

# МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

---

УДК 519.8

*Е.М. Киселева, Л.Л. Гарт, О.М. Притоманова*

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДИАГРАММ ВОРОНОГО С ОПТИМАЛЬНЫМ РАЗМЕЩЕНИЕМ ТОЧЕК–ГЕНЕРАТОРОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

**Ключевые слова:** обобщенная диаграмма Вороного, точки–генераторы, оптимальное разбиение множеств, недифференцируемая оптимизация,  $r$ -алгоритм Н.З. Шора.

### Введение

Как известно, диаграмма Вороного заданного конечного множества  $M$  точек плоскости (пространства), называемых точками–генераторами, — это математический объект, который представляет собой такое разбиение плоскости (пространства), при котором каждая область (ячейка Вороного) этого разбиения образует множество элементов, более близких к одной из точек множества  $M$ , чем к любой другой точке этого множества.

Диаграммы Вороного в двух- и трехмерных пространствах используются в самых разных областях прикладных наук: кристаллографии, физике, астрономии, химии, микробиологии, компьютерной графике, при решении проблем искусственного интеллекта, распознавания образов, офтальмологии. Содержательные обзоры приложений диаграмм Вороного в различных областях приведены в работах [1–3]. Широкий обзор последних технических результатов и приложений с ссылками на литературу по вычислительной геометрии можно найти в [4]. Несмотря на то, что многие из известных алгоритмов построения диаграмм Вороного имеют сложность  $O(|M| \log(|M|))$ , а некоторые из них даже работают в среднем за  $O(|M|)$ , все они весьма сложны. Что же касается диаграммы Вороного на случай пространства произвольной размерности, то ее построение связано со значительными алгоритмическими проблемами. Действительно, известно [5], что при заданном числе  $N$  точек–генераторов количество элементов, необходимых для описания диаграммы Вороного, растет экспоненциально в зависимости от размерности пространства.

В работе [6] приведен краткий обзор некоторых имеющихся в научной литературе обобщений стандартной диаграммы Вороного, в частности: аддитивно взвешенная диаграмма Вороного (Additively Weighted Voronoi Diagram), мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного (Multiplicatively Weighted Voronoi Diagram). В [6] упомянуты также некоторые другие обобщения стандартной диаграммы Вороного такие, как диаграмма Лагерра (Power Voronoi Diagram),

© Е.М. КИСЕЛЕВА, Л.Л. ГАРТ, О.М. ПРИТОМАНОВА, 2020

*Международный научно-технический журнал  
«Проблемы управления и информатики», 2020, № 2*

приближенные (нечеткие) диаграммы Вороного, диаграммы Вороного с ограничениями на мощности точек–генераторов, динамические диаграммы Вороного и др., а также приведена таблица соответствия между конкретным вариантом диаграммы Вороного и математической моделью непрерывной задачи оптимального разбиения множеств, в результате решения которой может быть получена эта диаграмма.

Алгоритмы построения стандартной диаграммы Вороного и различных ее обобщений, предложенные в [1, 6, 7], обладают рядом преимуществ по сравнению с известными в научной литературе.

В данной работе представлен алгоритм построения еще одной обобщенной диаграммы Вороного с оптимальным размещением конечного числа  $N$  точек–генераторов в ограниченном множестве  $\Omega$  из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  ( $n \geq 2$ ), основанный на формулировании соответствующей непрерывной задачи оптимального разбиения множества (ОПМ) из  $E_n$  на непересекающиеся подмножества с критерием качества разбиения, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, и применении разработанного в [1, 6, 7] математического и алгоритмического аппаратов решения такой задачи, составной частью которого является  $r$ -алгоритм Н.З. Шора [8].

### Постановка задачи

Прежде чем привести математическую формулировку рассматриваемой задачи, напомним определение стандартной (классической) диаграммы Вороного [5].

Стандартной (классической) диаграммой Вороного конечного множества  $M = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset E_n$  точек–генераторов  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$  ( $n \geq 2$ ) называется совокупность многогранников Вороного

$$\text{Vor}(\tau_i) = \{x \in E_n : c(x, \tau_i) \leq c(x, \tau_j), j \neq i, j = 1, \dots, N\}, i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

исходных точек  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ , где  $c(x, \tau_i)$  — метрика в  $E_n$ , которая определяется одним из способов:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2} \quad \text{— евклидова;}$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j| \quad \text{— манхэттенская;}$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{j=1, \dots, n} \{|x^j - \tau_i^j|\} \quad \text{— Чебышева.}$$

Другими словами, диаграммой Вороного конечного множества  $M = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  из  $E_n$  ( $n \geq 2$ ) называется множество

$$\text{Vor}(M) = \bigcup_{\tau_i \in M} \text{Vor}(\tau_i), \quad (2)$$

причем  $\text{mes}(\text{Vor}(\tau_i) \cap \text{Vor}(\tau_j)) = 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$  ( $i \neq j$ ), где  $\text{mes}(\cdot)$  — мера Лебега. Разбиение пространства  $E_n$  на многогранники Вороного  $\text{Vor}(\tau_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , заданного множества точек  $M = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  однозначно.

Приведем определение диаграммы Вороного конечного числа точек–генераторов  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ , оптимально размещенных в ограниченном множестве  $\Omega \subset E_n$ .

Пусть  $\Omega$  — некоторое заданное ограниченное множество из  $E_n$ ,  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  — конечное множество точек–генераторов в  $\Omega$ . В тех случаях, когда расположение точек  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  в  $\Omega$  неизвестно и их требуется разместить (выбрать) в  $\Omega$ , можно ввести еще один вариант диаграммы Вороного на множестве  $\Omega \subset E_n$ , а именно диаграмму Вороного конечного числа точек, оптимально размещенных в ограниченном множестве, обобщающую стандартную диаграмму Вороного.

Под диаграммой Вороного конечного числа точек–генераторов  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ , оптимально размещенных в ограниченном множестве  $\Omega \subset E_n$ , будем понимать такую совокупность многогранников Вороного:

$$\text{Vor}(\tau_i) = \{x \in \Omega \subset E_n : c(x, \tau_i)/w_i + a_i \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j, \\ i, j = 1, \dots, N, j \neq i\}, \quad (3)$$

точек  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ , для которой суммарное взвешенное расстояние от точек множества  $\Omega$  до соответствующих точек–генераторов  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  наименьшее, т.е. функционал

$$J(\{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\text{Vor}(\tau_i)} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) dx \quad (4)$$

принимает минимальное значение. Здесь  $w_i > 0$ ,  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , — заданные числа (веса).

*Замечание.* Задавая конкретные значения параметров  $a_1, \dots, a_N$ ,  $w_1, \dots, w_N$  и вид функции  $c(x, \tau_i)$  в выражении для функционала (4), можно получить различные варианты диаграммы Вороного с оптимальным размещением точек–генераторов: аддитивно взвешенные ( $w_i = 1, a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, N$ ), мультипликативно взвешенные ( $w_i > 1, a_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$ ), аддитивно-мультипликативно взвешенные ( $w_i > 1, a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, N$ ) и др.

Таким образом, как следует из определения диаграммы Вороного конечного числа точек–генераторов  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ , оптимально размещенных в ограниченном множестве  $\Omega \subset E_n$ , для ее построения необходимо построить совокупность многогранников Вороного (3) и отыскать такие координаты соответствующих точек–генераторов  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ , которые минимизируют функционал (4).

### Метод решения

Перейдем к изложению подхода к построению диаграммы Вороного (3), (4), основанного на применении математического аппарата теории оптимального разбиения множеств [6].

Для этого сначала приведем соответствующую непрерывную линейную задачу оптимального разбиения множества  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества с неизвестными заранее координатами некоторых характерных для каждого подмножества точек, называемых «центрами» подмножеств, см. [6].

Пусть  $\Omega$  — ограниченное, измеримое по Лебегу множество в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ . Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  из  $\Omega \subset E_n$  назовем возможным разбиением множества  $\Omega$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , если

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (i \neq j),$$

где  $\text{mes}(\cdot)$  — мера Лебега.

Пусть  $\sum_{\Omega}^N$  — класс всех возможных разбиений множества  $\Omega$  на непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , т.е.

$$\sum_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N, i \neq j \right\}.$$

Введем функционал

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) dx, \quad (5)$$

где  $c(x, \tau_i)$  — заданная вещественная ограниченная на  $\Omega \times \Omega$  функция, измеримая по  $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$  при любом фиксированном  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$  для всех  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $w_i > 0$ ,  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , — заданные числа (веса).

Здесь и в дальнейшем интегралы понимаются в смысле Лебега. Будем считать, что мера множества граничных точек множеств  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , равна нулю.

Под непрерывной линейной задачей оптимального разбиения множества  $\Omega$  из  $E_n$  на его непересекающиеся подмножества  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  (среди которых могут быть и пустые) с отысканием координат центров  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  этих подмножеств соответственно понимают следующую задачу [1].

**Задача А.** Найти  $\min_{\substack{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N \\ \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \in \Omega^N}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})$ , где функционал

$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})$  имеет вид (5); координаты  $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)}$  центров  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , заранее неизвестны и подлежат определению.

Пару  $(\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\}, \{\tau_1^*, \dots, \tau_N^*\})$ , доставляющую минимум функционалу (5) на множестве  $\sum_{\Omega}^N \times \Omega^N$ , назовем оптимальным решением задачи А. При этом разбиение

$\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \sum_{\Omega}^N$  назовем оптимальным разбиением множества  $\Omega \subset E_n$  на  $N$  подмножеств, а совокупность  $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$  центров  $\tau_i^* \in \Omega_i^*$ ,

$i = 1, 2, \dots, N$ , — оптимальными центрами подмножеств  $\Omega_i^*$  в задаче А.

На рис. 1 изображено разбиение множества  $\Omega \subset E_n$  на три подмножества  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  с центрами  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  этих подмножеств соответственно.

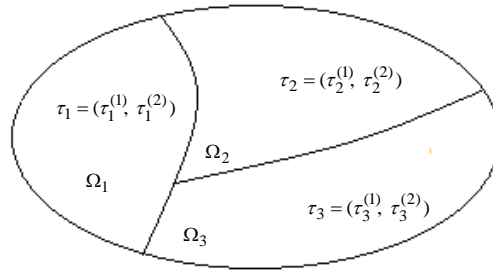


Рис. 1

Для построения метода решения задачи А введем характеристические функции подмножеств  $\Omega_i$  :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Для задачи А приведены в [1, 6] теоремы 1 и 2, которые используются в дальнейшем при формулировании алгоритма решения задачи А.

**Теорема 1.** Для того чтобы возможное разбиение  $\{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*\} \in \sum_{\Omega}^N$  множества  $\Omega$  при каждом фиксированном  $\tau \in \Omega$  являлось оптимальным для задачи А, необходимо и достаточно, чтобы

$$c(x, \tau_i) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad j \neq i, \\ \text{и} \quad \forall x \in \Omega_i^*.$$

При этом в точках  $x$ , принадлежащих оптимальной границе подмножеств  $\Omega_i^*$  и  $\Omega_j^*$ , в неравенстве достигается знак равенства.

**Теорема 2.** Компоненты характеристической вектор-функции  $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x), \dots, \lambda_{*i}(x), \dots, \lambda_{*N}(x))$ , соответствующей оптимальному решению  $(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*)$  задачи А для  $i = 1, 2, \dots, N$  и почти всех  $x \in \Omega$ , имеют вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, & c(x, \tau_{*i}) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) / w_j + a_j, \\ & j = 1, \dots, N, \quad i \neq j \text{ п.в. для } x \in \Omega, \text{ тогда } x \in \Omega_{*i}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (6)$$

в качестве  $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$  выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] dx \rightarrow \min, \quad \tau \in \Omega^N. \quad (7)$$

Приведем алгоритм решения задачи А, в основе которого лежат теоремы 1, 2 и один из вариантов метода обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных антиградиентов (или так называемый  $r$ -алгоритм Н.З. Шора [8]).

Сущность методов обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства основывается на построении в процессе последовательных приближений линейных операторов, изменяющих метрику пространства, и выборе направления спуска, соответствующего антиградиенту в пространстве с новой метрикой.

В итерационной формуле  $r$ -алгоритма [8], имеющей вид

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k B_{k+1}^\tau [B_{k+1}^\tau]^\top g_G(\tau^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$B_{k+1}^\tau$  — оператор, отображающий преобразованное пространство в основное пространство  $E_n$  (причем  $B_0^\tau = I$  — единичная матрица);  $h_k$  — шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума функции  $G$  по направлению  $B_{k+1}^\tau g_G(\tau^{[k]})$ ;  $g_G(\tau^{[k]})$  — обобщенный градиент функции  $G(\tau)$  в точке  $\tau^{[k]}$ .

В настоящей работе  $r$ -алгоритм применяется в  $H$ -форме [8] ( $H_k$  — симметричная матрица, такая что  $H_k = B_k B_k^\top$ ), для которой итерационная формула (8) приобретает вид

$$\tau^{[k+1]} = \tau^{[k]} - h_k \frac{H_{k+1} g_G(\tau^{[k]})}{\sqrt{(H_{k+1} g_G(\tau^{[k]}), g_G(\tau^{[k]})}}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$H_{k+1} = H_k + (1/\alpha_k^2 - 1) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^\top H_k}{(H_k \Delta_k, \Delta_k)}; \quad \Delta_k = g_G(\tau^{[k]}) - g_G(\tau^{[k-1]}).$$

Коэффициент растяжения пространства  $\alpha_k$  принимается равным 3. Для шагового множителя  $h_k$  применяется адаптивный способ регулировки, описанный в [8].

Определим  $i$ -ю компоненту вектора обобщенного градиента  $g_G^\tau(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$  функции

$$\begin{aligned} & G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \\ & = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) / w_i + a_i] dx^{(1)} \dots dx^{(n)} \end{aligned}$$

в точке  $\tau = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)})$  следующим образом:

$$\begin{aligned} g_G^{\tau_i}(\tau) &= g_G^{\tau_i}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \\ &= \frac{1}{w_i} \int_{\Omega} g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \times \lambda_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)} \dots dx^{(n)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$  —  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_c^\tau(x, \tau)$  функции  $c(x, \tau_i)$  в точке  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$  (здесь  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$ ); при фиксированном  $x$  она имеет вид

$$g_c^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \begin{pmatrix} g_c^{\tau_i^{(1)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \\ \dots \\ g_c^{\tau_i^{(n)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) \end{pmatrix}.$$

*Замечание.* В случае, когда  $c(x, \tau_i)$  — евклидова метрика,  $i$ -я компонента  $N$ -мерного вектора обобщенного градиента  $g_c^\tau(x, \tau)$  функции  $c(x, \tau_i) =$



Таким образом, в результате решения задачи А описанным алгоритмом, основанным на теоремах 1 и 2, получаем совокупность многогранников Вороного (3) точек–генераторов  $\tau_i, i=1, \dots, N$ :

$$\text{Vor}(\tau_i) = \{x \in \Omega \subset E_n : c(x, \tau_i)/w_i + a_i \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j, i, j=1, \dots, N, j \neq i\},$$

но, в отличие от стандартной диаграммы Вороного (1), в которой точки  $\tau_1, \dots, \tau_N$  фиксированы, координаты точек–генераторов  $\tau_1, \dots, \tau_N$ , оптимально размещенных в  $\Omega \subset E_n$ , отыскиваются как решение конечномерной задачи оптимизации

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1, \dots, N} [c(x, \tau_i)/w_i + a_i] dx \rightarrow \min, \tau \in \Omega^N,$$

с недифференцируемой целевой функцией  $G(\tau)$ .

### Численная реализация

На рис. 2 приведены стандартные диаграммы Вороного  $N$  точек–генераторов, оптимально размещенных в области  $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^2 : 0 \leq x^{(i)} \leq 10, i=1, 2\}$ , полученные в результате решения задачи А описанным выше алгоритмом из нулевых начальных приближений  $\tau_i = (0; 0)$  при  $a_i = 0, w_i = 1$  для  $i=1, \dots, N$ ,  $a$  — метрика евклидова,  $N=250$ ;  $b$  — манхэттенская метрика,  $N=100$ ;  $в$  — метрика Чебышева,  $N=250$ .

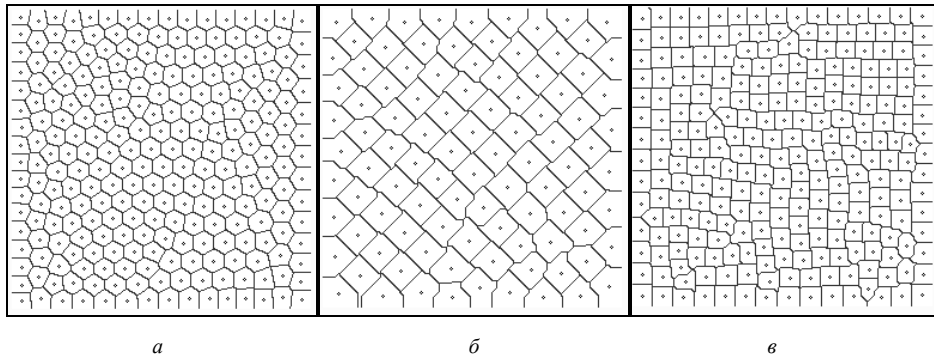


Рис. 2

На рис. 3 изображены следующие диаграммы Вороного для семи точек–генераторов, оптимально размещенных в области  $\Omega = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^2 : 0 \leq x^{(i)} \leq 10, i=1, 2\}$ , полученные в результате решения задачи А описанным алгоритмом из нулевых начальных приближений  $\tau_i = (0; 0)$ :  $a$  — стандартная;  $b$  — аддитивно взвешенная;  $в$  — мультипликативно взвешенная;  $г$  — аддитивно-мультипликативно взвешенная.

Для стандартной диаграммы Вороного (рис. 3,  $a$ ) в результате работы алгоритма за 97 итераций получены: минимальное значение целевого функционала прямой задачи  $F=147,92$ ; оптимальные координаты точек–генераторов  $\tau_1 = (2,62; 1,56), \tau_2 = (1,49; 4,91), \tau_3 = (5,00; 5,00), \tau_4 = (7,57; 1,63), \tau_5 = (8,51; 5,09), \tau_6 = (2,43; 8,37), \tau_7 = (7,38; 8,44)$ .

Для аддитивно взвешенной диаграммы Вороного (рис. 3,  $b$ ) в результате работы алгоритма за 92 итерации получены: минимальное значение целевого функционала прямой задачи  $F=295,01$ ; оптимальные координаты точек–генераторов



$\tau_1 = (7,69; 2,43)$ ,  $\tau_2 = (0,84; 0,81)$ ,  $\tau_3 = (1,34; 3,48)$ ,  $\tau_4 = (3,54; 1,33)$ ,  $\tau_5 = (2,42; 7,68)$ ,  
 $\tau_6 = (7,55; 7,56)$ ,  $\tau_7 = (4,42; 4,43)$ . Отметим, что для аддитивно взвешенной диаграммы Вороного большему значению веса  $a_i$  соответствует подмножество меньшей площади.

Для мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного (рис. 3, б) в результате работы алгоритма за 84 итерации получены: минимальное значение целевого функционала прямой задачи  $F=64,63$ ; оптимальные координаты точек-генераторов  $\tau_1 = (1,97; 3,08)$ ,  $\tau_2 = (3,21; 0,79)$ ,  $\tau_3 = (2,07; 7,52)$ ,  $\tau_4 = (5,09; 1,04)$ ,  $\tau_5 = (6,91; 6,21)$ ,  $\tau_6 = (0,96; 0,77)$ ,  $\tau_7 = (8,10; 1,47)$ ,  $a$  — стандартная,  $a = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ;  $w = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ; б — аддитивно взвешенная,  $a = (1, 3, 2, 2, 1, 1, 2)$ ;  $w = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ; в — мультипликативно взвешенная,  $a = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ;  $w = (2, 1, 3, 1, 4, 1, 2)$ ; г — аддитивно-мультипликативно взвешенная,  $a = (1, 3, 2, 2, 1, 1, 2)$ ;  $w = (2, 1, 3, 1, 4, 1, 2)$ . Отметим, что для мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного большему значению веса  $w_i$  соответствует подмножество большей площади.

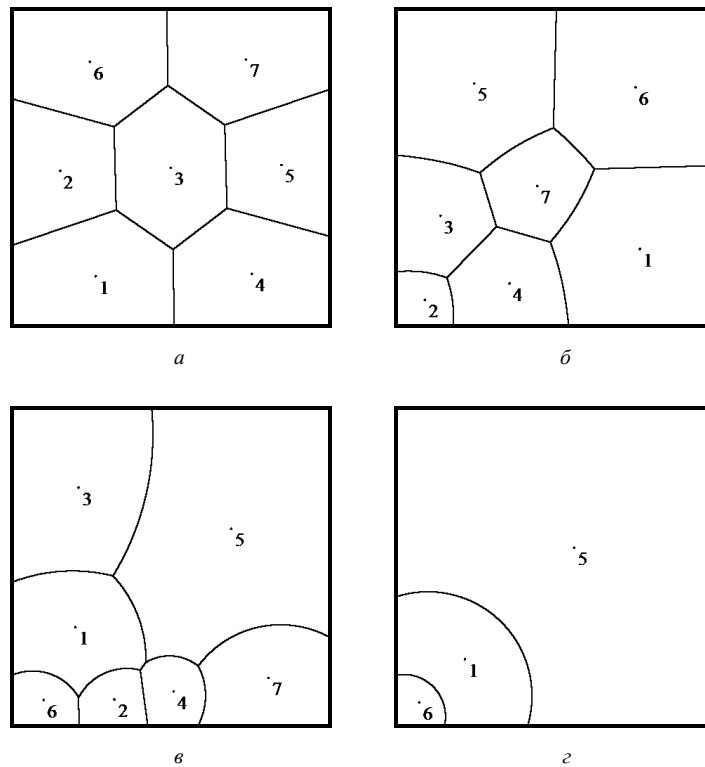


Рис. 3

Для аддитивно-мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного (рис. 3, г) в результате работы алгоритма за 63 итерации получены: минимальное значение целевого функционала прямой задачи  $F=187,32$ ; оптимальные координаты точек-генераторов  $\tau_1 = (2,12; 2,07)$ ,  $\tau_3 = (5,85; 5,85)$ ,  $\tau_5 = (5,60; 5,60)$ ,  $\tau_6 = (0,66; 0,70)$ ,  $\tau_7 = (0,63; 1,70)$ . Отметим, что на рис. 3, г подмножества с номерами 2, 3, 4, 7 исчезли, так как числовые значения их весов  $a_i$  больше, чем для подмножеств с номерами 1, 5, 6.

## Заключення

Таким образом, при соответствующей формулировке непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множества из  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  на подмножества решение этой задачи приводит к диаграмме Вороного с оптимальным размещением точек–генераторов в ограниченном множестве  $\Omega$  пространства  $E_n$ .

Предложенный в работе алгоритм построения названной выше диаграммы обладает рядом преимуществ:

- не зависит от размерности пространства  $E_n$ , содержащего ограниченное множество  $\Omega$  (вопрос сводится лишь к вычислению многомерных интегралов, входящих в описание метода);
- благодаря высокому быстродействию применим для задач больших размерностей (100, 200, 300 и более точек–генераторов);
- применим не только для евклидовых метрик, но и для метрик Чебышева, манхэттенской и др.;
- сложность реализации алгоритма построения диаграммы Вороного на основе описанного подхода не увеличивается при увеличении количества точек–генераторов.

*О.М. Кісельова, Л.Л. Гарт, О.М. Притоманова*

### АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ДІАГРАМ ВОРОНОГО З ОПТИМАЛЬНИМ РОЗМІЩЕННЯМ ТОЧОК–ГЕНЕРАТОРІВ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Запропоновано алгоритм побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням скінченної кількості точок–генераторів в обмеженій множині  $n$ -вимірного евклидового простору. Алгоритм заснований на формулюванні відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множин з критерієм якості розбиття, що забезпечує відповідний вид діаграми Вороного, і застосуванні для її розв'язання апарату теорії оптимального розбиття. При цьому для чисельного розв'язання допоміжної задачі скінченновимірної оптимізації, що виникає при розробці методу розв'язання згаданої нескінченновимірної задачі оптимального розбиття множин, використаний ефективний метод недиференційовної оптимізації — один з варіантів методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених антиградієнтів ( $r$ -алгоритм Шора). Запропонований у роботі алгоритм побудови узагальненої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням скінченної кількості точок–генераторів в обмеженій множині  $n$ -мірного евклидового простору має ряд переваг порівняно з відомими: він не залежить від розмірності евклидового простору, що містить вихідну обмежену множину; застосовний для задач великих розмірностей (понад 300 точок–генераторів); зберігає силу не тільки для евклидових метрик, але і для метрик Чебишева, манхеттенської та інших; складність реалізації алгоритму побудови діаграми Вороного на основі запропонованого підходу не збільшується при збільшенні кількості точок–генераторів. Представлено результати програмної реалізації розробленого алгоритму для побудови стандартної діаграми Вороного з оптимальним розміщенням точок–генераторів, а також деяких її узагальнень, таких як адитивна, мультиплікативна та адитивно–мультиплікативна діаграми Вороного з оптимальним розміщенням точок–генераторів.

**Ключові слова:** узагальнена діаграма Вороного, точки–генератори, оптимальне розбиття множин, недиференційовна оптимізація,  $r$ -алгоритм Н.З. Шора.

## AN ALGORITHM TO CONSTRUCT VORONOI DIAGRAMS WITH OPTIMAL PLACEMENT OF GENERATOR POINTS BASED ON THE THEORY OF OPTIMAL SET PARTITIONING

An algorithm is proposed for constructing a generalized Voronoi diagram with optimal placement of a finite number of generator points in a bounded set of  $n$ -dimensional Euclidean space. The algorithm is based on the formulation of the corresponding continuous problem of optimal set partitioning with a partition quality criterion providing the corresponding form of the Voronoi diagram, and on the application of the apparatus of the optimal partitioning theory to solve this problem. Herewith, the effective method of non-differentiable optimization is used for the numerical solution of an auxiliary finite-dimensional optimization problem arising in the development of the method for solving the mentioned infinite-dimensional optimal partitioning problem. Namely, that is one of the variants of the generalized gradient descent method with space expansion in the direction of the difference of two successive generalized antigradients (Shor's  $r$ -algorithm). The proposed algorithm for constructing a generalized Voronoi diagram with optimal placement of a finite number of generator points in a bounded set of  $n$ -dimensional Euclidean space has some advantages compared to those known in the scientific literature. It does not depend on the dimension of Euclidean space containing the original bounded set; it is applicable for large-scale problems (over 300 generator points); it works not only for Euclidean metrics, but also for Chebyshev, Manhattan and other ones; the complexity of the algorithm implementation for constructing a Voronoi diagram based on the proposed approach does not increase with an increase in the number of generator points. The results of software implementation of the developed algorithm are presented for constructing a standard Voronoi diagram with optimal placement of generator points, as well as some of its generalizations, such as additive, multiplicative and additive-multiplicative Voronoi diagrams with optimal placement of generator points.

**Keywords:** generalized Voronoi diagram, generator points, optimal set partitioning, non-differentiable optimization, Shor's  $r$ -algorithm.

1. Kiseleva E.M. The emergence and formation of the theory of optimal set partitioning for sets of the  $n$ -dimensional euclidean space. Theory and Application. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 9. P. 1–24. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien. v50.i9.10.
2. Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S.N. Spatial tessellations: Concepts and applications of Voronoi diagrams. West Sussex, England: John Wiley and Sons Ltd, second ed., 2000. 696 p.
3. Aurenhammer F., Klein R., Lee D. Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. World Scientific Pub Co Inc, 2013. 337 p.
4. Atamturk A., Nemhauser G.L., Savelsbergh M.W.P. A combined Lagrangian, linear programming and implication heuristic for large-scale set partitioning Problems. *Journal of Heuristics*. 1995. **1**. P. 247–259.
5. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: Введение. М. : Шеймос. М. : Мир, 1989. 478 с.
6. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations I. Theoretical foundations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. **51**, N 3. P. 325–335.
7. Kiseleva E.M., Koriashkina L.S. Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi diagrams based on the theory of optimal set partitioning. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. **51**, N 4. P. 489–499.
8. Shor N.Z. Minimization methods for non-differentiable functions. *Springer series. Computational mathematics*. Berlin : Springer-Verlag, 1985. **3**. 162 p.

Получено 27.12.2019