УДК 517.977

И.С. Раппопорт

О ГАРАНТИРОВАННОМ РЕЗУЛЬТАТЕ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Ключевые слова: квазилинейная дифференциальная игра, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия, разрешающая функция.

Введение

Работа посвящена изучению проблемы сближения управляемых объектов в игровых задачах динамики на основе метода разрешающих функций [1] и его современной версии [2]. В любых формах метода разрешающих функций главным является накопительный принцип, который используется в текущем суммировании резрешающей функции для оценки качества игры первого игрока вплоть до достижения некоторого порогового значения. В отличие от основной схемы метода разрешающих функций в настоящей работе рассматривается случай, когда условие Понтрягина не имеет места. Рассматриваются специальные многозначные отображения, порождающие верхние и нижние разрешающие функции двух типов, впервые введенные в работе [3]. С помощью этих функций получены некоторые достаточные условия разрешимости задачи сближения за гарантированное время. Результаты иллюстрируются на модельном примере.

Работа продолжает исследования [1–4], примыкает к публикациям [5–24] и расширяет класс игровых задач сближения управляемых объектов, которые имеют решение.

Общая схема метода, разрешающие функции первого типа

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\,d\tau, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t)$, $g : R_+ \to R^n$, измерима по Лебегу [9] и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, измерима по t, а также суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v)$, $\varphi : U \times V \to R^n$, которая считается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, m, l, n — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, являются измеримыми функциями времени.

Кроме процесса (1) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \qquad (2)$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый (назовем его преследователем) пытается вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (2) за кратчайшее время, а другой (назовем его убегающим) — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или вообще избежать встречи.

Примем сторону первого игрока и будем считать, что если игра (1), (2) продолжается на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t будем выбирать на основе информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U, \qquad (3)$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока к моменту t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U. \qquad (4)$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то говорят, что управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [7], а контруправление [5] $u(t) = u(z_0, v(t))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [8].

Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n в L. Положив $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v), \ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v),$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$. Предположим, что многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ имеет замкнутые значения на множестве $\Delta \times V$.

Условие 1 (условие Понтрягина). Многозначное отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t, \tau)$ можно сделать вывод, что при любом фиксированном $t > 0$ вектор-функция $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, v)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримой по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ и непрерывной по $u \in U$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [9] при любом фиксированном $t > 0$ многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримым по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$.

Пусть $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$, — некоторая почти везде ограниченная измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau \in [0, t]$, для каждого $t > 0$ функция, которую будем называть функцией сдвига.

 ISSN 0572-2691

Обозначим $\xi(t)=\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))=\pi g(t)+\int\limits_0^t \gamma(t, \tau)\, d\tau$ и рассмотрим при $\tau\in[0, t]$, $t>0$, $v\in V$ многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v)=\{\alpha\geq 0:[W(t, \tau, v)-\gamma(t, \tau)]\cap\alpha[M-\xi(t)]\neq\varnothing\}. \quad (5)$$

Условие 2. На множестве Δ справедливо включение

$$0\in\bigcap_{v\in V}\{[W(t, \tau, v)-\gamma(t, \tau)]-\mathfrak{A}(t, \tau, v)[M-\xi(t)]\}.$$

Условие 2 эквивалентно предположению, что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ не пусто на множестве $\Delta\times V$ и введено для удобства изложения. Если выполнено условие 2, то рассмотрим верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции [3]:

$$\alpha^*(t, \tau, v)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t, \tau, v)\},\ \ \alpha_*(t, \tau, v)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t, \tau, v)\},\ \ \tau\in[0, t],\ \ v\in V.$$

Можно показать [12], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ замкнутозначно, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо по совокупности (τ, v), $\tau\in[0, t]$, $v\in V$, а верхняя и нижняя разрешающие функции $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau\in[0, t]$, $v\in V$ и поэтому суперпозиционно измеримы [12], т.е. $\alpha^*(t, \tau, v(\tau))$ и $\alpha_*(t, \tau, v(\tau))$ измеримы по τ, $\tau\in[0, t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot)\in V(\cdot)$, где $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau\in[0, +\infty]$, со значениями из V. Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, а нижняя полунепрерывна снизу по переменной v и функции $\inf\limits_{v\in V}\alpha^*(t, \tau, v)$ и $\sup\limits_{v\in V}\alpha_*(t, \tau, v)$ измеримы по τ, $\tau\in[0, t]$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))=\{t\geq 0:\xi(t)\in M,\ \int\limits_0^t \sup_{v\in V}\alpha_*(t, \tau, v)\, d\tau<1\}. \quad (6)$$

Если включение в фигурных скобках соотношения (6) не выполняется ни для каких $t\geq 0$, то положим $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 2, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ множество $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^1\in\mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^1 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0, \mathrm{P}_*^1]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим при $v\in V$, $\tau\in[0, \mathrm{P}_*^1]$ компактнозначное многозначное отображение

$$U_*^1(\tau, v)=\{u\in U:\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\varphi(u, v)-\gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau)\in\alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v)[M-\xi(\mathrm{P}_*^1)]\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции $\alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v)$ копактнозначное отображение $U_*^1(\tau, v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [12] при

$v \in V,\quad \tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $U_*^1(\tau, v)$ содержит $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_*^1(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [12].

Положим управление первого игрока $u_*^1(\tau) = u_*^1(\tau, v(\tau)),\quad \tau \in [0, \mathrm{P}_*^1]$. Принимая во внимание формулу (1), получим

$$\pi z(\mathrm{P}_*^1) = \xi(\mathrm{P}_*^1) + \int_0^{\mathrm{P}_*^1} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1, \tau)\, \varphi(u_*^1(\tau), v(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^1, \tau))\, d\tau\ . \qquad (7)$$

Тогда с учетом закона выбора управления первым игроком соотношение (7) дает

$$\pi z(\mathrm{P}_*^1) \in \xi(\mathrm{P}_*^1) + \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v(\tau))[M - \xi(\mathrm{P}_*^1)]\, d\tau\}.$$

Поскольку по определению момента P_*^1 $c(M - \xi(\mathrm{P}_*^1), \psi) \geq 0$ и $\int_0^{\mathrm{P}_*^1} \sup_{v \in V} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v)\, d\tau < 1$, то, применив аппарат опорных функций, получим $\xi(\mathrm{P}_*^1) + \int_0^{\mathrm{P}_*^1} \alpha_*(\mathrm{P}_*^1, \tau, v(\tau))[M - \xi(\mathrm{P}_*^1)]\, d\tau \subset M$. Поэтому $\pi z(\mathrm{P}_*^1) \in M$ и, следовательно, $z(\mathrm{P}_*^1) \in M^*$, что и завершает доказательство теоремы.

Лемма 1. Для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1 если и только если существует такая функции сдвига $\gamma(t, \tau)$, что выполнено условие 2 и $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ на множестве $\Delta \times V$.

Доказательство. Пусть существует функция сдвига $\gamma(t, \tau)$ такая, что выполнено условие 2 и $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ на множестве $\Delta \times V$. Тогда нулевое значение α обеспечивает непустоту пересечения в выражении (5) и поэтому $0 \in W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau),\quad (t, \tau) \in \Delta,\quad v \in V$. Отсюда вытекает, что $0 \in W(t, \tau) - \gamma(t, \tau),\quad (t, \tau) \in \Delta$ или $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau),\quad (t, \tau) \in \Delta$, т.е. справедливо условие Понтрягина. Рассуждая в обратном порядке, приходим к нужному выводу.

Замечание 1. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ на множестве Δ выполнено условие 1, то в силу леммы 1 $\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\} = 0$ на множестве $\Delta \times V$.

Условие 3. На множестве Δ выполнено условие 2 и справедливо включение

$$0 \in \bigcap_{v \in V} \{[W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)] - \sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)[M - \xi(t)]\}.$$

Замечание 2. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ на множестве Δ выполнено условие 1, то по аналогии с леммой 1 выполнено условие 3 и $\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) = 0$.

Рассмотрим множество

$$T(g(t), \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \geq 0 :\ \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)\, d\tau \geq 1,\ \int_0^t \sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)\, d\tau < 1 \right\}. \qquad (8)$$

Если при некотором $t>0$ $\alpha^*(t,\tau,v)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, $v\in V$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (8) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (8). В случае, когда неравенства соотношения (8) не выполняются при всех $t>0$, положим $T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 3, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(t,\tau)$ множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,T]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим сначала случай $\xi(T,g(T),\gamma(\cdot,\cdot))\notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_0^t \alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau-\int_t^T \sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau,\ \ t\in[0,T].$$

По определению T имеем

$$h(0)=1-\int_0^T \sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau>0\,,$$

$$h(T)=1-\int_0^T \alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau\le 1-\int_0^T \inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau\le 0.$$

В силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s):s\in[0,t_*]\}$.

Промежутки времени $[0,t_*)$, $[t_*,T]$ будем называть «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения:

$$U_1^*(\tau,v)=\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau))\in\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\},\ \ \tau\in[0,t_*),\quad (9)$$

$$U_*^1(\tau,v)=\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)\in\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\},\ \ \tau\in[t_*,T].\quad (10)$$

Многозначные отображения $U_1^*(\tau,v)$ и $U_*^1(\tau,v)$ имют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1), функций $\alpha^*(T,\tau,v)$ и $\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)$ компактнозначные отображения $U_1^*(\tau,v)$, $\tau\in[0,t_*)$, и $U_*^1(\tau,v),$, $\tau\in[t_*,T]$ при $v\in V$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы [12]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримому селектору $u_1^*(\tau,v)$ и $u_*^1(\tau,v)$, которые являеются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $u_1^*(\tau)=u_1^*(\tau, v(\tau))$, $\tau\in[0, t_*)$, а на «пассивном» равным $u_*^1(\tau)=$ $=u_*^1(\tau, v(\tau))$, $\tau\in[t_*, T]$.

Учитывая формулу (1), при выбранных управлениях получим

$$\pi z(T)=\xi(T)+\int_0^{t_*}(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_1^*(\tau), v(\tau))-\gamma(T,\tau))\,d\tau+$$

$$+\int_{t_*}^{T}(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*^1(\tau), v(\tau))-\gamma(T,\tau))\,d\tau. \tag{11}$$

Соотношения (9)–(11) дают

$$\pi z(T)\in\xi(T)+\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))[M-\xi(T)]\,d\tau+\int_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\,d\tau=$$

$$=\xi(T)+\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau[M-\xi(T)]+\int_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau[M-\xi(T)]=$$

$$=\xi(T)\left[1-\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau-\int_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)d\tau\right]+$$

$$+\left[\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))\,d\tau+\int_{t_*}^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau\right]M=M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*)=0$, а переход при интегрировании многозначных отображений со множеством M может быть подтвержден применением аппарата опорных функций [10].

Для случая $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot,\cdot))\in M$ достаточно применить теорему 1.

Условие 4. На множестве Δ выполнено условие 2 и справедливо включение

$$0\in\bigcap_{v\in V}\{[W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)]-\inf_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)[M-\xi(t)]\}.$$

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 3, 4, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(t,\tau)$ множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0, T]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим сначала случай $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot,\cdot)\notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_0^{t}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau-\int_t^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau,\quad t\in[0,T].$$

По определению T имеем

$$h(0)=1-\int_0^{T}\sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau>0,\quad h(T)=1-\int_0^{T}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)\,d\tau\le 0.$$

 ISSN 0572-2691

В силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Промежутки времени $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ будем называть «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения

$$\widetilde{U}_1^*(\tau, v) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau) \in \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v)[M - \xi(T)]\}, \ \tau \in [0, t_*), \quad (12)$$

$$\widetilde{U}_*^1(\tau, v) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau) \in \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)[M - \xi(T)]\}, \ \tau \in [t_*, T]. \quad (13)$$

Многозначные отображения $\widetilde{U}_1^*(\tau, v)$ и $\widetilde{U}_*^1(\tau, v)$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1), функций $\inf\limits_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v)$ и $\sup\limits_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)$ копактнозначные отображения $\widetilde{U}_1^*(\tau, v)$, $\tau \in [0, t_*)$, и $\widetilde{U}_*^1(\tau, v)$, $\tau \in [t_*, T]$ при $v \in V$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы [12]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримому селектору $\widetilde{u}_1^*(\tau, v)$ и $\widetilde{u}_*^1(\tau, v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $\widetilde{u}_1^*(\tau) = \widetilde{u}_1^*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на «пассивном» промежутке равным $\widetilde{u}_*^1(\tau) = \widetilde{u}_*^1(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Принимая во внимание формулу (1), при выбранных управлениях получим

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_1^*(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau +$$
$$+ \int_{t_*}^{T} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}_*^1(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau. \quad (14)$$

Соотношения (12)–(14) дают

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^{t_*} \inf_{v \in V} \alpha^*(T, \tau, v)[M - \xi(T)]d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)[M - \xi(T)]d\tau =$$
$$= \xi(T) + \int_0^{t_*} \inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)\, d\tau[M - \xi(T)] + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)d\tau[M - \xi(T)] =$$
$$= \xi(T)[1 - \int_0^{t_*} \inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)d\tau - \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)d\tau] +$$
$$+ [\int_0^{t_*} \inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)d\tau]M = M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*) = 0$, а переход при интегрировании многозначных отображений с множеством M может быть подтвержден применением аппарата опорных функций [10].

Для случая $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$ достаточно применить теорему 1.

Модификация метода, разрешающие функции второго типа

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}\mathfrak{A}(t,\tau,v),\ \ (t,\tau)\in\Delta. \tag{15}$$

Условие 5. На множестве Δ справедливо включение

$$0\in\bigcap_{v\in V}\{[W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)]-\mathfrak{A}(t,\tau)[M-\xi(t)]\}.$$

Если условие 5 выполнено, то многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau)$ не пусто на множестве Δ и порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции:

$$\alpha^*(t,\tau)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau)\},\ \ \alpha_*(t,\tau)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau)\},\ \ \tau\in[0,t].$$

Можно показать [12], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau)$ замкнутозначное, $\mathfrak{L}$-измеримо по τ, $\tau\in[0,t]$, а верхняя $\alpha^*(t,\tau)$ и нижняя $\alpha_*(t,\tau)$ разрешающие функции $\mathfrak{L}$-измеримы по переменной τ, при фиксированном t.

Замечание 3. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t,\tau)$ на множестве Δ выполнено условие 3, то $\sup\limits_{v\in V}\alpha_*(t,\tau,v)\in\mathfrak{A}(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тогда выполнено условие 5 и справедливо равенство $\sup\limits_{v\in V}\alpha_*(t,\tau,v)=\alpha_*(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t,\tau)$ на множестве Δ выполнено условие 4, то $\inf\limits_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)\in\mathfrak{A}(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$. Тогда выполнено условие 5 и справедливо равенство $\inf\limits_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)=\alpha^*(t,\tau)$, $\tau\in[0,t]$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0:\xi(t)\in M,\ \int_0^t\alpha_*(t,\tau)\,d\tau<1\}. \tag{16}$$

Если включение в фигурных скобках соотношения (16) не выполняется ни для каких $t\ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 5, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(t,\tau)$ множество $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^2\in\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_*^2 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим при $v\in V$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^2]$ компактнозначное многозначное отображение

$$U_*^2(\tau,v)=\{u\in U:\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(\mathrm{P}_*^2,\tau)\in\alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)[M-\xi(\mathrm{P}_*^2)]\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции $\alpha_*(\mathrm{P}_*^2,\tau)$ компактнозначное отображение $U_*^2(\tau,v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [12] при

 ISSN 0572-2691

$v \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $U_*^2(\tau, v)$ содержит $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_*^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [12].

Положим управление первого игрока $u_*^2(\tau) = u_*^2(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Принимая во внимание формулу (1), получим

$$\pi z(\mathrm{P}_*^2) = \xi(\mathrm{P}_*^2) + \int_0^{\mathrm{P}_*^2} (\pi\Omega(\mathrm{P}_*^2, \tau)\varphi(u_*^2(\tau), v(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau))\, d\tau. \tag{17}$$

Тогда с учетом закона выбора управления первым игроком соотношение (17) дает

$$\pi z(\mathrm{P}_*^2) \in \xi(\mathrm{P}_*^2) + \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)[M - \xi(\mathrm{P}_*^2)]\, d\tau\}.$$

Поскольку по определению момента P_*^2 $c(M - \xi(\mathrm{P}_*^2), \psi) \geq 0$ и $\int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)\, d\tau < 1$, то, применив аппарат опорных функций, получим $\xi(\mathrm{P}_*^2) + \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau, v(\tau))[M - \xi(\mathrm{P}_*^2)]\, d\tau \subset M$. Поэтому $\pi z(\mathrm{P}_*^2) \in M$ и, следовательно, $z(\mathrm{P}_*^2) \in M^*$. что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 4. Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ на множестве Δ выполнено условие 1, то $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$. Тогда выполнены условия 3, 5 и справедливо равенство

$$\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*(t, \tau) = 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Рассмотрим множество

$$\Theta(g(t), \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \alpha^*(t, \tau)\, d\tau \geq 1, \int_0^t \alpha_*(t, \tau)\, d\tau < 1 \right\}. \tag{18}$$

Если при некотором $t > 0$ $\alpha^*(t, \tau) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (18) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in \Theta(g(t), \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (18) . В случае, когда неравенства соотношения (18) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\Theta(g(t), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 5, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ множество $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\Theta \in \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент Θ с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \Theta]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим сначала случай $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\cdot,\cdot) \notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_0^t \alpha^*(\Theta,\tau)\,d\tau-\int_t^\Theta \alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau,\quad t\in[0,\Theta].$$

По определению Θ имеем

$$h(0)=1-\int_0^\Theta \alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau>0,\quad h(\Theta)=1-\int_0^\Theta \alpha^*(\Theta,\tau)\,d\tau\le 0.$$

В силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,\Theta]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s):s\in[0,t_*]\}$.

Промежутки времени $[0,t_*)$, $[t_*,\Theta]$ будем называть активным и пассивным соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения:

$$\tilde U_2^*(\tau,v)=\{u\in U:\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(\Theta,\tau)\in\alpha^*(\Theta,\tau)[M-\xi(\Theta)]\},\quad \tau\in[0,t_*),\quad (19)$$

$$\tilde U_*^2(\tau,v)=\{u\in U:\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(\Theta,\tau)\in\alpha_*(\Theta,\tau)[M-\xi(\Theta)]\},\quad \tau\in[t_*,\Theta].\quad (20)$$

Многозначные отображения $\tilde U_2^*(\tau,v)$ и $\tilde U_*^2(\tau,v)$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1), функций $\alpha^*(\Theta,\tau)$ и $\alpha_*(\Theta,\tau)$ копактнозначные отображения $\tilde U_2^*(\tau,v)$, $\tau\in[0,t_*)$, и $\tilde U_*^2(\tau,v)$, $\tau\in[t_*,\Theta]$, при $v\in V$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы [12]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримому селектору $\tilde u_2^*(\tau,v)$ и $\tilde u_*^2(\tau,v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [12]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $\tilde u_2^*(\tau)=\tilde u_2^*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,t_*)$, а на «пассивном» — равным $\tilde u_*^2(\tau)=\tilde u_*^2(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[t_*,\Theta]$.

Принимая во внимание формулу (1), при выбранных управлениях получим

$$\pi z(\Theta)=\xi(\Theta)+\int_0^{t_*}(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(\tilde u_2^*(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau))\,d\tau+$$

$$+\int_{t_*}^T(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(\tilde u_*^2(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau))\,d\tau.\quad (21)$$

Соотношения (19)–(21) дают

$$\pi z(\Theta)\in\xi(\Theta)+\int_0^{t_*}\alpha^*(\Theta,\tau)[M-\xi(\Theta)]d\tau+\int_{t_*}^\Theta\alpha_*(\Theta,\tau)[M-\xi(\Theta)]d\tau=$$

$$=\xi(\Theta)+\int_0^{t_*}\alpha^*(\Theta,\tau)\,d\tau[M-\xi(\Theta)]+\int_{t_*}^\Theta\alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau[M-\xi(\Theta)]=$$

$$=\xi(\Theta)[1-\int_0^{t_*}\alpha^*(\Theta,\tau)\,d\tau-\int_{t_*}^\Theta\alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau]+\left[\int_0^{t_*}\alpha^*(\Theta,\tau)d\tau+\int_{t_*}^\Theta\alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau\right]M=M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*)=0$, а переход при интегрировании многозначных отображений со множеством M может быть подтвержден применением аппарата опорных функций [10].

ISSN 0572-2691

Для случая $\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\cdot,\cdot)) \in M$ достаточно применить теорему 4.

Сравнение гарантированных времен

Лемма 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) и для некоторой функции сдвига $\gamma(t,\cdot)$ выполнено условие 5, причем $\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)) \notin M$. Тогда имеют место неравенства

$$\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) \le \alpha_*(t, \tau), \ \ (t, \tau) \in \Delta, \tag{22}$$

$$\inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v) \ge \alpha^*(t, \tau), \ \ (t, \tau) \in \Delta. \tag{23}$$

Если к тому же выполнено условие 3, то неравенство (22) превращается в равенство. Если же справедливо условие 4, то в равенство обращается неравенство (23). При этом, если многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta \times V$, то справедливы условия 3 и 4 и в соотношениях (22), (23) имеет место равенство.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) и для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ выполнено условие 5. Тогда имеют место включения

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)).$$

При этом, если к тому же выполнены условия 3 и 4, или если многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta \times V$, то справедливы равенства

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)), \ \ \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)).$$

Причем, если выполнено условие 1, то в качестве $\gamma(\cdot,\cdot)$ можно взять некоторый селектор Понтрягина [3].

Доказательство леммы 2 и теоремы 6 непосредственно следует из конструкций соответствующих определений, замечаний и теорем.

Теорема 7. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 2, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$ множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто, $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ и многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ принимает выпуклые значения для всех (τ, v), $\tau \in [0, T]$, $v \in V$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство автоматически вытекает из леммы 2 и теорем 5 и 6.

Пример

Рассмотрим простое движение:

$$\dot{z} = u - v, \ \ z \in R^n, \ \ z(0) = z_0, \ \ v \in S, \ \ u \in aS^0, \ \ a > 1, \ \ M^* = M = \varepsilon S, \ \ M_0 = 0.$$

Здесь S — единичный шар с центром в нуле, S^0 — его граница. Условие Понтрягина не имеет места, поскольку $aS^0 \overset{*}{-} S = \varnothing$, $\overset{*}{-}$ — геометрическая разность Минковского [1].

Выберем функцию сдвига $\gamma(t, \tau) \equiv 0$. Поскольку $\Omega(t, \tau) = E$, E — единичная матрица, и $\pi = E$, то $\xi(t) = z_0$. Тогда многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ не зависит от t, τ и имеет вид

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v)=\mathfrak{A}(v,z_0)=\{\alpha\ge 0:[aS^0-v]\cap\alpha[\varepsilon S-z_0]\ne\varnothing\}.$$

Оно обладает непустыми образами и поэтому справедливо включение

$$0\in\bigcap_{v\in S}\{[aS^0-v]-\mathfrak{A}(v,z_0)[\varepsilon S-z_0]\}.$$

Таким образом, выполнено условие 2.

Верхняя разрешающая функция определяется из соотношения

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\alpha^*(v,z_0)=\sup\{\alpha\ge 0:[aS^0-v]\cap\alpha[\varepsilon S-z_0]\ne\varnothing\}=$$

$$=\sup\{\alpha>0:[\alpha z_0-v]\in[a+\alpha\varepsilon]S\}=\sup\{\alpha>0:\|v-\alpha z_0\|=[a+\alpha\varepsilon]\}.$$

Тем самым она является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$(\|z_0\|^2-\varepsilon^2)\alpha^2-2[(v,z_0)+a\varepsilon]\alpha-(a^2-\|v\|^2)=0.$$

Таким образом, справедлива формула

$$\alpha^*(v,z_0)=\frac{(v,z_0)+a\varepsilon+\sqrt{[(v,z_0)+a\varepsilon]^2+(\|z_0\|^2-\varepsilon^2)(a^2-\|v\|^2)}}{\|z_0\|^2-\varepsilon^2}.$$

При этом имеем

$$\min_{v\in S}\alpha^*(v,z_0)=\frac{a-1}{\|z_0\|-\varepsilon}\ \text{достигается при}\ v=-\frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Нижняя разрешающая функция определяется из соотношения

$$\alpha_*(t,\tau,v)=\alpha_*(v,z_0)=\inf\{\alpha\ge 0:[aS^0-v]\cap\alpha[\varepsilon S-z_0]\ne\varnothing\}=$$

$$=\sup\{\alpha\ge 0:\alpha[\varepsilon S-z_0]\subset[aS-v]\}=\sup\{\alpha\ge 0:\|v-\alpha z_0\|=[a-\alpha\varepsilon]\}.$$

Поэтому она является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$(\|z_0\|^2-\varepsilon^2)\alpha^2-2[(v,z_0)-a\varepsilon]\alpha-(a^2-\|v\|^2)=0.$$

Следовательно, получим

$$\alpha_*(v,z_0)=\frac{(v,z_0)-a\varepsilon+\sqrt{[(v,z_0)-a\varepsilon]^2+(\|z_0\|^2-\varepsilon^2)(a^2-\|v\|^2)}}{\|z_0\|^2-\varepsilon^2}.$$

При этом имеем

$$\max_{v\in S}\alpha_*(v,z_0)=\frac{a+1}{\|z_0\|+\varepsilon}\ \text{достигается при}\ v=\frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Проверим справедливость условия 3. В силу построения верхней и нижней разрешающих функций должно выполняться условие $\min\limits_{v\in S}\alpha^*(v,z_0)\ge\max\limits_{v\in S}\alpha_*(v,z_0)$, которое приводит к неравенству

$$[a-1]\ge\frac{a+1}{\|z_0\|+\varepsilon}[\|z_0\|-\varepsilon]. \tag{24}$$

Имеют место соотношения

$$\bigcap_{v\in S}\{[aS^0-v]-\max_{v\in S}\alpha_*(v,z_0)[\varepsilon S-z_0]\}=[a-1]S^0-\max_{v\in S}\alpha_*(v,z_0)[\|z_0\|-\varepsilon]\frac{z_0}{\|z_0\|}=$$

$$=[a-1]S^0-\frac{a+1}{\|z_0\|+\varepsilon}[\|z_0\|-\varepsilon]\frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Тогда в силу неравенства (24) выполнено условие 3.

Проверим справедливость условия 4. Имеют место соотношения

$$\bigcap_{v\in S}\{[aS^0-v]-\inf_{v\in S}\alpha^*(v,z_0)[\varepsilon S-z_0]\}=[a-1]S^0-\inf_{v\in S}\alpha^*(v,z_0)[\|z_0\|-\varepsilon]\frac{z_0}{\|z_0\|}=$$

$$=[a-1]S^0-[a-1]\frac{z_0}{\|z_0\|}=[a-1]\left[S^0-\frac{z_0}{\|z_0\|}\right].$$

Поэтому справедливо условие 4.

В данном примере имеем

$$\int_0^T\min_{v\in V}\alpha^*(v,z_0)\,d\tau=\frac{a-1}{\|z_0\|-\varepsilon}T=1,\quad T=T(z_0)=\frac{\|z_0\|-\varepsilon}{a-1}.$$

При этом, если параметры игры удовлетворяют условию

$$1>\frac{\varepsilon}{\|z_0\|}>\frac{1}{a},\quad a>1,$$

то справедливо неравенство

$$\int_0^T\max_{v\in V}\alpha_*(v,z_0)\,d\tau=\frac{a+1}{\|z_0\|+\varepsilon}T=\frac{(a+1)}{(\|z_0\|+\varepsilon)}\frac{(\|z_0\|-\varepsilon)}{(a-1)}<1.$$

Следовательно, для примера выполняются все условия теорем 2 и 3. В силу леммы 2 и замечания 3 для примера справедливы условия теоремы 5.

Заключение

В настоящей работе рассматривается проблема сближения управляемых объектов в игровых задачах динамики. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Введены верхние и нижние разрешающие функции специального типа и на их основе предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение конфликтно-управляемого процесса в классе квазистратегий и контруправлений. Приведено сравнение гарантированных времен окончания игры для разных схем сближения управляемых объектов. Приведен иллюстративный пример.

Й.С. Раппопорт

ПРО ГАРАНТОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ

Розглянуто проблему гарантованого результату в ігрових задачах зближення керованих об'єктів. Запропоновано метод вирішення таких задач, пов'язаний з побудовою деяких скалярних функцій, що якісно характеризують хід зближення керованих об'єктів та ефективність прийнятих рішень. Такі функції називаються розв'язувальними функціями. Привабливість методу розв'язувальних функцій полягає в тому, що він дозволяє ефективно використовувати сучасну техніку багатозначних відображень і їх селектор в обґрунтуваннях ігрових конструкцій і отриманні на їх основі змістовних результатів. У будь-яких формах методу розв'язувальних функцій головним є накопичувальний принцип, який використовується в поточному підсумовуванні розв'язувальної функції для оцінки якості гри першого гравця аж до досягнення деякого порогового значення. На відміну від основної схеми згаданого методу розглядається випадок, коли класична умова Понтрягіна не має місця. У цій ситуації замість селектора Понтрягіна, якого не існує, розглядається деяка функція зсуву, а з її допомогою вводяться спеціальні багатозначні відображення. Вони породжують верхні і нижні розв'язувальні функції двох типів, за допомогою яких формулюються достатні умови завершення гри за деякий гарантований час. Дається порівняння гарантованих часів для різних схем зближення керованих об'єктів. Наведено приклад зближення керованих об'єктів з простим рухом з метою отримати в явному вигляді верхні і нижні розв'язувальні функції, що дозволяють зробити висновок про можливість закінчення гри в разі, коли не має місця умова Понтрягіна.

Ключові слова: квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

I.S. Rappoport

ON GUARANTEED RESULT IN GAME PROBLEMS OF CONTROLLED OBJECTS APPROACH

The problem of a guaranteed result in game problems of approach of controlled objects is considered. A method is proposed for solving such problems associated with the construction of some scalar functions that qualitatively characterize the course of approach of controlled objects and the effectiveness of decisions made. Such functions are called resolving functions. The attractiveness of the method of resolving functions is that it allows you to use effectively the modern technique of multi-valued mappings and their selectors in the justification of game constructions and obtaining meaningful results on their basis. In all forms of the method of resolving functions the main principle is the accumulative principle, which is used in the current summation of the resolving function to assess the quality of the game of the first player up to a certain threshold value. In contrast to the main scheme of the mentioned method, the case is considered when the classical Pontryagin condition does not hold. In this situation, instead of the Pontryagin selector, which does not exist, a certain shift function is considered, and with its help special multi-valued mappings are introduced. They generate upper and lower resolving functions of two types, with the help of which the sufficient conditions for completing a game in a certain guaranteed time are formulated. The comparison of guaranteed times for different schemes of approach of controlled objects is given. An illustrative example of the approach of controlled objects approach with simple movement is given in order to obtain explicitly the upper and lower resolving functions, which make it possible to conclude that the game can be terminated in a case when the Pontryagin condition does not hold.

Keywords: quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

1. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Springer Science and Business Media. 2013. 424 p.
2. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. **271**. P. 69–85.
3. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. **48**, N 3. P. 20–35.

4. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Тр. ИММ УрО РАН.* 2017. **23**, № 1. С. 293–305. DOI:https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука. 1974. 455 с.
6. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М. : Наука. 1988. **2**. 576 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. Hajek O. Pursuit Games. New York: Academic Press. 1975. **12**. 266 p.
9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser. 1990. 461 p.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 470 с.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974. 480 с.
12. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. **48**, № 5. С. 40–64.
13. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 1995. **27**, № 1. P. 27–38.
14. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1982. **46**, N 5. P. 584–589.
15. Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов. *Проблемы управления и информатики.* 1997. № 1. С. 92–107.
16. Eidelman S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2000. **52**, N 11. P. 1787–1806.
17. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and its Applications.* 2008. **17**. P. 349–387.
18. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные кофликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика.* 1993. **57**, № 3. С. 3–14.
19. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict. *Journal of Mathematical sciences.* 1996. **80**, N 3. P. 1489–1518.
20. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ.* 2001. № 6. С. 66–99.
21. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *Optimization Methods and Software*. 2008. **23**, N 1. P. 39–72.
22. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 3. С. 3–32.
23. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия.* 1959. № 2. С. 25–32.
24. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. М. : Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.

Получено10.02.2020