матрицы наблюдений, псевдообратные матрицы.

Введение

Проблемам оценки параметров в задачах регрессии посвящено множество работ [1, 2]. В основном исследовались оценки векторов или матриц по некоторым наблюдениям, в задачах линейной регрессии фактически больше внимания уделялось оценкам метода наименьших квадратов, линейным по наблюдениям. Поэтому в рамках линейной теории естественно изучать линейные по наблюдениям оценки, в частности несмещенные оценки, что приводит к уравнениям несмещенности, среди решений которых выделяют минимальные по норме, что позволяет минимизировать среднеквадратическую ошибку при некоррелированных ошибках наблюдений с одинаковыми дисперсиями. Заметим, что минимальные по норме решения уравнений несмещенности во многих случаях выражаются псевдообратными матрицами [3, 4].

В данной работе исследуются специальные задачи матричной регрессии, когда матрицы, входящие в наблюдения, допускают малые возмущения. Введены специальные линейные операторы, связанные с уравнением несмещенности линейных функций от матричных параметров, исследуются вопросы разложения их по малому параметру.

1. Постановка задачи линейной матричной регрессии

Пусть наблюдаются скалярные величины:

$$y_k = \mathrm{sp}(XA_k^{\mathrm{T}}(\varepsilon)) + \eta_k,\ \ k \in \overline{1, N}. \tag{1}$$

Здесь $\mathrm{sp}(Q)$ — след квадратной матрицы Q; T — символ транспонирования; $A_k(\varepsilon) = A_k + \varepsilon A_k(1),\ A_k,\ A_k(1),\ k \in \overline{1, N},$ — известные матрицы; $X \in R^{m\times n}$ — неизвестная матрица, $R^{m\times n}$ — пространство матриц размерности $m\times n$; $\varepsilon, (1 > \varepsilon > 0)$ — малый параметр; $\eta_k,\ k \in \overline{1, N},$ — последовательность случайных величин, для которых $E\eta_k = 0,\ k \in \overline{1, N},$ E — символ математического ожидания.

Необходимо оценить линейную функцию элементов матрицы $X \in R^{m\times n}$:

$$\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}}), \tag{2}$$

где $L \in R^{m\times n}$ — известная матрица.

Линейная оценка представляется в виде

$$\overset{\wedge}{\mathrm{sp}}\,(XL^{\mathrm{T}}) = \sum_{k=1}^{N} u_k(\varepsilon)\, y_k, \tag{3}$$

где $u_k(\varepsilon) \in R, k \in \overline{1, N},$ неизвестные

Для решения поставленной задачи в евклидовом пространстве рассматривается оператор $\wp(\varepsilon)$ — линейный оператор, действующий из конечного евклидового векторного пространства R^N в пространство матриц размерности $m \times n$:

$$\wp(\varepsilon)\, u(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{N} A_k(\varepsilon)\, u_k(\varepsilon), \;\; u(\varepsilon) = (u_1(\varepsilon), \ldots, u_N(\varepsilon))^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

а также сопряженный к нему линейный оператор $\wp^*(\varepsilon)$ [5]:

$$\wp^*(\varepsilon)\, Y = \begin{pmatrix} \mathrm{sp}(Y^{\mathrm{T}} A_1(\varepsilon)) \\ \cdots \\ \mathrm{sp}(Y^{\mathrm{T}} A_N(\varepsilon)) \end{pmatrix}, \;\; Y \in R^{m \times n}. \tag{5}$$

Утверждение 1. Для несмещенной оценки $\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}})$ в классе линейных оценок вида (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\wp(\varepsilon)\, u(\varepsilon) = L, \tag{6}$$

$$\mathrm{sp}(LY_k^{\mathrm{T}}) = 0, \;\; k \in \overline{1, m}, \tag{7}$$

где Y_k, $k \in \overline{1, m}$, — линейно независимые решения уравнения

$$\wp^*(\varepsilon)\, Y = 0. \tag{8}$$

Необходимость. Пусть выполняются условия (6), (7), т.е. существует вектор $u(\varepsilon) = (u_1(\varepsilon), \ldots, u_N(\varepsilon))^{\mathrm{T}}$ — решение уравнения (6), с помощью которого можно получить

$$E(\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}}) - \sum_{k=1}^{N} u_k(\varepsilon)\, y_k) = \mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}}) - E \sum_{k=1}^{N} u_k(\varepsilon)(\mathrm{sp}(XA_k^{\mathrm{T}}(\varepsilon)) + \eta_k) =$$

$$= \mathrm{sp}\left(X \left(L - \sum_{k=1}^{N} u_k(\varepsilon)\, A_k(\varepsilon) \right)^{\mathrm{T}} \right) = 0. \tag{9}$$

Следовательно, оценка выражения $\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}})$ (формула (3)) несмещенная.

Достаточность. Если оценка выражения $\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}})$ (формула (3)) несмещенная, т.е. $\mathrm{sp}\left(X \left(L - \sum_{k=1}^{N} u_k(\varepsilon)\, A_k(\varepsilon) \right)^{\mathrm{T}} \right) = 0,$ то ввиду произвольности матрицы $X \in R^{m \times n}$ и векторов $u(\varepsilon) \in R^N$ следует, что

$$L - \sum_{k=1}^{N} u_k(\varepsilon)\, A_k(\varepsilon) = 0 \Rightarrow L - \wp u(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \wp u(\varepsilon) = L. \tag{10}$$

Так как $u(\varepsilon) \in R^N$ — решение уравнения (6), то согласно свойству ортогональности этого решения линейно независимым решениям Y_k, $k \in \overline{1, m},$ однородной сопряженной системы $\wp^*(\varepsilon)\, Y = 0$ следует выполнение условий (6), (7).

Пусть G — множество решений уравнения (6): $\wp(\varepsilon)u(\varepsilon)=L$.

Утверждение 2. Предположим, что случайные величины $\eta_k,\ k\in\overline{1,N},$ попарно некоррелированные: $E\eta_k=0,\ E\eta_k^2=\gamma^2,\ k\in\overline{1,N},$ и множество G непусто.

Тогда имеют место равенства

$$E(\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}})-\sum_{k=1}^{N}u_k(\varepsilon)\,y_k)^2=\gamma^2(\wp^+(\varepsilon)\,L,\wp^+(\varepsilon)\,L)=\sigma^2, \tag{11}$$

где $\rho^+(\varepsilon)$ — оператор, псевдообратный оператору $\rho(\varepsilon)$.

Доказательство. Предположим, что $u(\varepsilon)\in G,$ тогда

$$E\left(\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}})-\sum_{k=1}^{N}u_k(\varepsilon)\,y_k\right)^2=\gamma^2\sum_{k=1}^{N}u_k^2(\varepsilon)=\gamma^2(u,u)\ge\gamma^2\min_{u\in G}(u,u). \tag{12}$$

Так как решением уравнения $\wp(\varepsilon)u(\varepsilon)=L$ с минимальной нормой является $\hat{u}(\varepsilon)=\wp^+(\varepsilon)\,L,$ то

$$\min_{u\in G}(u,u)=(\wp^+(\varepsilon)\,L,\wp^+(\varepsilon)\,L). \tag{13}$$

Из полученного равенства следует формула (11).

В дальнейшем изложении разложение оценки $\hat{u}(\varepsilon)$ по малому параметру ε связано с разложением оператора псевдообращения $\wp^+(\varepsilon)$ по степеням параметра ε.

2. Основные свойства оператора $\wp(\varepsilon)$ и псевдообратного к нему $\wp^+(\varepsilon)$

2.1. Произведение операторов $\wp^*(\varepsilon),\ \wp(\varepsilon)$. Произведением двух операторов $\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon): R^N\to R^N$ (оператор $\wp(\varepsilon)$ определен формулой (4), а оператор $\wp^*(\varepsilon)$ — формулой (5)), есть линейный оператор, порождаемый матрицей, которая определяется соотношением

$$\wp^*(\varepsilon)\,\wp(\varepsilon)\equiv F(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\mathrm{sp}(A_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_1(\varepsilon)) & \cdots & \mathrm{sp}(A_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_N(\varepsilon))\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathrm{sp}(A_N^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_1(\varepsilon)) & \cdots & \mathrm{sp}(A_N^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_N(\varepsilon))\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Для операторов $\wp^*(\varepsilon)\,\wp(\varepsilon)$ и $\wp(\varepsilon)\,\wp^*(\varepsilon)$ существуют множества сингулярностей:

$$(\nu_j(\varepsilon),\lambda_j^2(\varepsilon)),(U_j(\varepsilon),\lambda_j^2(\varepsilon)),\lambda_1^2(\varepsilon)>\lambda_2^2(\varepsilon)>\ldots>\lambda_N^2(\varepsilon)>0,\ j\in\overline{1,N},\ N=\mathrm{rang}F(\varepsilon), \tag{15}$$

с общими для обоих операторов множеством собственных значений $\lambda_j^2(\varepsilon),$ $j\in\overline{1,N},$ и соответствующих им собственных векторов $\nu_j(\varepsilon),U_j(\varepsilon),\ j\in\overline{1,N}.$ Указанные множества сингулярностей (15) полностью определяют действия как операторов $\wp^*(\varepsilon),\ \wp(\varepsilon),$ так и операторов, связанных с ними. Поскольку матрица (14) является матрицей Грамма для последовательности матриц $A_k(\varepsilon),\ k\in\overline{1,N},$ то значение параметра $N=\mathrm{rang}\,F(\varepsilon)$ определяет количество линейно независимых матриц в последовательности матриц $A_k(\varepsilon),\ k\in\overline{1,N}.$

2.2. Сингулярное разложение оператора $\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon)$. Важное для дальнейшего изложения сингулярное разложение оператора $\wp^*(\varepsilon)\,\wp(\varepsilon)$ определяется

ISSN 0572-2691

набором положительных собственных чисел $\lambda_j^2(\varepsilon)$, $j \in \overline{1, N}$, и соответствующей ему совокупностью собственных векторов $\nu_j(\varepsilon)$, $j \in \overline{1, N}$, матрицы $F(\varepsilon) \in R^{N \times N}$:

$$F(\varepsilon)\nu_j(\varepsilon) = \lambda_j^2(\varepsilon)\,\nu_j(\varepsilon),\ j \in \overline{1, N}, \tag{16}$$

$$\nu_q^{\mathrm{T}}(\varepsilon)\nu_j(\varepsilon) = \delta_{qj}, (U_j(\varepsilon), \lambda_j^2(\varepsilon)), q,\ j \in \overline{1, N}, \lambda_1^2(\varepsilon) > \lambda_2^2(\varepsilon) > \ldots > \lambda_N^2(\varepsilon) > 0,$$

где δ_{qj} — символ Кронекера.

Элементы полного набора сингулярностей $(U_j(\varepsilon), \lambda_j^2(\varepsilon))$, $j \in \overline{1, N}$, оператора $\wp^*(\varepsilon)$ определяются выражениями

$$U_j = \frac{1}{\lambda_j(\varepsilon)}\wp(\varepsilon)\nu_j(\varepsilon) \equiv \frac{1}{\lambda_j(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{N} A_k(\varepsilon)\nu_{jk}(\varepsilon) \in R^{m \times n},\ \ j \in \overline{1, N}, \tag{17}$$

где $\nu_{jk}(\varepsilon)$, $j,\ k \in \overline{1, N}$, — компоненты вектора $\nu_j^{\mathrm{T}}(\varepsilon) = (\nu_{j1}(\varepsilon), \nu_{j2}(\varepsilon), \ldots, \nu_{jN}(\varepsilon))$.

2.3. SVD-представление оператора $\wp^+(\varepsilon)$. Для оператора $\wp^+(\varepsilon)$ определяется SVD-представление соотношением

$$\wp^+(\varepsilon)Y = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{-1}(\varepsilon)\nu_j(\varepsilon)\,\mathrm{sp}(U_j(\varepsilon)Y^{\mathrm{T}}),\ Y \in R^{m \times n}. \tag{18}$$

Псевдообращение в матричных пространствах имеет свойства определения по Пенроузу:

$$\wp^+(\varepsilon)Y = \underset{\underset{y \in R^n}{\mathrm{Arg\,min}} \|\wp(\varepsilon)y - Y\|^2}{\arg\min} \|y\|^2,\ Y \in R^{m \times n},\ Y \neq 0.$$

3. Алгоритм приближенного решения задачи при возмущениях матриц наблюдения

Поскольку матрицы наблюдения возмущенные $(A_k(\varepsilon) = A_k + \varepsilon A_k(1),\ k \in \overline{1, N})$, и $1 > \varepsilon > 0$ — малый параметр, то решение уравнения (6) можно записать в виде

$$u(\varepsilon) = \wp^+(\varepsilon)Y + Z(\wp(\varepsilon))\,w,\ w \in R^N, \tag{19}$$

где $\wp^+(\varepsilon)$ — возмущенный псевдообратный оператор оператора $\wp(\varepsilon)$, $Z(\wp(\varepsilon))$ — ортогональный проектор на ядро оператора $\wp(\varepsilon)$.

Следовательно, необходимо получить возмущенные представления операторов $\wp(\varepsilon): R^N \to R^{m \times n}$ и $\wp^+(\varepsilon): R^{m \times n} \to R^N$, предполагая, что известны все параметры множества сингулярностей операторов $\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon)$ и $\wp(\varepsilon)\wp^*(\varepsilon)$:

$$(\nu_j(\varepsilon), \lambda_j^2(\varepsilon)), (U_j(\varepsilon), \lambda_j^2(\varepsilon)), \lambda_1^2(\varepsilon) > \lambda_2^2(\varepsilon) > \ldots > \lambda_N^2(\varepsilon) > 0,\ j \in \overline{1, N},\ N = \mathrm{rang}\,F(\varepsilon).$$

Здесь

$$F(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathrm{sp}(A_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_1(\varepsilon)) & \cdots & \mathrm{sp}(A_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_N(\varepsilon)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{sp}(A_N^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_1(\varepsilon)) & \cdots & \mathrm{sp}(A_N^{\mathrm{T}}(\varepsilon)A_N(\varepsilon)) \end{pmatrix} = F(0) + \varepsilon F(1) + o(\varepsilon)I_N \tag{20}$$

— матрица возмущенного оператора $\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon)$, отождествляемая с этим оператором ($I_{N \times N}$ — матрица размерности $N \times N$ с элементами, равными 1, $F(0)$ — матрица нулевого приближения в методе возмущений, $F(1)$ — матрица первого приближения в методе возмущений). Поэтому решение поставленной задачи сводится к определению набора сингулярностей матрицы $F(\varepsilon)$: $(\nu_j(\varepsilon),\ \lambda_j^2(\varepsilon))$, $j\in\overline{1,N}$.

3.1. Определение набора сингулярностей оператора $\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon)$ методом возмущений. Сингулярности $(\nu_j(\varepsilon),\ \lambda_j^2(\varepsilon))$, $\lambda_j^2(\varepsilon)>0$, $j\in\overline{1,N}$, возмущенного оператора $\wp^*(\varepsilon)\wp(\varepsilon)$ — решение следующей задачи на собственные числа и собственные векторы:

$$F(\varepsilon)\nu_j(\varepsilon)=\lambda_j^2(\varepsilon)\nu_j(\varepsilon),\ \ j\in\overline{1,N}. \tag{21}$$

В прикладных приложениях задача на собственные значения и собственные векторы (21) зависит от параметров, влияние которых на решение может быть существенным, но в общем случае задача (21) аналитического решения не имеет. Можно получить приближенное аналитическое решение с помощью известного метода возмущения [6], если использовать решение задачи при $\varepsilon=0$. Предположим, что для матрицы $F(0)$ известен набор положительных собственных чисел $\lambda_j^2(0)>0,\ j\in\overline{1,N}$, ($\lambda_j^2(0)$ — нулевое приближение собственного числа в методе возмущений) и соответствующий им набор собственных векторов $\nu_j(0),\ j\in\overline{1,N}$, $N=\operatorname{rang}F(0)$.

Согласно теории возмущения [6, 7] набор сингулярностей $(\nu_j(\varepsilon),\lambda_j^2(\varepsilon))$, $j\in\overline{1,N}$ (решение задачи (21)) в первом приближении представляется выражениями

$$\lambda_j^2(\varepsilon)=\lambda_j^2(0)+\varepsilon\lambda_j^2(1)+o(\varepsilon),\ \ j\in\overline{1,N}, \tag{22}$$

$$\nu_j(\varepsilon)=\nu_j(0)+\varepsilon\nu_j(1)+i_N o(\varepsilon),\ \ j\in\overline{1,N}, \tag{23}$$

где $\lambda_j^2(1), \nu_j(1),\ j\in\overline{1,N}$, — первое приближение соответственно собственных чисел и собственных векторов в методе возмущений, $i_N=(1,1,\ldots,1)^{\mathrm T}\in R^N$.

Здесь собственные векторы $\nu_j(\varepsilon)$, $j\in\overline{1,N}$, ортонормированные.

3.2. Первое приближение метода возмущения. Подстановка выражений для возмущенного набора сингулярностей (22), (23) в (21) позволяет получить

$$\varepsilon^o:\ F(0)\nu_j(0)-\lambda_j^2(0)\nu_j(0)=0,\ \ j\in\overline{1,N}, \tag{24}$$

$$\varepsilon^1:\ F(0)\nu_j(1)-\lambda_j^2(0)\nu_j(1)=\lambda_j^2(1)\nu_j(0)-F(1)\nu_j(0),\ \ j\in\overline{1,N}. \tag{25}$$

Система N-мерных векторов $\nu_j(0),\ j\in N$, ортонормированная, и в методе возмущения следующие приближения выражаются разложениями по этой системе векторов с последующим их ортонормированием:

$$\nu_j(1)=\sum_{m=1}^{N}C_{jm}^{(1)}\nu_m(0),\ \ j\in\overline{1,N}. \tag{26}$$

После проектирования с учетом разложений (26) векторных равенств (25) на базисные векторы $\nu_q(0), q\in\overline{1,N}$, получаются скалярные равенства:

$$(\lambda_j^2(0)-\lambda_q^2(0))C_{jq}^{(1)}=-\lambda_j^2(1)\delta_{jq}+F_{qj}(1),\ \ \ j,q\in\overline{1,N}, \tag{27}$$

$$F_{qj}(1)=\nu_q^{\mathrm T}(0)F(1)\nu_j(0),\ \ j,q\in\overline{1,N}. \tag{28}$$

При $q = j$ определяются поправки к сингулярным числам:

$$\lambda_j^2(1) = F_{jj}(1), \quad j \in \overline{1, N}, \tag{29}$$

и коэффициенты

$$C_{jj}^{(1)} = 0, \quad j \in \overline{1, N}, \tag{30}$$

а при $q \neq j$ — коэффициенты сингулярных векторов $\nu_j(1)$, $j \in \overline{1, N}$:

$$C_{jq}^{(1)} = F_{qj}(1) / (\lambda_j^2(0) - \lambda_q^2(0)), \; q \in \overline{1, N}, \; j \in \overline{1, N}, \; q \neq j. \tag{31}$$

3.3. Первое приближение возмущенных собственных функций сопряженного оператора $\wp^*(\varepsilon)$. Для оператора $\wp^*(\varepsilon) : R^{m \times n} \to R^N$ элементами полного набора сингулярностей $(U_j(\varepsilon), \lambda_j^2(\varepsilon))$, $j \in \overline{1, N}$, являются матрицы $U_j(\varepsilon) \in R^{m \times n}$, которые находятся согласно формулам

$$U_j(\varepsilon) = \lambda_j^{-1}(\varepsilon) \sum_{k=1}^{N} A_k(\varepsilon) \nu_{jk}(\varepsilon), \tag{32}$$

$$\lambda_j^{-1}(\varepsilon) = \lambda_j^{-1}(0)(1 - \varepsilon \lambda_j^2(1) / (2\lambda_j^2(0))) + o(\varepsilon), \quad j \in \overline{1, N}. \tag{33}$$

Использование формул (22), (26), (33) позволяет получить выражение

$$U_j(\varepsilon) = U_j(0) + \varepsilon U_j(1) + o(\varepsilon) I_{m \times n}, \quad j \in \overline{1, N}, \tag{34}$$

где

$$U_j(0) = \frac{1}{\lambda_j(0)} \sum_{k=1}^{N} A_k \nu_{jk}(0), \quad j \in \overline{1, N}, \tag{35}$$

$$U_j(1) = \frac{1}{\lambda_j(0)} \sum_{k=1}^{N} (A_k \nu_{jk}(1) + A_k(1) \nu_{jk}(0)) - \lambda_j(0) \lambda_j^2(1) U_j(0) / 2, \quad j \in \overline{1, N}. \tag{36}$$

3.4. Первое приближение через SVD-представление возмущенного псевдообратного оператора $\wp^+(\varepsilon)$. Псевдообращение через SVD-представление возмущенного оператора $\wp^+(\varepsilon)$ определяется соотношениями:

$$\wp^+(\varepsilon) Y = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{-1}(\varepsilon) \nu_j(\varepsilon) \operatorname{sp}(U_j(\varepsilon) Y^{\mathrm{T}}), \; Y \in R^{m \times n}, \tag{37}$$

$$\wp^+(\varepsilon) Y = \wp^+ Y + \varepsilon \wp^+(1) Y + o(\varepsilon) i_N, \; Y \in R^{m \times n}, \tag{38}$$

$$\wp^+ Y = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j^{-1}(0) \nu_j(0) \operatorname{sp}(U_j(0) Y^{\mathrm{T}}), \; Y \in R^{m \times n}, \tag{39}$$

$$\wp^+ Y = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{-1}(0) \nu_j(0) \operatorname{sp}(U_j(0) Y^{\mathrm{T}}), \; Y \in R^{m \times n}, \tag{40}$$

$$\mu_j(1) = -(2\lambda_j(0) / (\lambda_j^2(1)) \nu_j(0) \operatorname{sp}(U_j(0) Y^{\mathrm{T}}), \; j \in \overline{1, N}. \tag{41}$$

4. Пример

Пусть наблюдения описываются системой линейных равенств

$$y_k = \mathrm{sp}(XA_k^{\mathrm{T}}) + \eta_k, \ \ k \in \overline{1, N}, \tag{42}$$

где $A_k = (a_{1k}, a_{2k}), k \in \overline{1, N},$ — известные векторы:

$$\begin{gathered} a_{1k} = 1, \ \ a_{2k} = h_k(1) + \varepsilon h_k(2), \ \ k \in \overline{1, N}, \\ h_{2k}(1) = -h_{2k-1}(1), \ \ k \in \overline{1, K}, \ \ N = 2K, \end{gathered} \tag{43}$$

$1 > \varepsilon > 0$ — малый параметр, $X = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ — неизвестный вектор, $L = (1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\eta_k, \ k \in \overline{1, N},$ — последовательность случайных некоррелированных величин:

$$E\eta_k = 0, E\eta_k^2 = \gamma^2, k \in \overline{1, N}.$$

Необходимо оценить линейную функцию $\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}}) = x_1 + x_2$ элементов матрицы X.

Линейная оценка представляется в виде

$$\widehat{\mathrm{sp}}(XL^{\mathrm{T}}) \equiv (\widehat{x_1 + x_2}) = \sum_{k=1}^{2K} u_k(\varepsilon)\, y_k, \tag{44}$$

где $u_k(\varepsilon) \in R, k \in \overline{1, 2K},$ неизвестны.

Согласно (6) и приведенному выше утверждению 1 для получения несмещенной оценки с минимальной нормой необходимо определить решение операторного уравнения

$$\wp(\varepsilon)\, u(\varepsilon) \equiv \sum_{k=1}^{2K} A_k(\varepsilon)\, u_k(\varepsilon) = L, \tag{45}$$

т.е. представить решение в виде $u(\varepsilon) = \wp^{+}(\varepsilon)L.$

Операторному уравнению (45) согласно (43) эквивалентна система линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{2K} u_k(\varepsilon) = 1, \ \ \sum_{k=1}^{2K} u_k(\varepsilon)(h_k(1) + \varepsilon h_k(2)) = 1. \tag{46}$$

Решение системы (46) с минимальной нормой позволяет записать оптимальную оценку $\hat{u}_k, k \in \overline{1, 2K},$ в виде

$$\hat{u}_k(\varepsilon) = b_1(\varepsilon) + b_2(\varepsilon)(h_k(1) + \varepsilon h_k(2)), \ \ b_1(\varepsilon), b_2(\varepsilon) \in R, \ \ k \in \overline{1, 2K}. \tag{47}$$

Неизвестные параметры $b_1(\varepsilon), b_2(\varepsilon)$ определяются решением операторного уравнения

$$\wp_1(\varepsilon)(b_1(\varepsilon), b_2(\varepsilon)) \equiv b_1(\varepsilon)\, B_1(\varepsilon) + b_2(\varepsilon)\, B_2(\varepsilon) = L, \tag{48}$$

где

$$B_1(\varepsilon) = (2K, \varepsilon H_2)^{\mathrm{T}}, \ \ B_2(\varepsilon) = (\varepsilon H_2, H_1 + 2\varepsilon H_{12} + \varepsilon^2 H_{22})^{\mathrm{T}}, \tag{49}$$

$$H_2 = \sum_{k=1}^{2K} h_k(2), \ \ H_1 = \sum_{k=1}^{2K} h_k^2(1),$$

$$H_{12} = \sum_{k=1}^{2K} h_k(1) h_k(2), \ \ H_{22} = \sum_{k=1}^{2K} h_k^2(2).$$

Решение уравнения (48) представляется в виде

$$(b_1(\varepsilon), b_2(\varepsilon))^{\mathrm{T}} = \wp_1^{+}(\varepsilon)\, L. \tag{50}$$

Набор сингулярностей $(\nu_j(\varepsilon), \lambda_j^2(\varepsilon)), \lambda_j^2(\varepsilon) > 0,\ j \in \overline{1,2},$ оператора $\wp_1^{*}(\varepsilon)\wp_1(\varepsilon)$ определяется сингулярным разложением для симметрической матрицы:

$$\wp_1^{*}\wp_1 \equiv F(\varepsilon) = F(0) + \varepsilon F(1) + o(\varepsilon)\, I_{2\times 2}, \tag{51}$$

$$F(0) = \begin{pmatrix} 4K^2 & 0 \\ 0 & H_1^2 \end{pmatrix}, \quad F(1) = \begin{pmatrix} 0 & H_2(2K + H_1) \\ H_2(2K + H_1) & 4H_1H_{12} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

В нулевом приближении (собственные числа и собственные векторы матрицы $F(0)$):

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2(0) = 4K^2,\ \ \nu_1(0) = (1,\ 0)^{\mathrm{T}}, \\ &\lambda_2^2(0) = H_1^2,\ \ \nu_2(0) = (0, 1)^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{53}$$

Множество сингулярностей оператора $\wp_1^{*}\wp_1$ в первом приближении:

$$\begin{gathered} \lambda_1^2(\varepsilon) = 4K^2 + o(\varepsilon), \nu_1(\varepsilon) = (1, 0)^{\mathrm{T}} + \varepsilon C_{12}^{(1)}(0, 1)^{\mathrm{T}} + o(\varepsilon)\, i_2, C_{12}^{(1)} = H_2 / (2K - H_1), \\ \lambda_2^2(\varepsilon) = H_1^2 + 4\varepsilon H_1H_{12} + o(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon) = (0, 1)^{\mathrm{T}} - \varepsilon C_{12}^{(1)}(1, 0)^{\mathrm{T}} + o(\varepsilon)\, i_2. \end{gathered} \tag{54}$$

Собственные векторы первого приближения в (54) ортонормированные. Собственные векторы $U_j(\varepsilon),\ j \in \overline{1,2},$ оператора $\wp_1\ \wp_1^{*}$:

$$U_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \frac{H_1C_{12}^{(1)} + H_2}{2K} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(\varepsilon)\, i_2, \tag{55}$$

$$U_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \varepsilon \frac{H_2 - 2C_{12}^{(1)}K}{H_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon)\, i_2. \tag{56}$$

Полученные собственные векторы оператора $\wp_1\ \wp_1^{*}$ в первом приближении ортонормированные, их скалярные произведения с вектором L представляются выражениями

$$\mathrm{sp}(U_1(\varepsilon)\, L^{\mathrm{T}}) = 1 + \varepsilon \frac{H_1C_{12}^{(1)} + H_2}{2K} + o(\varepsilon), \tag{57}$$

$$\mathrm{sp}(U_2(\varepsilon)\, L^{\mathrm{T}}) = 1 + \varepsilon \frac{H_2 - 2KC_{12}^{(1)}}{H_1} + o(\varepsilon). \tag{58}$$

Таким образом, получено решение операторного уравнения (48) в первом приближении:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1(\varepsilon) \\ b_2(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2K \\ 1/H_1 \end{pmatrix} + \varepsilon \left(\begin{pmatrix} (C_{12}^{(1)}H_1 + H_{21}) / (2K)^2 \\ C_{12}^{(1)} / 2K \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} -C_{12}^{(1)} / H_1 \\ (H_2 - 2KC_{12}^{(1)} - 2H_{12}) / H_1^2 \end{pmatrix} \right) + o(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{59}$$

которое с помощью (47) определяет в первом приближении малого параметра оптимальные оценки $\hat{u}_k, k \in \overline{1,2K}$:

$$\hat{u}_k(\varepsilon) = \frac{H_1 - 2K}{2KH_1} + \frac{h_k(1)}{H_1} + \varepsilon\left(\frac{h_k(2)}{H_1} - \frac{H_1H_2 + 2KH_{12}}{KH_1^2} + \right.$$

$$\left. + (1 - h_k(1))\left(\frac{H_1H_2 + 4KH_{12}}{2KH_1^2}\right)\right) + o(\varepsilon),\ k \in \overline{1, 2K}. \tag{60}$$

Подстановка полученного выражения для $\hat{u}_k, k \in \overline{1, 2K}$, в формулу (44) позволяет определить искомую оптимальную оценку $(x_1 \overset{\wedge}{+} x_2)$.

Заметим, что оптимальная оценка $(x_1 \overset{\wedge}{+} x_2)$ существенно упростится, если $a_{2,k} = (-1)^k h + \varepsilon, k \in \overline{1, 2K}$, т.е. малый параметр $\varepsilon > 0$ — это возмущение второй компоненты векторов $A_k = (a_{1,k}, a_{2,k}), k \in \overline{1, 2K}$. Для этого случая

$$H_2 = 2K,\ H_1 = 2Kh,\ H_{12} = 0, \tag{61}$$

что позволяет представить в первом приближении малого параметра оптимальные оценки $\hat{u}_k$, $k \in \overline{1, 2K}$, в виде

$$\hat{u}_k(\varepsilon) = \frac{1}{2Kh^2}(h^2 + h_k(1)(1 - \varepsilon)) + o(\varepsilon),\ \ k \in \overline{1, 2K}. \tag{62}$$

Если учесть предположения относительно случайных величин η_k, $k \in \overline{1, 2K}$, то погрешность полученных оценок (62) согласно утверждению 2 определяется простым выражением:

$$E(\mathrm{sp}(XL^{\mathrm{T}}) - \sum_{k=1}^{2K} \hat{u}_k(\varepsilon)\, y_k)^2 = \gamma^2 \sum_{k=1}^{2K} \hat{u}_k^2(\varepsilon) = \frac{\gamma^2}{2K}\left(1 + \frac{1 - 2\varepsilon}{h^2}\right) + o(\varepsilon). \tag{63}$$

Согласно свойствам функции (63) можно утверждать, что в первом приближении малого параметра малая «несимметричность» вторых компонент соседних наблюдаемых векторов (в рамках рассматриваемой постановки задачи) уменьшает погрешность оценивания.

Заключение

Для линейного операторного уравнения, эквивалентного решению задачи получения несмещенной оценки наблюдений в пространстве прямоугольных матриц, приводится решение задачи в соответствующем евклидовом пространстве матриц с использованием операций псевдообращения. Методом малого параметра в первом приближении решена задача оценивания при малых возмущениях матриц. Приведен тестовый пример.

О.Г. Наконечний, Г.І. Кудін, П.М. Зінько, Т.П. Зінько

МЕТОД ЗБУРЕННЯ В ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОЇ МАТРИЧНОЇ РЕГРЕСІЇ

В рамках теорії лінійної регресії досліджено лінійні за спостереженнями оцінки, зокрема незміщувані, що приводить до рівнянь незміщуваності, серед розв'язків яких виділяються мінімальні за нормою, що дозволяє мінімізувати середньоквадратичну похибку при некорельованих збуреннях спостережень з одна-

 ISSN 0572-2691

ковими дисперсіями. Попередньо задачу лінійного регресійного аналізу подано у вигляді лінійного оператора в просторі незалежних прямокутних матриць, пов'язаного з рівнянням незміщуваності лінійних функцій від матричних параметрів. Передбачається, що для цього оператора в незбуреному варіанті відомо його SVD-представлення, а також SVD-представлення для псевдооберненого до нього оператора. З огляду на необхідність визначення сингулярного набору збуреного оператора для визначення власних чисел і власних векторів спеціальної симетричної матриці застосовується метод збурень, відповідно до загальної теорії операторів в евклідовому просторі визначаються власні матриці спряженого збуреного оператора. Наведено формули в першому наближенні малого параметра у припущенні, що задача лінійного регресійного аналізу за наявності збурень матриць спостереження може вирішуватися в умовах реального часу. Розглянуто тестовий приклад, в якому крім малого параметра входять також параметри випадкових збурень.

Ключові слова: метод збурення, малий параметр, лінійна регресія, операторні рівняння, незміщувані оцінки, матриці спостережень, псевдообернені матриці.

A.G. Nakonechnyi, G.I. Kudin, P.N. Zinko, T.P. Zinko

EXCITATION METHOD IN PROBLEMS OF REGRESSION OF A LINEAR MATRIX

In the framework of the theory of linear regression, linear from observations estimates are studied, in particular, the unbiased estimates, which lead to unbiased equations, among which the solutions are distinguished by the minimum norm, which allows to minimize the mean square error for non-correlated observation errors with the same variances. Preliminarily, the task of linear regression analysis is represented as a linear operator in the space of independent rectangular matrices associated with the equation of unbiased of linear functions of matrix parameters. It is assumed that for this operator in the unperturbed version its SVD representation is known, as well as SVD representation for the pseudo inverse to it operator. Taking into account the need to determine the singular set of the perturbed operator, the perturbation method is used to determine the eigenvalues and eigenvectors of the special symmetric matrix, according to the general theory of operators in Euclidean space the eigenmatrices of the adjoint perturbed operator are determined. Assuming that the linear regression analysis problem in the presence of matrix perturbations of the observation can be solved in real time, the resulting formulas are presented in a first approximation of a small parameter. A test example in which, in addition to a small parameter, the parameters of random perturbations also enter, is given.

Keywords: perturbation method, small parameter, linear regression, operator equations, unbiased estimates, observation matrices, pseudo inverse matrices.

1. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. М. : Наука, 1977. 305 с.
2. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Издательский дом «Вильямс». 2007. 912 с.
3. Кириченко Н.Ф., Донченко В.С. Псевдообращение в задачах кластеризации. *Кибернетика и системный анализ.* 2007. № 4. С. 73–92.
4. Кириченко Н.Ф., Кудин Г.И. Анализ и синтез систем классификации сигналов средствами возмущений псевдобратных и проекционных операций. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 3. С. 47–57.
5. Donchenko V.S., Zinko T., Skotarenko F. «Feature vectors» in grouping information problem in applied mathematics: vectors and matrices. *Problems of Computer Intellectualization*. ITHEA, Kyiv : 2012. P. 111–124.
6. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М. : Мир, 1984. 536 с.
7. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М. : Наука, 1976. 864 с.
8. Nakonechniy O.G., Kudin G.I., Zinko T.P. Formulas of perturbation for one class of pseudo inverse operators. *Matematychni Studii*. 2019. **52**, N 2. P. 124–132.

Получено 14.01.2020