УДК 517.97

И.М. Исканаджиев

ПЕРВЫЙ ПРЯМОЙ МЕТОД ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Ключевые слова: дифференциальная игра, дифференциальное включение, стратегия, преследователь, убегающий, преследование, допустимое управление, интеграл, разбиение, многозначное отображение, приближенные формулы.

Прямые методы Понтрягина играют важную роль при решении задачи преследования в линейных дифференциальных играх [1–25].

В настоящей работе доказаны необходимость и достаточность интеграла первого прямого метода для завершения игры в фиксированном моменте времени и изучаются его аппроксимативные свойства для игр преследования, описываемых дифференциальными включениями вида $\dot{z} \in -F(t, v),$ где F — непрерывное компактнозначное отображение [2] . Типичный источник таких систем — квазилинейная дифференциальная игра $\dot{z} = Cz - f(u, v), u \in P, v \in Q,$ которая практически равносильна дифференциальному включению $\dot{z}(t) \in -\exp(tC)\, f(P, v).$

Используем следующие обозначения: $I = [0, \tau]$ — фиксированный отрезок времени, Δ — подотрезок $I,$ $|\Delta|$ — длина отрезка $\Delta,$ $cl(R^d)$ (соответственно $cmp(R^d)$ — семейство всех непустых замкнутых (компактных) подмножеств $R^d.$ Если множество выпукло, то пишем $cocl(R^d)$ (соответственно $cocmp(R^d)$). $H = \{x \in R^d \,|\, |x| \le 1\}$ — единичный замкнутый шар в $R^d;$ $h(A, B) = \min\{r > 0 \,|\, A \subset B + rH, B \subset A + rH\}$ для $A, B \in cl(R^d),$ $\omega = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = \tau\}$ — разбиение отрезка $I;$ I — совокупность всех разбиений отрезка $I;$ $\Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i];$ $\delta_i = |\Delta_i|;$ $|\omega| = \max\limits_{1 \le i \le n} \delta_i$ — диаметр разбиения $\omega;$ $\int_i$ — интеграл по отрезку $\Delta_i.$ Если A — подмножество евклидового пространства, то $A[\Delta]$ — совокупность всех измеримых функций $a(\cdot): \Delta \to A.$ В случае $\Delta = [\alpha, \beta]$ пишем $A[\alpha, \beta].$

Рассматривается управляемая система

$$\dot{z} \in -F(t, v), \tag{1}$$

где $z \in R^d, v \in Q \in cmp(R^d), t \in I, F: I \times Q \to cocmp(R^d)$ — непрерывное отображение.

Совокупность всех абсолютно-непрерывных функций $z(\cdot): J \to R^d$ обозначим $ACJ.$

Каждую функцию $v(\cdot) \in Q(I)$ будем называть допустимым управлением убегающего. Предположим, что определен класс P и отображение $\Gamma: R^d \times P \times Q(I) \to AC(I),$ ставящее каждой тройке $\xi \in R^d, U \in P, v(\cdot) \in Q(I)$ в соответствие функцию $z(\cdot) \in AC(I),$ такую, что $z(0) = \xi, \dot{z} \in F(t, v(t)), v(\cdot) \in Q(I).$

Элементы P называются стратегиями преследователя, а отображение Γ — совокупность всех допустимых траекторий.

Определение. Будем говорить, что из точки $\xi \in R^d$ можно завершить преследование (м.з.п.) за время τ (в момент времени τ) в классе стратегий P, если существует стратегия преследователя $U \in P$ при любом $v(\cdot) \in Q(I)$ для траекторий $z(t, \xi, U, v(\cdot)) \in \Gamma(\xi, U, v(\cdot))$, соответствующих тройке $\xi, U, v(\cdot)$, имеет место включение $z(t_*, \xi, U, v(\cdot)) \in M$ $(z(\tau) \in M)$ при некотором $t_* \in I$.

Пусть $P_B = \{U\}$ — совокупность всех борелевских измеримых сечений $U: I \times Q \to R^d$ отображений $F(t, v)$ на отрезке I. Элементы U из класса P_B называются стробоскопическими стратегиями преследователя. Для каждой точки $\xi \in R^d$, стратегия преследователя $U \in P_B$ и допустимого управления убегающего $v(\cdot) \in Q(I)$ ставит в соответствие функцию $z(\cdot) \in AC(I)$, определяемую формулой

$$z(t) = \xi - \int_0^t w(t)\, dt, \text{ где } w(t) = U(t, v(t)).$$

Интегралом от измеримого многозначного отображения $X(\cdot): [\alpha, \beta] \to cl(R^d)$ называется совокупность всех интегралов $\int_\alpha^\beta x(t)\, dt$ от интегрируемых однозначных сечений $x(\cdot): [\alpha, \beta] \to R^d$ отображений $X(t)$, т.е.

$$\int_\alpha^\beta X(t)\, dt = \left\{ \int_\alpha^\beta x(t)\, dt \,\middle|\, x(t) \in X(t) \text{ п.в. } t \in [\alpha, \beta] \right\}.$$

Пусть $W^\tau = M + \int_0^\tau \bigcap_{v \in Q} F(t, v)\, dt.$

Теорема 1. Пусть $z_0 \in W^\tau$. Тогда из точки z_0 м.з.п. за время τ в классе стратегий P_B в игре (1) (см. также [1, 3, 6–10]).

Теорема доказывается по стандартной схеме.

Пусть ω — произвольное разбиение из Ω. Положим $F_i = \bigcap_{v \in Q} \int_i F(t, v)\, dt,$

$$F(\omega) = \sum_{i=1}^n F_i,\ F^\tau = \bigcap_{\omega \in \Omega} F(\omega).$$

Пусть $\gamma(\delta) = \min\{h[F(t_1, v_1), F(t_2, v_2)], |t_1 - t_2| < \delta, |v_1 - v_2| < \delta\}$ — модуль непрерывности отображения $F(t, v)$.

Лемма 1. Если $\xi \in \Delta \subset I$ и $v \in Q$, то

$$h\left[\int_\Delta F(t, v)\, dt, \delta F(\xi, v) \right] < \delta\gamma(\delta), \delta = |\Delta|. \tag{2}$$

Доказательство. Действительно, в силу определения модуля непрерывности отображений $F(t, v)$ для $\xi \in \Delta, t \in \Delta$ имеем $F(t, v) \subset F(\xi, v) + \gamma(\delta) H$. Интегрируя обе части этого включения, приходим к соотношению $\int_\Delta F(t, v\}\, dt \subset \delta F(\xi, v) + {}$ $+ \delta\gamma(\delta) H$. Здесь учтено $\int_\Delta A dt = \Delta coA$. Аналогично устанавливается следующее включение $\delta F(\xi, v) \subset \int_\Delta F(t, v)\, dt + \delta\gamma(\delta) H$.

Лемма доказана.

ISSN 0572-2691

Теорема 2. Справедливо равенство

$$\int_{\Delta} \bigcap_{v\in Q} F(t, v)\, dt = F^{\tau}.$$

Доказательство. Пусть ω — произвольное разбиение из Ω. Из свойства аддитивности интеграла многозначного отображения [4] следует

$$\int_{\Delta} \bigcap_{v\in Q} F(t,v)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{i} \bigcap_{v\in Q} F(t, v)\, dt.$$

Легко проверить справедливость включения

$$\int_{i} \bigcap_{v\in Q} F(t, v)\, dt \subset \bigcap_{v\in Q} \int_{i} F(t, v)\, dt.$$

Суммируя обе части включения, приходим к соотношению

$$\int_{0}^{\tau} \bigcap_{v\in Q} F(t, v)\, dt \subset \sum_{i=1}^{n} \bigcap_{v\in q} dt \int_{i} F(t, v), \text{ т.е.}$$

$$\int_{0}^{\tau} \bigcap_{v\in Q} F(t, v)\, dt \subset F(\omega).$$

В силу произвольности $\omega \in \Omega$ следует

$$\int_{0}^{\tau} \bigcap_{v\in Q} F(t, v)\, dt \subset F^{\tau}.$$

Теперь докажем обратное включение. Пусть $x \in F^{\tau}$. Тогда $x \in F(\omega)$ для произвольного $\omega \in \Omega$, т.е.

$$x \in \sum_{i=1}^{n} \bigcap_{v\in Q} \int_{i} F(t, v)\, dt.$$

Отсюда получим $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, где $x_i \in \bigcap_{v\in Q} \int_{i} F(t, v)\, dt$. Более того, $x_i \in \int_{i} F(t, v)\, dt$ для любого $v \in Q$.

В силу (2) имеем $\int_{i} F(t, v)\, dt \subset \delta_i F(\xi_i, v) + \delta_i \gamma(\delta_i) H$ для любого $v \in Q$, где $\xi_i \in \Delta_i$. Отсюда следует, что $x_i \in \bigcap_{v\in Q} [\delta_i F(\xi_i, v) + \delta_i \gamma(\delta_i) H]$.

Легко убедиться в справедливости равенства

$$\bigcap_{v\in Q} [\delta_i F(\xi_i, v) + \delta_i \gamma(\delta_i) H] = \delta_i \bigcap_{v\in Q} [F(\xi_i, v) + \gamma(\delta_i) H],$$

поэтому $x_i \in \delta_i \bigcap_{v\in Q} [F(\xi_i, v) + \gamma(\delta_i) H]$.

Из определения модуля непрерывности следует

$$\bigcap_{v\in Q} [F(\xi_i, v) + \gamma(\delta_i) H] \subset \bigcap_{v\in Q} [F(t, v) + 2\gamma(|\omega|) H]$$

для любого $t \in \Delta_i$. Здесь учтено $\gamma(\delta_i) \le \gamma(|\omega|)$.

Интегрируя это соотношение по отрезку Δ_i, получаем

$$x_i \in \int_{i} \bigcap_{v\in Q} [F(t, v) + 2\gamma(|\omega|) H]\, dt.$$

Следовательно,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \in \int_{0}^{\tau} \bigcap_{v\in Q} [F(t, v) + 2\gamma(|\omega|) H]\, dt.$$

В силу произвольности $\omega \in \Omega$ имеем

$$x \in \bigcap_{\omega\in\Omega} \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} [F(t,v) + 2\gamma(|\omega|)H]\,dt.$$

Теперь остается доказать, что

$$\bigcap_{\omega\in\Omega} \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} [F(t,v) + 2\gamma(|\omega|)H]\,dt = \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} F(t,v)\,dt. \tag{3}$$

Из (3) с учетом свойства модуля непрерывности получим

$$\lim_{|\omega|\to 0} \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} [F(t,v) + 2\gamma(|\omega|)H]\,dt = \bigcap_{\omega\in\Omega} \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} [F(t,v) + 2\gamma(|\omega|)H]\,dt.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\lim_{|\omega|\to 0} \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} [F(t,v) + 2\gamma(|\omega|)H]\,dt = \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} F(t,v)\,dt,$$

так как $F(t,v) + 2\gamma(|\omega|)H \to F(t,v)$ сверху при $|\omega| \to 0$. В силу полунепрерывности сверху операции пересечения получим

$$\bigcap_{v\in Q} [F(t,v) + 2\gamma(|\omega|)H] \to \bigcap_{v\in Q} F(t,v). \tag{4}$$

Непрерывность отображения $F(t,v)$ на ограниченном $I \times Q$-множестве влечет ограничения отображения $F(t,v)$ на этом множестве. Поэтому к соотношению (4) можно применить теоремы Лебега о предельном переходе под знак интеграла [4]. В силу этого

$$\int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} [F(t,v) + 2\gamma(|\omega|)H]\,dt \to \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} F(t,v)\,dt.$$

Теорема доказана.

Определение. Пусть отображение $U : I \times Q \to R^d$ для каждого разбиения $\omega \in \Omega$ и для любой функции $v_i(\cdot) \in Q(\Delta_i)$ ставит в соответствие борелевское измеримое сечение $f_i(t, v_i(t))$ отображений $F(t, v_i(t))$ на отрезке Δ_i и удовлетворяет условию

$$U(\cdot, v_1(\cdot))\big|_{\Delta_1} = U(\cdot, v_2(\cdot))\big|_{\Delta_1} \text{ для любых } v_1(\cdot)\big|_{\Delta_1} = v_2(\cdot)\big|_{\Delta_2}.$$

Такое отображение назовем почти стробоскопическими стратегиями преследователя. Семейство всех почти стробоскопических стратегий преследователя обозначим $\hat{P}_B$.

Пусть M — линейное подпространство R^d, L — его ортогональное дополнение в R^d, π — оператор ортогонального проектирования из R^d на L и $\omega \in \Omega$. Положим

$$F_i = \bigcap_{v(\cdot)\in Q(\Delta_i)} \int_i \pi F(t, v(t))\,dt,\; F(\omega) = \sum_{i=1}^n F_i,\;\; W^F = \bigcap_{\omega\in\Omega} F(\omega).$$

Теорема 3. Для того чтобы в игре (1) завершить преследование в момент времени τ в классе $\hat{P}_B$ почти стробоскопических стратегий, необходимо и достаточно, чтобы $\pi z_0 \in W^F$.

 ISSN 0572-2691

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть стратегия $U \in \hat{P}_B$ заканчивает игру в момент времени τ, т.е. $\pi z(\tau, U, v(\cdot)) = 0$ при любом $v(\cdot) \in Q(I)$. Пусть $\omega \in \Omega$ и $v(\cdot) \in Q(I)$ произвольные. Тогда $\pi z_0 - \int_0^\tau U(t, v(t))\,dt = 0.$ Иначе

$$\pi z_0 - \sum_{i=1}^{n} \int_i U(t, v_i(t))\,dt = 0, \tag{5}$$

где $v_i(t) = v(t)$ при $t \in \Delta_i$. Равенство перепишем в следующем виде:

$$\pi z_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \int_i U(t, v_i(t))\,dt = \int_n U(t, v_n(t))\,dt.$$

В силу произвольности функции $v(\cdot) \in Q(I)$ и при замене ее значения на $t \in \Delta_n$ получим

$$\pi z_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \int_i U(t, v_i(t))\,dt = \bigcap_{v(\cdot)\in Q(\Delta_n)} \int_n \pi F(t, v(t))\,dt.$$

Повторяя этот процесс $n-1$ раз, приходим к соотношению $\pi z_0 \in F(\omega)$. В силу произвольности разбиения $\omega \in \Omega$ имеем $\pi z_0 \in \bigcap_{\omega\in\Omega} F(\omega) = W^F$.

Теперь докажем достаточность условия $\pi z_0 \in W^F$ для завершения игры в классе $\hat{P}_B$. Отсюда следует $\pi z_0 \in F(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. Имеем $\pi z_0 \in \sum_{i=1}^{n} z_i$, где $z_i \in \bigcap_{v(\cdot)\in Q(\Delta_i)} \int_i \pi F(t, v(t))\,dt.$ Итак, $z_i = \int_i \pi F(t, v_i(t))\,dt$ для любой $v_i(\cdot) \in Q(\Delta_i)$.

Тогда в силу непрерывности $F(t, v)$ следует, что существует $f_i(t, v_i(t))$ борелевское измеримое сечение отображений $\pi F(t, v_i(t))$ на Δ_i такое, что

$$z_i = \int_i f(t, v_i(t))\,dt.$$

Определим функцию $v(\cdot) \in Q(I)$, положив $v(t) = v_i(t)$ при $t \in \Delta_i$ и определим отображение $U(t, v(t))$ на отрезке $t \in I$ таким образом: $U(t, v(t)) = U(t, v_i(t)) = f_i(t, v_i(t))$ на любом отрезке $t \in \Delta_i$. Очевидно, что $U(\cdot, v(\cdot)) \in \hat{P}_B$. Отсюда следует

$$\pi z_0 = \int_0^\tau U(t, v(t))\,dt. \tag{6}$$

Теперь определим траекторию $\pi z(t, z_0, U, v(\cdot))$ системы (1), соответствующую начальной точке z_0, допустимому управлению $v(\cdot) \in Q(I)$ убегающего и стратегии $U(\cdot, v(\cdot))$ преследователя:

$$\pi z(t) = \pi z_0 - \int_0^t U(s, v(s))\,ds.$$

В силу условия (6) получим $\pi z(\tau) = 0$. Это означает, что в игре (1) из точки z_0 можно завершить преследование в момент времени τ в классе стратегий $\hat{P}_B$.

Теорема 4. Для того чтобы в игре (1) из точки z_0 завершить преследование в момент времени τ в классе P_B стробоскопических стратегий, необходимо и достаточно, чтобы

$$\pi z_0 \in W^1 = \int_0^\tau \bigcap_{v\in Q} \pi F(t, v)\,dt. \tag{7}$$

Доказательство. Достаточность условия (7) следует из теоремы 1. Докажем необходимость условия (7) для завершения преследования в классе стратегий P_B. Пусть для любого $v(\cdot)\in Q(I)$ существует стратегия преследователя $U\in P_B$, которая из z_0 точки завершит преследование в момент времени τ. Поскольку каждая стробоскопическая стратегия является почти стробоскопической, из теоремы 3 следует, что $\pi z_0 \in W^F$. Из теоремы 2 $\pi z_0 \in W^1$.

Примечание 1. Отметим, что теоремы 3, 4 обобщают результаты работы [4] на класс игры (1).

Перейдем к изучению аппроксимативных свойств интеграла W^F.

Теорема 5. Для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon)$ такое, что при всех $\omega\in\Omega$ которое $|\omega<\delta|$, выполняется неравенство $h[W^F,\ F(\omega)]<\varepsilon$.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 2.

Пусть $\omega_n=\{0,\delta,\dots,(n-1)\delta,\, n\delta=\tau\}$ — произвольное равномерное разбиение отрезка I.

Теорема 6. Имеет место равенство $W^F=\bigcap_{\omega_n\in\Omega}F(\omega_n)$.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 2.

Следствие 1. Для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число $N=N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n>N$ выполняется неравенство.

Пусть ω_n — равномерное разбиение отрезка I. Определим множество

$$\tilde{F}_i=\bigcap_{v\in Q}[F(\xi_i,v)+\delta\gamma(\delta)H],\ \tilde{F}(\omega_n)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{F}_i. \tag{8}$$

Теорема 7. Справедливо равенство $W^F=\bigcap_{\omega_n\in\Omega}\tilde{F}(\omega_n)$.

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы 2.

Следствие 2. Для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число $N=N(\varepsilon)$, такое, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $h[W^F,\ F(\omega_n)]<\varepsilon$.

Отметим, что последовательность множеств $\tilde{F}(\omega_n)$ аппроксимирует интеграл W^F сверху, т.е. $W^F\subset\tilde{F}(\omega_n)$ для любого $\omega_n\in\Omega$. При этом в каждой слагаемой $\tilde{F}_i=\bigcap_{v\in Q}[F(\xi_i,v)+\delta\gamma(\delta)H]$ имеется $\delta\gamma(\delta)H$.

Естественно, возникает следующий вопрос: можно ли вычислить множество $\tilde{F}(\omega_n)$ без слагаемого $\delta\gamma(\delta)H$. Оказывается, слагаемое $\delta\gamma(\delta)H$ в формулах (8) имеет существенное значение. Приведем пример.

Пример 1. $F(t,v)=\exp(tC)[P-v]$, где $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $v\in Q=[(0;-1),(0,1)]$ — отрезок в R^2, $P=\{(z_1,z_2)\,\big|\,|z_1|\le 1,|z_2|\le 1\}$ — квадрат в R^2, $\tau=\pi$.

По определению

$$\int_0^{\pi}\bigcap_{v\in Q}F(t,v)\,dt=\int_0^{\pi}\bigcap_{v\in Q}\exp(tC)[P-v]\,dt=\int_0^{\pi}\exp(tC)\,I\,dt,$$

где $I=\mathrm{co}\{(-1;0),(1;0)\}$ — отрезок в R^2. Отметим, что $\exp(tC)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

Вычислим интеграл [5]

$$\int_0^{\pi} \exp(tC)\, I\, dt = 2H, \tag{9}$$

где $H = \{z \in R^2 \,\big|\, |z| \le 1\}$ — единичный замкнутый круг в R^2.

Пусть $\tilde{F}^0(\omega)$ и $W^0 = \bigcap_{\omega_n \in \Omega} \tilde{F}^0(\omega)$ обозначают приближенные суммы и интеграл, построенный без добавления слагаемого $\delta\gamma(\delta)H$ и $\omega = \left\{0 < \frac{\pi}{2} < \pi\right\}$. Положим $\xi_1 = \frac{\pi}{4}, \xi_2 = \frac{3\pi}{4}.$ Вычислим $\tilde{F}(\omega) = \sum_{i=1}^{2} \tilde{F}_i = \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2,$ где $\tilde{F}_1 = \bigcap_{v \in Q} \exp\left(\frac{\pi}{4} C\right) \times$ $\times [P - v]\frac{\pi}{2},$ $\tilde{F}_2 = \bigcap_{v \in Q} \exp\left(\frac{3\pi}{4} C\right)[P - v]\frac{\pi}{2}.$ Отсюда следует

$$\tilde{F}_1 = \mathrm{co}\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\},$$

$$\tilde{F}_2 = \mathrm{co}\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Отсюда следует $\tilde{F}(\omega)$ квадрат в R^2, т.е.

$$\tilde{F}(\omega) = \mathrm{co}\left\{\left(0; \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}; 0\right), \left(0; -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}; 0\right)\right\}.$$

Поэтому в силу (9) получим $W^0 = \bigcap_{\omega_n \in \Omega} \tilde{F}^0(\omega) \ne W^F.$

Пусть $F(t, v) = \exp(tC)\, f(P, v), P \in cmp(R^p), v \in Q$ и $f : P \times Q \to cocmp\,(R^d)$ — непрерывно. Положим

$$W^F = \int_0^{\tau} \bigcap_{v \in Q} \exp(tC)\, f(P, v)\, dt, \quad \bar{F}_i = \bigcap_{v \in Q} \int_i \exp(tC)\, dt\, f(P, v), \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i.$$

Лемма 2. Для любого $\omega \in \Omega$ имеет место включение $\bar{F}(\omega) \subset W^F.$

Доказательство. Пусть ω — произвольное разбиение из Ω. Для этого разбиения образуем интегралы

$$\bar{F}_i = \bigcap_{v \in Q} \int_i \exp(tC)\, dt\, f(P, v), \quad W_i^F = \int_i \bigcap_{v \in Q} \exp(tC)\, f(P, v)\, dt.$$

Нетрудно убедиться, что $\bar{F}_i \subset W_i^F.$ Добавляя это включение в обе части, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \subset \sum_{i=1}^{n} W_i^F \;\text{ т.е. }\; \bar{F}(\omega) \subset W^F.$$

Следствие 3. $\bigcup_{\omega \in \Omega} \bar{F}(\omega) \subset W^F.$

Отметим, что множество $\bar{F}(\omega)$ монотонно возрастает при измельчении разбиения ω и аппроксимирует интеграл W^F снизу.

Пример 2. Пусть отображение $F(t, v)$, матрица C, множества P и Q, число τ, как в примере 1, и разбиения $\omega_1 = \{0, \pi\}, \omega_2 = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$. Как и в примере 1, определим

$$W^F = \int_0^\pi \exp(tC) I\,dt = 2H, \text{ где } I = \mathrm{co}\{(-1; 0), (1; 0)\}.$$

Вычислим интеграл $\overline{F}(\omega_1) = \int_0^\pi \exp(tC)\,dt I = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} I = \mathrm{co}\{(0; -2), (0; 2)\}$.

Аналогично вычислим

$$\overline{F}(\omega_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(tC)\,dt I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \exp(tC)\,dt I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} I + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} I =$$

$$= \mathrm{co}\{(-1; -1), (1; 1)\} + \mathrm{co}\{(-1; 1), (1; -1)\} = \mathrm{co}\{(0; -2), (2-2; 0), (0; 2), (-2; 0)\}.$$

Отсюда $\overline{F}(\omega_1) \subset \overline{F}(\omega_2) \subset W^F$. Непосредственно проверяется справедливость следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ и $\omega_1 \subset \omega_2$. Тогда $\overline{F}(\omega_1) \subset \overline{F}(\omega_2)$.

Следствие 4. Пусть $\{\omega_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность разбиений из Ω. Тогда имеет место равенство $\bigcup_{\omega_n \in \Omega} \overline{F}(\omega_n) = \bigcup_{\omega \in \Omega} \overline{F}(\omega)$.

Пусть $\gamma(\delta) = \max\{|C(t_1) - C(t_1)|, |t_1 - t_2| \le \delta, t_1, t_2 \in I\}$, где $|\,|$ — норма матрицы. Очевидно, что $\gamma(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0, \gamma(0) = 0$. Положим $W_i = \int_i \exp(tC)\, f(P, v)\,dt$, $\hat{F} = \int_i \exp(tC)\,dt\, f(P, v)$.

Теорема 8. Справедлива оценка

$$h[W_i, \hat{F}_i] \le L\delta_i^2, \quad (10$$

где $L = 2|C|\exp(2\tau|C|)|f|, |f| = \max_{v \in Q} |f(P, v)|$.

Доказательство. Очевидно, что $\hat{F}_i \subset W_i$. Пусть ξ_i — произвольная точка из отрезка Δ_i. Тогда имеет место неравенство

$$h[W_i, \hat{F}] \le h[W_i, \delta_i \exp(\xi_i C) f(P, v)] + h[\delta_i \exp(\xi_i C)\, f(P, v), \hat{F}_i]. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что

$$h[W_i, \delta_i \exp(\xi_i C)\, f(P, v)] \le \delta_i \gamma(\delta_i) |f|. \quad (12)$$

Оценим второе слагаемое в соотношении (11), воспользовавшись равенством

$$\int_i \exp(\xi_i C)\,dt = \int_i \exp(tC)\,dt + \int_i (\exp(\xi_i C) - \exp(tC))\,dt. \quad (13)$$

Отсюда имеем

$$\int_i \exp(\xi_i C)\,dt\, f(P, v) \subset \int_i \exp(tC)\,dt\, f(P, v) +$$

$$+\left|\int_i (\exp(\xi_i C)-\exp(tC))\,dt\right|\left|f(P,v)\right|H.$$

Более того,

$$\delta_i \exp(\xi_i C)\, f(P,v)\subset \int_i \exp(tC)\,dt\, f(P,v)+\delta_i\gamma(\delta_i)\left|f\right|H$$

т.е.

$$\delta_i \exp(\xi_i C)\, f(P,v)\subset \hat{F}_i+\delta_i\gamma(\delta_i)\left|f\right|H.$$

С помощью равенства, аналогичного (13), получаем

$$\hat{F}_i=\int_i \exp(tC)\,dt\, f(P,v)\subset \int_i \exp(\xi_i C)\,dt\, f(P,v)+$$

$$+\int_i (\exp(tC)-\exp(\xi_i C))\,dt\, f(P,v).$$

Следовательно, $\hat{F}_i\subset \delta_i \exp(\xi_i C)\, f(P,v)+\delta_i\gamma(\delta_i)\left|f\right|H.$

Отсюда

$$h[\delta_i \exp(\xi_i C)\, f(P,v),\hat{F}_i]\le \delta_i\gamma(\delta_i)\left|f\right|H. \tag{14}$$

Суммируя неравенства (12), (14), в силу (11) получим неравенство (10). При этом учитывается оценка $\gamma(\delta_i)\le 2\delta_i\left|C\right|\exp(2\tau\left|C\right|)$.

Пусть теперь

$$W^F=\int_0^\tau \bigcap_{v\in Q}\exp(tC)\, f(P,v)\,dt \text{ и } \overline{F}_i=\bigcap_{v\in Q}\int_i \exp(tC)\,dt\, f(P,v).$$

Теорема 9. Справедлива оценка $h[W_i,\overline{F}]\le L\delta_i^2$, где $L=2\left|C\right|\exp(2\tau\left|C\right|)\left|f\right|$, $\left|f\right|=\max_{v\in Q}\left|f(P,v)\right|$.

Доказательство теоремы 9 аналогично доказательству теоремы 8.

Пусть ω — произвольное разбиение из Ω. Положим $\overline{F}(\omega)=\sum_{i=1}^{n} F_i$ и $\delta=\max_{1\le i\le n}\delta_i$.

Следствие 5. Справедлива оценка

$$h[W^F,\ \overline{F}(\omega)]\le L\delta,$$

где $L=2\left|C\right|\exp(2\tau\left|C\right|)\left|f\right|, \left|f\right|=\max_{v\in Q}\left|f(P,v)\right|$.

Отсюда, учитывая следствие 4, получаем следующую теорему.

Теорема 10. Имеет место равенство $\mathrm{cl}\{\bigcup_{\omega_n\in\Omega}\overline{F}(\omega_n)\}=W^F.$

Пусть $\omega\in\Omega$. Положим

$$\breve{F}_i=\bigcap_{v\in Q}\int_i \exp(tC)\,dt[\, f(P,v)+\delta_i\gamma(\delta_i)\left|f\right|H]=$$

$$=\int_i \exp(tC)\,dt\bigcap_{v\in Q}[\, f(P,v)+\delta_i\gamma(\delta_i)\left|f\right|H] \text{ и } \breve{F}(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\breve{F}_i.$$

Теорема 11. Справедливо равенство $W^F=\bigcap_{\omega\in\Omega}\breve{F}(\omega).$

Доказательство теоремы 11 аналогично доказательству теоремы 2.

Пусть $Q \in cmp(R^d), \Phi : Q \to cocmp(R^d)$ — непрерывное отображение и $\gamma(\delta) = \max[h[\Phi_1), \Phi(v_2)], |v_1 - v_2| \le \delta, v_1, v_2 \in Q]$.

Лемма 4. Пусть Q_1, Q_2 — компактные подмножества Q и $h[Q_1, Q_2] \le \delta$. Тогда $\bigcap_{v \in Q_1} \Phi(v) \subset \bigcap_{v \in Q_2} [\Phi(v) + \gamma(\delta) H]$.

Доказательство. Пусть v_2 — произвольный элемент множества Q_2. Поскольку $Q_2 \subset Q_1 + \delta H$, существует $v_1 \in Q_1$, такое, что $|v_1 - v_2| \le \delta$. Тогда $\Phi(v_1) \subset \Phi(v_2) + \gamma(\delta) H$. Отсюда получим $\bigcap_{v \in Q_1} \Phi(v) \subset \Phi(v_2) + \gamma(\delta) H]$.

В силу произвольности $v_2 \in Q_2$ имеем $\bigcap_{v \in Q_1} \Phi(v) \subset \bigcap_{v \in Q_2} [\Phi(v) + \gamma(\delta) H]$.

Рассмотрим, как себя ведет интеграл W^τ при маленьких изменениях исходных данных игры (1). Оказывается, что интеграл W^τ полуустойчив при односторонних возмущениях исходных данных игры (1), хотя это невыгодно преследователю.

Пусть даны последовательности компактных подмножеств $Q_k \in cmp(R^d)$, замкнутых подмножеств $M_k \in \mathrm{cl}(R^d)$, непрерывных отображений $F_k : Q \to cocmp(R^d)$ и неотрицательных чисел $\tau_k, k \in N^+$. Будем предполагать выполненными следующие условия.

1. Последовательность $M_k \in \mathrm{cl}(R^d)$, монотонно убывая, сходится к замкнутому множеству $M \in \mathrm{cl}(R^d)$, т.е. $M \subset \ldots \subset M_{k+1} \subset M_k \subset \ldots \subset M_2 \subset M_1$, все величины $\alpha_k = \min\{r \ge 0 | M_k \subset M + rH, M \subset M_k + rH\}$ конечны и $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$.

2. Последовательность $Q_k \in cmp(R^d)$, монотонно возрастая, сходится к компакту $Q \in cmp(R^d)$, т.е. $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_k \subset Q_{k+1} \subset \ldots \subset Q$ и $\beta_k = h[Q, Q_k] \to 0$ при $k \to \infty$.

3. Последовательность $F_k(t, v)$ монотонно убывает и равномерно сходится к отображению $F(t, v)$, т.е. $F(t, v) \subset \ldots \subset F_k(t, v) \subset F_{k+1}(t, v) \subset \ldots \subset F_2(t, v) \subset F_1(t, v)$ для любых $t \in I, v \in Q$ и $\mu_k = \max\limits_{t \in I, v \in Q} h[F_k(t, v), F(t, v)] \to 0$ при $k \to \infty$.

4. Последовательность неотрицательных чисел τ_k стремится к τ, т.е. $\tau_k \to \tau$ при $k \to \infty$. Введем обозначение

$$W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k] = M_k + \int_0^{\tau_k} \bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v)\, dt.$$

Теорема 12. Имеет место равенство

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k] = W[M, Q, F, \tau],$$

т.е.

$$W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k] \to W[M, Q, F, \tau] \text{ при } k \to \infty.$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Докажем, что существует натуральное число K, такое, что имеет место

 ISSN 0572-2691

$$h[W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k], W[M, Q, F, \tau]] < \varepsilon \tag{15}$$

для любого $k > K.$

Для этого используем неравенство

$$h[W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k], W[M, Q, F, \tau]] \le h[W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k], W[M_k, Q_k, F_k, \tau]] +$$

$$+ h[W[M_k, Q_k, F_k, \tau], W[M, Q, F, \tau]] < \varepsilon. \tag{16}$$

Из условия 1 следует натуральное число $K_1,$ такое, что

$$M_k \subset M + \frac{\varepsilon}{4} H, M \subset M_k + \frac{\varepsilon}{4} H \tag{17}$$

при любом $k > K_1.$

В силу непрерывности $F_1(t, v)$ на компакте $I \times Q$ существует замкнутый шар ρH такой, что $F_1(t, v) \subset \rho H.$ Поэтому легко убедиться, что существует натуральное число $K_2,$ такое, что

$$\int_0^{\tau_k} \bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v)\, dt \subset \int_0^{\tau} \bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v)\, dt + \frac{\varepsilon}{4} H,$$

$$\int_0^{\tau} \bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v)\, dt \subset \int_0^{\tau_k} \bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v)\, dt + \frac{\varepsilon}{4} H \text{ при всех } k > K_2.$$

Отсюда, учитывая соотношения (17), получаем

$$h[W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k], W[M_k, Q_k, F_k, \tau]] < \frac{\varepsilon}{2} \tag{18}$$

при любом $k > K_3$ где $K_3 = \max\{K_1, K_2\}.$

Докажем, что существует натуральное число $K_5,$ такое, что при любом $k > K_5$ имеет место $h[W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k], W[M, Q, F, \tau]] < \frac{\varepsilon}{2}.$

Из условий 1–3 следует

$$\int_0^{\tau} \bigcap_{v \in Q_k} F(t, v)\, dt \subset \int_0^{\tau} \bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v)\, dt. \tag{19}$$

В силу равномерной сходимости $F_k(t, v)$ отображения $F(t, v)$ на I получим

$$\bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v) \subset \bigcap_{v \in Q} [F(t, v) + \mu_k H].$$

Воспользовавшись леммой 4, приходим к включению

$$\bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v) \subset \bigcap_{v \in Q} [F(t, v) + (\gamma(\beta_k) + \mu_k) H].$$

Из полунепрерывности операции пересечения получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $K_4,$ такое, что при любом $k > K_4$ имеет место соотношение

$$\bigcap_{v \in Q} [F(t, v) + (\gamma(\beta_k) + \mu_k) H] \subset \bigcap_{v \in Q} F(t, v) + \frac{\varepsilon}{4\tau} H.$$

Следовательно, $\bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v) \subset \bigcap_{v \in Q} F(t, v) + \dfrac{\varepsilon}{4\tau} H.$ Теперь, интегрируя обе части включения, получаем

$$\int_0^\tau \bigcap_{v \in Q_k} F_k(t, v)\, dt \subset \int_0^\tau \bigcap_{v \in Q} F(t, v)\, dt + \frac{\varepsilon}{4} H \quad \text{при всех } k > K_4.$$

Отсюда в силу (17) и (19)

$$h[W[M_k, Q_k, F_k, \tau], W[M, Q, F, \tau]] < \frac{\varepsilon}{2} \tag{20}$$

при всех $k > K_5$, где $K_5 = \max\{K_1, K_4\}$.

Складывая неравенства (18) и (20), в силу (16) приходим к соотношению

$$h[W[M_k, Q_k, F_k, \tau_k], W[M, Q, F, \tau]] < \varepsilon \quad \text{для любого } k > K,$$

где $K = \max\{K_3, K_5\}$.

Теорема доказана.

І.М. Ісканаджієв

ПЕРШИЙ ПРЯМИЙ МЕТОД ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Прямі методи Понтрягіна зіграли важливу роль в розвитку теорії диференціальних ігор та її застосування для конкретних прикладних задач. Це виявилося корисним і в теорії керування в умовах невизначеності, а також під час розв'язання задачі синтезу керувань. Прямі методи зарекомендували себе як ефективний засіб для вирішення завдання переслідування і керування. Розвитку відповідної теорії присвячено чимало досліджень. Прямі методи Понтрягіна розглядають інтеграли, відмінні від класичного інтеграла. Одна з них — багатозначне відображення. Друга відмінність — участь в операції геометричної різниці (різниця Маньківського) і перетині множин. У зв'язку з цим виникають деякі труднощі при обчисленні цих інтегралів. У даній роботі розглядається диференціальна гра, описана диференціальними включеннями $\dot{z} \in -F(t,\ v)$, де F — неперервне компактнозначне відображення. Перший прямий метод Понтрягіна стосується таких класів ігор. Зокрема, визначено клас стробоскопічних стратегій переслідуючого. Для цих класів ігор доведено, якщо початкова точка належить першому інтегралу (інтеграл від багатозначного (компактнозначного)) відображення, який має місце при визначенні першого прямого методу, то це необхідна і достатня умова для завершення гри в фіксованому моменті часу в класі стробоскопічних стратегій. Запропоновано схеми для наближеного обчислення інтеграла першого прямого методу. Вивчено апроксимативні властивості цього інтеграла і доведено стійкість таких інтегралів щодо вихідних даних диференціальної гри. Перший інтеграл постійний при односторонніх збуреннях.

Ключові слова: диференціальна гра, диференціальне включення, стратегія, переслідувач, допустиме управління, інтеграл, багатозначне відображення, апроксимація, наближені формули.

I.M. Iskanadjiev

FIRST DIRECT PONTRYAGIN'S METHOD FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Pontryagin's direct methods played a large role in the development t of the theory of differential games and its application to specific applied problems. It turned out to be useful in control theory under conditions of uncertainty, also in solving the problem of control synthesis. Since direct methods have proved themselves as an effective means to solve the problem of pursuit and control, a lot of research have been devoted to the development of the corresponding theory. Pontryagin's direct methods are based on the consideration of integrals, which has a number of significant differences from the classical integral. One of the differences is the use of the multi-valued mapping integral in their definitions. In this connection, some difficulties arise in calculating these integrals. In this paper, we consider a differential game described by differential inclusions of the form $\dot{z} \in -F(t, v)$, where F is a continuous compact-valued map. The first direct method is described with respect to such class of games. In particular, the class of stroboscopic strategies of the pursuer, the trajectory of the system, is determined. For these class of games, it is proved that if the starting point belongs to the first integral (the integral of the multi-valued (compact-valued) mapping that is present in the definition of the first direct method, then this is necessary and sufficient to complete the game at a fixed point in time in the class of stroboscopic strategies. Schemes are proposed for the approximate calculation of the integral of the first direct method. The approximative properties of this integral are studied. The semi-stability of such integrals with respect to the initial data of the differential game is proved. The first integral is stable under unilateral perturbations, as it were, not profitable for the pursuer of the initial data of the differential game.

Keywords: differential game, differential inclusion, strategy, pursuer, evader, multivalued function, integral, approximate schemes, admissible controls

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования. *Матем. сб.* 1980. **112**, № 3. С. 307–330.
2. Азамов А. Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла. *ДАН СССР*. 1988. **299**, № 2. С. 265–268.
3. Яксубаев К.Д. Необходимость и достаточность третьего интеграла для завершения игры в одном классе позиционных стратегий. *ДАН УзССР*. 1987. № 5. С. 4–5.
4. Половинкин Е.С. Об интегрировании многозначных отображений. *ДАН СССР*. 1988. **271**, № 5. С. 1059–1063.
5. Абдуганиев А.А., Исканаджиев И.М. О задаче вычисления альтернированного интеграла Понтрягина. *ДАН УзССР*. 1985. С. 4–6.
6. Сатимов Н. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх. *Дифференц. уравнения*. 1973. **9**, № 11. С. 2000–2009.
7. Никольский М.С. Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования–убегания. *Матем. замет.* 1983. **33**, вып. 6. С. 885–891.
8. Никольский М.С. Первый метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М. : Изд.-во МГУ, 1984. 102 с.
9. Чикрий А.А. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина и некоторые эффективные способы преследования. *Кибернетика*. 1986. № 5. С. 75–81.
10. Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц. Игровые задачи сближения для квазилинейных систем общего вида. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2018. **24**, № 1. С. 273–287.

11. Азамов А. О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх. *Матем. сб.* 1982. **118**, № 3. С. 422–429.
12. Никольский М.С. Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина. *Матем. сб.* 1982. **118**, № 3. С. 422–429.
13. Остапенко В.В. Метод *H*-выпуклых множеств в дифференциальных играх. *ДАН УССР*. сер. А, 1984. № 12. С. 62–64.
14. Понамарев А.П., Розов Н.Х. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина. *Вест. МГУ*. сер. Вычисл. математика и кибернетика. 1978. № 1. С. 82–90.
15. Silin D.B. Set — Valued differentiation and integration. *Set-Valued Analysis*. 1997. N 5. С. 107–146.
16. Ушаков В.Н., Матвейчук А.Р., Ушаков А.В., Казаков А.Л. О построении решений задачи о сближении в фиксированный момент времени. *Известия Иркутского государственного университета*. Сер. Математика. 2012. **5**, вып. 4. С. 95–115.
17. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр. *Матем. сб.* 2017. **208**, № 9. С. 56–99.
18. Куржанский А.Б., Мельников Н.Б. О задаче синтеза управлений в альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона–Якоби. *Матем. сб.* 2000. **191**, № 6. С. 69–100.
19. Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр. Е.С. Половинкин, Г.Е. Иванов, М.В. Балашов, Р.В. Константинов, А.В. Хорев. *Матем. сб.* 2001. **192**, № 10. С. 95–122.
20. Iskanadjiev I. Duality of the alternating integral for quasi-linear differential games. *Nonlinear analysis: Modeling and Control*. 2012. **17**, N 2. P. 169–181.
21. Iskanadjiev I.M. Pontryagin's alternating integral for differential inclusion. *Cybernetics and System analysis*. 2013. **49**, N 6. P. 936–940. DOI: 10.1007/s10559-013-9584-2.
22. Iskanadjiev I.M. Lower Pontryagin's Alternating integral for differential inclusion. *Cybernetics and System analysis*. 2015. **51**, N 5, P. 782–791. DOI: 10.1007/s10559-015-9771-4.
23. Iskanadjiev I.M. On the Pontryagin's lower alternating integral. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. **45**(2). P. 33–40. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.-i2.40.
24. Iskanadjiev I. On main operators in nonlinear differential games with fixed times. *Journal Progressive Research in Mathematics (JPR)*. **12**, N 3. P. 1946–1956.
25. Iskanadjiev I. Approximation of the lower operator in nonlinear differential games with non-fixed time. *Journal of Advances in Mathematics*. 2019. **16**. DOI: https://doi.org/10.24297/jam.-v16i0.8220.

Получено 10.09.2019