УДК 519.837.2

*М.Ш. Маматов, А.О. Зуннунов, Э.Э. Эсонов*

# КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ «ЛЕВ И ЧЕЛОВЕК» ПРИ НАЛИЧИИ КРУГОВОГО ПРЕПЯТСТВИЯ*

**Ключевые слова:** преследование, убегание, преследующий игрок, убегающий игрок, управление преследования, управление убегания.

## Введение

Основы теории игр заложены в первой половине XX века. Это были пошаговые и матричные игры [1, 2], позже появились дифференциальные игры, изучаемые теперь в самых разных постановках [3–6]. Одна из первых опубликована — «Лев и Человек» [7, 8], предложенная Р. Радо. Она заключалась в вопросе: «Лев и Человек, находящийся на огороженной круглой арене, имеют одинаковую максимальную скорость. Какой стратегии должен придерживаться Лев, чтобы быть уверенным в своей трапезе?». Многие удовлетворились бы ответом «$L$ — лев все время должен находиться на радиусе $OM$, $M$ — человек».

Если $L$ сходит с $OM$, то асимметрия идет на пользу $M$. Поэтому $L$ придерживается $OM$ и всякая иррегулярность в поведении $M$ помогает $L$. Примем, что $M$ бежит по окружности $C$ радиуса $r$ с угловой скоростью ω. Тогда $L$, придерживаясь радиусов, бежит по окружности, касающейся $C$, скажем, в точках $P$ и $M$, оказывается пойманным за время, меньше $\frac{\pi}{\omega}$. Несмотря на это, ответ неверен: $M$ может избежать поимки, как бы ни вел себя $L$. Это впервые обнаружил профессор А.С. Безикович [7, 8].

## 1. Постановка задачи

Рассматривается задача «Лев и Человек», т.е. простое преследование–убегание одного управляемого объекта $x_0$ — Человек, другим управляемым объектом $x_1$ — Лев на круге $K_{kr} \subset R^2$, $K_{kr} = \{(x^1, x^2):\ (x^1)^2 + (x^2)^2 \le r^2, r > 0\}$. Пусть движение точек $x_0$, $x_1$ описывается простейшими уравнениями:

$$\dot{x}_0 = u_0,\ \dot{x}_1 = u_1,\ \|u_0\| \le 1,\ \|u_1\| \le 1, \tag{1}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Научных проектов фундаментальных исследований Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проекты ОТ-Ф4-(36+32), ОТ-Ф4-33).

где $u_0$, $u_1$ — управляющие параметры; $u_0$ — управляющий параметр убегающего игрока, $u_1$ — управляющий параметр преследующего игрока, $\|z\| = \sqrt{(z, z)}$, $(z_1, z_2)$ — скалярное произведение векторов $z_1, z_2 \in R^2$.

Игра (1), как уже отмечено, происходит на круге $K_{kr} \subset R^2$ и считается завершенной в момент времени $T$, если выполнено условие $x_0(T) = x_1(T)$. В таком случае игра завершена в смысле точной поимки.

*Определение 1.* Позиционной ε-стратегией убегающего игрока $x_0$ назовем такую измеримую по $t$ функцию $u_0(x_0(t_j), x_1(t_j))$, что $u_0(x_0(\tau), x_1(\tau)) = u_0(x_0(t_j), x_1(t_j))$ при $t_j \le \tau \le t_{j+1}$, где $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_j < \ldots$ и $\lim t_j = +\infty$.

Следующая теорема доказана А.С. Безиковичем и опубликована в [7]: убегающий может гарантировать несовпадение положений игроков, т.е. отсутствие точной поимки (см. также [8–15]).

**Теорема 1.** Пусть на круге $K_{kr} \subset R^2$ задана игра «Лев и Человек», т.е. «простое преследование–убегание». Тогда у Человека — убегающего игрока, существует позиционная ε-стратегия, которая гарантирует ему уклонение от встречи со Львом, преследующим его, при $t \ge 0$.

## 2. Формулировки основной теоремы

Далее игра (1) считается завершенной, если для некоторого заранее заданного $l > 0$ выполнено условие $\|x_0(T) - x_1(T)\| \le l$ в момент времени $T$. В таком случае считается, что игра завершена в смысле $l$ поимки [8, 10–12].

В этом разделе рассматривается игра «Лев и Человек» в смысле $l$-поимки, т.е. попадание в некоторой окрестности при наличии кругового препятствия [8], где без доказательства приведен следующий результат В.И. Левина: в игре (1) у игрока $L$ существует способ преследования, гарантирующий сближение с $M$ на любое наперед заданное расстояние $l > 0$ из любых начальных положений $L, M \in K_{kr}$. Доказательство этого факта не подтверждено. В данном доказательстве теоремы предложена структура построения кусочно-постоянного управления преследователя, которая обеспечит завершение игры за конечное время. Получена оценка, превышающая время игры, для завершения преследования. При этом для построения управления преследующего игрока нужна информация о состоянии убегающего в дискретные моменты времени.

*Определение 2.* Кусочно-постоянной $l$-стратегией преследующего игрока $x_1$ назовем такую измеримую по $t$ функцию $u_1(x_0(t_j), x_1(t_j))$, что $u_1(x_0(\tau), x_1(\tau)) = u_1(x_0(t_j), x_1(t_j))$ при $t_j \le \tau \le t_{j+1}$, где $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_j < \ldots \le T$.

**Теорема 2.** Предположим, что на плоскости $R_2$ на круге $K_{kr} = \{(x^1, x^2): (x^1)^2 + (x^2)^2 \le r^2, r > 0\}$ с радиусом $r$ рассматривается задача преследования–убегания в виде (1), (2). Тогда преследующий игрок завершает игру за время

$$T_{kr}(l) = \left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right] + 1\right) \cdot \frac{l}{4} + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{r^2 - \left(\frac{i\,l}{4}\right)^2} + 2r\right), \qquad (2)$$

где $l$ — число, заданное в условии теоремы $n = \left[\frac{4(r-l)}{l}\right] + 1$, $[m]$ — целая часть числа $m$.

 ISSN 0572-2691

*Доказательство*. По условию задач преследователь и убегающий двигаются в круге $K_{kr}$ на плоскости, максимальные скорости одинаковы и равны единице. В начале игры через центр круга, где находится преследующий игрок, проводим прямую, которая проходит через диаметр круга, и он разделяет круг на две одинаковые части. Теперь проводим вторую прямую через центр круга перпендикулярно первой прямой. Этими прямыми определим декартовую систему координат (направления осей, которые могут меняться по обстоятельствам) так, чтобы убегающий находился на первом или втором орктанте этой системы координат: $Ox^1$, $Ox^2$, $O$ — начало координат находится в центре круга $K_{kr}$, преследующий $x_1$ — на оси $Ox^1$.

Тогда между координатами преследующего и убегающего может иметь место следующее соотношение:

$$1)\ x_1^1 = x_0^1,\ \ 2)\ x_1^1 < x_0^1,\ \ 3)\ x_1^1 > x_0^1. \tag{3}$$

В случае 1) $x_1^1 = x_0^1$, направляя ось $Ox^2$ в сторону полукруга, где находится убегающий, преследующий будет двигаться в сторону убегающего, применяя управление $\tilde{u}_1(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^1(\mathrm{t}) \\ \tilde{u}_1^2(\mathrm{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ на расстояние $\left(\frac{l}{4}\right)$. Тогда уравнения (1) запишем

$$\dot{x}_1 = \tilde{u}_1, \tag{4}$$

имея в виду, что $x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$, управление преследующего $\tilde{u}_1(\mathrm{t}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, из (4) получим

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Решая уравнения (5) в следующих $x_1^1(0) = x_1^1,\ x_1^2(0) = 0$ начальных условиях, получаем соотношение

$$\begin{cases} x_1^1(\mathrm{t}) = x_1^1(0) + \int\limits_0^t 0 d\tau = x_1^1, \\ x_1^2(\mathrm{t}) = x_1^2(0) + \int\limits_0^t d\tau = t. \end{cases} \tag{6}$$

Из (6) следует, что за $t = \frac{l}{4}$ время у преследующего первая координата $x_1^1\left(\frac{l}{4}\right) = x_1^1$ не меняется, а вторая поднимается на расстояние $x_1^2\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l}{4}$.

Движения убегающего в это время со своими произвольно выбранными измеримыми управлениями $\tilde{u}_0(t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0^1(t) \\ \tilde{u}_0^2(t) \end{pmatrix}, \|\tilde{u}_0\| = \sqrt{(\tilde{u}_0^1)^2 + (\tilde{u}_0^2)^2} \le 1$, имеет вид (1)

$$\dot{x}_0 = \tilde{u}_0. \tag{7}$$

Поскольку $x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}$, управление убегающего $\tilde{u}_0(t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0^1(t) \\ \tilde{u}_0^2(t) \end{pmatrix}$, а начальные положения $x_0^1(0) = x_0^1, x_0^2(0) = x_0^2$ из (7) получим

$$\begin{cases} x_0^1(\mathrm{t}) = x_0^1(0) + \int\limits_0^t \tilde{u}_0^1(\tau)\,d\tau = x_0^1 + \int\limits_0^t \tilde{u}_0^1(\tau)\,d\tau, \\ x_0^2(\mathrm{t}) = x_0^2(0) + \int\limits_0^t \tilde{u}_0^2(\tau)\,d\tau = x_0^2 + \int\limits_0^t \tilde{u}_0^2(\tau)\,d\tau. \end{cases} \tag{8}$$

Отсюда с учетом $\|\tilde{u}_0\| = \sqrt{(\tilde{u}_0^1)^2 + (\tilde{u}_0^2)^2} \le 1$ из (8) получим неравенство

$$\|x_0(t) - x_0\| = \left\| \begin{pmatrix} x_0^1(t) - x_0^1 \\ x_0^2(t) - x_0^2 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \int\limits_0^t u_0(\tau)\,d\tau \right\| \le \left\| \int\limits_0^t \|u_0(\tau)\|\,d\tau \right\| = \left\| \int\limits_0^t \sqrt{(\tilde{u}_0^1(\tau))^2 + (\tilde{u}_0^2(\tau))^2}\,d\tau \right\| \le t. \tag{9}$$

Из (9) следует, что убегающий игрок за $t = \frac{l}{4}$ время не может уйти за пределы окружности радиуса $\left(\frac{l}{4}\right)$ от начального положения. Значит, убегающий за $t = \frac{l}{4}$ времени не может обойти преследующего игрока, т.е. он останется над преследующим. Но кусок круга, где находится убегающий, меньше начала координат, т.е. сегмент с высотой $h = r - \frac{l}{4}$. Начиная с момента $t = \frac{l}{4}$, если положение не меняется, т.е. $x_1^1 = x_0^1$, то преследующий повторяет ту же процедуру и т.д. Если с некоторого момента $x_1^1 \ne x_0^1$, то для текущих положений будет выполнен второй случай $x_1^1 < x_0^1$ или третий $x_1^1 > x_0^1$.

Во втором случае $x_1^1 < x_0^1$ преследующий игрок в положительном направлении (ось $Ox^1$), применяя управление $\bar{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^1(t) \\ \bar{u}_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, будет двигаться до тех пор, пока не произойдет первый случай $x_1^1 = x_0^1$, для нового начального положения. Тогда уравнение движения преследующего игрока будет иметь вид

$$\dot{x}_1 = \bar{u}_1. \tag{10}$$

Учитывая, что $\bar{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^1(t) \\ \bar{u}_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1^1(0) = x_1^1$; $x_1^2(0) = 0$, из (10) получим равенство

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1^1(t) = x_1^1(0) + \int\limits_0^t d\tau = x_1^1 + t, \\ x_1^2(t) = x_1^2(0) + \int\limits_0^t 0\,d\tau = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Теперь покажем, что для момента $t_0$ имеет место равенство $x_1^1(t_0) = x_0^1(t_0)$. Действительно, из равенства

$$x_0^1(t) = x_0^1 + \int_0^t \tilde{u}_0^1(\tau)\,d\tau = x_1^1 + t = x_1^1(t) \tag{12}$$

имеем $f(t) = \left( x_0^1 + \int_0^t \tilde{u}_0^1(\tau)\,d\tau \right) - (x_1^1 + t)$. Ясно, что функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[-r,\ r]$ и

$$f(-r) = x_0^1 - x_1^1 > 0,\ \ f(r) = \left( x_0^1 + \int_0^r \tilde{u}_0^1(\tau)\,d\tau \right) - (x_1^1 + r) < 0. \tag{13}$$

Значит, оно обращается в нуль в некоторой точке $-r < t = t_0 < r$, т.е. для некоторых начальных положений будет выполняться случай $x_1^1(t_0) = x_0^1(t_0)$. Далее, точно так же, как в случае $x_1^1 = x_0^1$, направляя ось $Ox^2$ в сторону полукруга, где находится убегающий, преследующий двигается в сторону убегающего, применяя управление $\tilde{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^1(t) \\ \tilde{u}_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ на расстояние $\left(\dfrac{l}{4}\right)$ и т.д.

В третьем случае $x_1^1 > x_0^1$ преследующий в отрицательном направлении (ось $Ox^1$), применяя управление $\bar{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^1(t) \\ \bar{u}_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, будет двигаться до тех пор, пока для нового начального положения не произошел первый случай $x_1^1 = x_0^1$. Тогда уравнение движения преследующего игрока будет иметь вид

$$\dot{x}_1 = \bar{u}_1. \tag{14}$$

Теперь, учитывая, что $\bar{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^1(t) \\ \bar{u}_1^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1^1(0) = x_1^1$; $x_1^2(0) = 0$, из (14) получим равенство (см. также (11))

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{cases} x_1^1(t) = x_1^1(0) + \int_0^t d\tau = x_1^1 - t, \\ x_1^2(t) = x_1^2(0) + \int_0^t 0\,d\tau = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Покажем, что существует такой момент $t_0$, когда имеет место равенство $x_1^1(t_0) = x_0^1(t_0)$. Действительно (15), из равенства

$$x_0^1(t) = x_0^1 + \int_0^t \tilde{u}_0^1(\tau)\,d\tau = x_1^1 - t = x_1^1(t)$$

имеем $f(t) = \left( x_0^1 + \int_0^t \tilde{u}_0^1(\tau)\,d\tau \right) - (x_1^1 - t)$. Ясно, что функция $f(t)$ непрерывна (12), (13) на отрезке $[-r,\ r]$ и

$$f(-r)=x_0^1-x_1^1<0,\ \ f(r)=\left(x_0^1+\int_0^r \tilde{u}_0^1(\tau)\,d\tau\right)-(x_1^1-r)>0.$$

Значит, оно обращается в нуль в некоторый точке $-r<t=t_0<r$, т.е. для некоторых начальных положений будет выполняться случай 1) $x_1^1(t_0)=x_0^1(t_0)$.

Далее точно так же, как и в первом случае, $x_1^1=x_0^1$, направляя ось $Ox^2$ в сторону полукруга, где находится убегающий, преследующий двигается в сторону убегающего, применяя управление $\tilde{u}_1(t)=\begin{pmatrix}\tilde{u}_1^1(t)\\ \tilde{u}_1^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ на расстояние $\left(\frac{l}{4}\right)$ и т.д.

Итак, во всех трех случаях, когда координаты $x^1$ игроков совпадают, преследующий движется по координате $x^2$ и приближается на расстояние $\left(\frac{l}{4}\right)$ с помощью управлений $\tilde{u}_1(t)=\begin{pmatrix}\tilde{u}_1^1(t)\\ \tilde{u}_1^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Итак, убегающий за время $t=\frac{l}{4}$ не может обойти преследующего. Значит, процедуру можно применять сколько угодно раз. Спустя некоторое время, число совпадений координаты $x^1$ игроков достигает $\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1$. Это значит, что преследующему не надо применять управление $\tilde{u}_1(t)=\begin{pmatrix}\tilde{u}_1^1(t)\\ \tilde{u}_1^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

В первом случае преследующий в положительном направлении (ось $Ox^1$), применяя управление $\bar{u}_1(t)=\begin{pmatrix}\bar{u}_1^1(t)\\ \bar{u}_1^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, завершает игру за время $t_2\left(n\,\frac{l}{4}\right)$. Во втором случае преследующий двигается в противоположном направлении (ось $Ox^1$), применяя управление $\bar{u}_1(t)=\begin{pmatrix}\bar{u}_1^1(t)\\ \bar{u}_1^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, завершает игру за время $t_2\left(n\,\frac{l}{4}\right)$. Таким образом, доказано, что при любом управлении убегающего преследующий заканчивает игру за конечное время.

При этом для построения управления преследующего игрока информации об управлении убегающего не требуется, нужно знать лишь положение убегающего в определенные моменты времени. Оно является существенным параметром при решении прикладных задач.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим отдельно случаи: а) преследующий игрок в начале игры находится на координатной оси $x^1$ и крайней точке круга (– $r$, 0); б) преследующий игрок в начале игры не находится в точке (– $r$, 0). В этом пункте будем получать оценки сверху для времени завершения преследования игры (1).

а). Пусть преследующий в начале игры находится на координатной оси $x^1$ и крайней точке круга $(-r,0)$, это соответствует первому случаю (3). Для того чтобы преследующий попал в $l$ окрестности убегающего игрока, ему нужно $T_{kr}(l)=T_1(l)+$ $+T_2(l)$ время. Здесь $T_1(l)$ — время, затраченное по оси $x^1$, а $T_2(l)$ — время, затраченное по оси $x^2$. Вычислим $T_1(l)$ и $T_2(l)$.

 ISSN 0572-2691

Для удобства сначала вычислим время $T_2(l)$. Чтобы преследующий полностью покрывал полукруг с радиусом $r$, он по оси $x^2$ должен приближаться к убегающему на расстояние $\left(\frac{l}{4}\right)$, $\left[\frac{(r-l)}{l/4}\right]+1=\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1$ раз. Ясно, что тогда время, затраченное по оси $x^2$, составит

$$T_2(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\frac{l}{4}. \tag{16}$$

Вычислим время $T_1(l)$. Определим его в виде

$$T_1(l)=t(0)+t\left(\frac{l}{4}\right)+\ldots+t\left((n-1)\ \frac{l}{4}\right)+t\left(n\ \frac{l}{4}\right)=\sum_{i=0}^{n}t_i. \tag{17}$$

Здесь $n=\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1.$ Также $t_i=t\left(i\ \frac{l}{4}\right), i=\overline{0,n},$ — затраченное время преследующего игрока за $i$-е приближение по оси $x^1$. Итак, $t_0=t(0)$ — затраченное время преследующего игрока во втором и третьем случаях — поймать проекцию убегающего на оси $x^1$, т.е. затраченное время преследующего игрока использовать для первого случая. Поскольку преследующий игрок находится на оси $x^1$, то

$$t_0=t(0)=x^1(0)-(-x^1(0))=2x^1(0). \tag{18}$$

Ясно, что $(x^1(-x^1(0)))^2+(x^2(-x^1(0)))^2=r^2$, значит, $x^1(0)=\sqrt{r^2-(x^2(0))^2}$, а $x^2(0)=0$, поэтому $x^1(0)=r$. Таким образом, получена оценка сверху для времени $t_0=t(0)$ (см. (18)): $t_2(0)=2x^1(0)=2r$. Значит, за это время преследующий игрок на оси $x^1$ располагается так, чтобы $x_1^1=x_0^1$, т.е. это первый случай (3). Теперь преследующий игрок, двигаясь по оси $x^2$ на расстоянии $\frac{l}{4}$, располагается на прямой $x^2=\frac{l}{4}$, параллельной оси $x^1$. Отсюда $x^1\left(\frac{l}{4}\right)=\sqrt{r^2-\left(\pm\frac{l}{4}\right)^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$. Значит, $t_1=t\left(\frac{l}{4}\right)=$ $=2x^1\left(\frac{l}{4}\right)=2\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2}$, как и раньше, за это время преследующий по прямой $x^2=\frac{l}{4}$ располагается так, чтобы $x_1^1=x_0^1$, т.е. это первый случай (3). Далее преследующий игрок, двигаясь по оси $x^2$ на расстоянии $\frac{l}{4}$, располагается по прямой $x^2=2\cdot\frac{l}{4}$, параллельной оси $x^1$ и так далее. На $i$-м приближении по оси $x^1$, $x^2\left(i\frac{l}{4}\right)=\frac{il}{4}$, $x^1\left(i\frac{l}{4}\right)=\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}$, значит, $t_i=t\left(i\frac{l}{4}\right)=2x^1\left(i\frac{l}{4}\right)=2\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}$.
Отсюда (17)

$$T_1(l)=\sum_{i=1}^{n}t_i+2r=\sum_{i=1}^{n}t\left(i\frac{l}{4}\right)+2r=2\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}+r\right). \tag{19}$$

Таким образом, суммируя оценки (16), (19) для $T_1(l)$ и $T_2(l)$, получаем соотношение

$$T_{kr}(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\sum_{i=1}^{n}t_i+2r=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+2\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}+r\right).$$

б). Пусть преследующий игрок в начале игры не находится в точке $(-r,0)$. Ясно, что в начале игры он находится в $K$. Поэтому за время $2r$ он может приходить в точку $(-r,0)$, так как расстояние между любыми двумя точками круга $K$ не больше $2r$. Тогда для завершения игры получим оценку

$$T_{kr}(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+2\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{r^2-\left(\frac{il}{4}\right)^2}+2r\right).$$

Теорема доказана.

### 3. Обобщение полученных результатов

**Теорема 3.** Предположим, что на плоскости $R^2$ в квадрате $K_{kv}=\{(x^1,x^2):$ $0\le x^1\le r, 0\le x^2\le r, r>0\}$ рассматривается задача преследования–убегания в смысле $l$-поимки. Тогда в игре (1) преследующий игрок завершает игру за время

$$T_{kv}(l)=\left(\left[\frac{4(2r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\left[\frac{4(2r-l)}{l}\right]2r+4r.$$

Пусть теперь $a_1=\sqrt{2}r$ — сторона вписанного, а $a_2=2r$ — сторона описанного квадрата круга: $K_{kr}=\{(x^1,x^2):(x^1)^2+(x^2)^2\le r^2,\ r>0\}$.

**Теорема 4.** Предположим, что на плоскости $R^2$ на круге $K_{kr}=\{(x^1,x^2):$ $(x^1)^2+(x^2)^2\le r^2,\ r>0\}$ рассматривается задача преследования–убегания в смысле $l$-поимки (1). Тогда для времени $T_{kr}(l)$ завершения преследования имеют место оценки

$$\frac{\left(\left[\frac{4(\sqrt{2}r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\left[\frac{4(\sqrt{2}r-l)}{l}\right]\sqrt{2}r+2\sqrt{2}r}{2}<T_{kr}(l),$$

$$T_{kr}(l)<\frac{\left(\left[\frac{4(2r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\left[\frac{4(2r-l)}{l}\right]2r+4r}{2}.$$

**Теорема 5.** Предположим, что на плоскости $R^2$ выпуклого множества $K$ рассматривается задача преследования–убегания в смысле $l$-поимки. Тогда в игре (1) преследующий игрок завершает игру за время

$$T(l)=\left(\left[\frac{4(2d-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+\left[\frac{4(2d-l)}{l}\right]2d+4d,$$

где $d$ — диаметр множеств $K$.


ISSN 0572-2691

*Определение 3.* Пусть $K$ — компактное подмножество $R^2$ и $\xi \in R^2$ — прямая, тогда, $\Omega = K \bigcap \xi$ называется сечением множества $K$.

*Определение 4.* Множество $K$ называется выпуклым по направлению вектора $e \notin \Omega$ относительно сечения $\Omega$, если для любых двух точек $x, y \in K$ из прямой $\eta$, параллельной $e$, проходящей через любые точки множества $\Omega$ и любого $\lambda \in [0,1]$, точка $\lambda x + (1-\lambda)y$ также принадлежит множеству $K$.

**Теорема 6.** Предположим, что на плоскости $R^2$ во множестве $K$, выпуклом по направлению вектора $e \notin \Omega$ относительно сечения $\Omega$, рассматривается задача преследования–убегания в смысле $l$-поимки. Тогда в игре (1) преследующий игрок завершает игру за время

$$T(l) = \left( \left[ \frac{4(2d-l)}{l} \right] + 1 \right) \cdot \frac{l}{4} + \left[ \frac{4(2d-l)}{l} \right] 2d + 4d.$$

Здесь $d = \max\{d_1, d_2\}$, где $d_1 = \max\{\|z\| : z = x - y,\, x, y \in \Omega\}$, $d_2 = \max\{\|z\| : z = = x - y,\, x, y \in \eta\}$.

## Заключение

Р.П. Иванов изучил дифференциальную игру преследования–убегания со многими участниками в [9]. Игра происходит в $n$-мерном евклидовом пространстве на компакте. Убегающий и преследователь имеют одинаковую максимальную скорость. Доказано, что если число преследующих игроков меньше $n$, то убегающий может избежать поимки, если число преследующих равно $n$, то можно завершить игру. Если $n = 2$, и в качестве компактного множества взять круг $K$, то для игры «Лев и Человек» ((1) теорема 1) следует как частный случай результата Р.П. Иванова. Отсюда получаем, если рассмотреть задачу точной поимки, можно избежать поимки. Если задача «Лев и Человек» рассматривается в смысле $l$-поимки, то результаты работы [9] неприменимы. На этот вопрос положительный ответ дает теорема 2. Теоремы 3–6 обобщают результаты теоремы 2.

Остается открытым вопрос о возможности рассмотрения формулировка неантагонистических игр преследования в указанных терминах. В частности, до сих пор открыта проблема нахождения стратегий в игре с одним преследователем и одним убегающим при условии, что игроки могут точно не знать местоположение друг друга на определенных этапах игры.

Игры преследования на плоскости можно использовать для создания широкого класса интеллектуальных компьютерных игр.

*М.Ш. Маматов, А.О. Зуннунов, Е.Е. Есонов*

## КІЛЬКІСНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ «ЛЕВ І ЛЮДИНА» ЗА НАЯВНОСТІ КРУГОВОЇ ПЕРЕШКОДИ

Розглянуто задачу «Лев і Людина» в сенсі $l$-упіймання, тобто потрапляння в деяку околицю за наявності кругової перешкоди. Запропоновано структуру побудови кусково-постійних управлінь переслідування, яка забезпечує завершення гри за кінцевий час. Отримано оцінку зверху для завершення переслідування.

**Ключові слова:** переслідування, ухиляння, переслідуючий гравець, гравець, який ухиляється, керування переслідуванням, керування ухилянням.

*M.Sh. Mamatov, A.O. Zunnunov, E.E. Esonov*

# QUANTITATIVE ANALYSIS OF THE PROBLEM OF LION AND MAN IN THE PRESENCE OF A CIRCULAR OBSTACLE

In this work, we consider the problem of Lion and Man in the sense of *l*-capture, i.e. hit some neighborhood in the presence of a circular obstacle. A structure is proposed for constructing piecewise-constant pursuit controls that ensure the completion of the game in a finite time. A top estimate of the time of the game to complete the pursuit.

**Keywords**: pursuer, evader, pursuit control, evasion control, pursuing player, escaping player.

1. McKunsay J.C. Introduction to the theory of games/ Nev York. Toronto. London McGraw-HILL Book Company, INC. 1952. 420 p.
2. Von Neumann J., Morgenstern O. Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, 1990. 666 p.
3. Isaacs R. Differential games: A mathematical theory with applications to warfare and pursuit. John Wiley. Sons, Inc., New York, 1965. 480 p.
4. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math.* USSR-Sb., 40:3 1981. P. 285–303.
5. Mishchenko E.F., Nikol'skii M.S., Satimov N.Yu. The problem of avoiding encounter in n-person differential games. *Proc. Steklov Inst. Math.* 1980. **143**. P. 111–136.
6. Satimov, N.Yu., Mamatov, M.Sh. The Pursuit-Evasion problem in differential games between the groups of pursuers and evaders. *Diff. Uravn.* 1990. **26**, N 9. P. 1541–1551.
7. Littlewood J.E. A mathematician's miscellany. London: Methuen, 1953. 140 p.
8. Петросян Л.А., Рихсиев Б.Б. Преследование на плоскости. серия «Популярные лекции по математике», М. : Наука, 1991. вып. 61. 96 с.
9. Иванов Р.П. Простое преследование–убегание на компакте. *Докл. АН СССР.* 1980. **254**, № 6. С. 1318–1321.
10. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений. *Докл. АН СССР*. 1981. 259:4. С. 785–789.
11. Чикрий А.А., Шишкина Н.Б. О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений. *Автомат. и телемех.* 1985. № 2. С. 59–68.
12. Маматов М.Ш., Зуннунов А.О. Задача преследования в простых дифференциальных играх в квадрате. *Научный вестник СамГУ*. Самарканд, 2019. № 1. С. 20–26.
13. Alonso L., Goldstein A.S., Reingold E.M. Lion and Man: Upper and lower bounds. *ORSA Journal of Computing*. 1992. **4**, N 4. P. 447–452.
14. Sgall J.A Solution of David Gale's Lion and Man Problem. *Theoretic Computer. Sci.* 2001. N 259. P. 663–670.
15. Bollobas B., Leader I., Walters M. Lion and man – can both win? *Israel Journal of Mathematics.* 2012. **189**, N 1. P. 267–286.

*Получено 07.09.2019*