УДК 519.854.2

А.А. Павлов, Е.Г. Жданова

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ключевые слова: неопределенность, комбинаторная оптимизация, компромиссное решение, транспортная задача линейного программирования

Введение

На практике определение наилучшего варианта действий часто производится в условиях неопределенности. Последствия принимаемых решений зависят от будущего развития событий, которое может происходить по различным сценариям. В работах [1, 2] А.А. Павлов ввел новый класс задач комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности и изложил основы теории решения этого класса задач.

Введенный в [1, 2] класс задач комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности определяется тремя условиями:

1) критерий оптимизации является линейной сверткой весов и произвольных числовых характеристик допустимого решения;

2) существует эффективный алгоритм решения задачи в детерминированной постановке, причем, любое структурное изменение области ее допустимых решений (например, добавление линейного ограничения) приводит к невозможности его применения (примеры эффективного решения NP-трудных задач этого класса приведены в [3, 4]);

3) под решением задачи комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности понимается неоднозначность значений весовых коэффициентов, входящих в критерий оптимизации.

В работах [1, 2] приводятся компромиссные критерии разрешения неопределенности, а также эффективные формальные процедуры, которые основаны на новых свойствах [1] линейной свертки критериев, отличных от известных [5–11].

Цель данной статьи — иллюстрация эффективности предложенных А.А. Павловым теоретических положений на примерах однопродуктовой и многопродуктовой транспортной задачи, а также обоснование расширения введенного в [1, 2] класса задач комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности.

Общие теоретические положения

Основные теоретические положения, изложенные в [1, 2], заключаются в следующем. Исследуемый класс задач комбинаторной оптимизации имеет вид [1]

$$\min_{\sigma\in\Omega}\sum_{i=1}^{s}\omega_i k_i(\sigma), \tag{1}$$

где ω_i — числа, $k_i(\sigma)$ — i-я произвольная числовая характеристика допустимого решения σ $(i=\overline{1, s})$, Ω — множество допустимых решений.

Предполагается, что задача (1) в такой (детерминированной) постановке имеет эффективный алгоритм решения, причем любое структурное изменение Ω (например, добавление линейного ограничения) приводит к невозможности его применения.

Существует R наборов весов $\{\omega_i^r, i=\overline{1, s}\}$, $r=\overline{1, R}$, каждый из которых может быть набором коэффициентов $\omega_1, \ldots, \omega_s$ задачи (1) на этапе реализации ее решения [1]. Могут быть заданы вероятности $p_r > 0, r=\overline{1, R}, \sum_r p_r = 1$ для каждого из возможных наборов весов (такие вероятности не существуют, если неопределенность не описывается вероятностной моделью). Нужно найти допустимое решение $\sigma \in \Omega$, которое удовлетворяет одному из следующих критериев.

Введем обозначения:

$$f_{\text{opt}}^r = \min_{\sigma \in \Omega} \sum_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma), \ \{\sigma_r\} = \arg\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma), \ L_r = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^{R} \left(\sum_{i=1}^{s} \omega_i^m k_i(\sigma_r) - f_{\text{opt}}^m \right).$$

Примечание 1. Если $\{\sigma_r\}$ состоит из более чем одного решения, оставляется то, на котором достигается $\min_{\{\sigma_r\}} L_r$, и это решение обозначаем σ_r (получение σ_r для случая, когда Ω конечно, показано в [1]).

Пусть $L_p = \min_r L_r$ (L_p соответствует решению σ_p).

Критерий 1. Необходимо найти σ, на котором достигается

$$\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{r=1}^{R} \left(\sum_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma) - f_{\text{opt}}^r \right). \tag{2}$$

Критерий 2. Найти допустимое решение, удовлетворяющее условию

$$\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{r=1}^{R} a_r \left(\sum_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma) - f_{\text{opt}}^r \right), \tag{3}$$

где $a_r > 0, r=\overline{1, R}$, — коэффициенты, заданные экспертом.

Критерий 3. Введем случайную величину $F = \sum_{i=1}^{s} \bar{\omega}_i k_i(\sigma) - \bar{f}_{\text{opt}}$, где $s+1$-мерная дискретная случайная величина $\bar{\omega}_1 \ldots, \bar{\omega}_s, \bar{f}_{\text{opt}}$ задается таблицей

$$\left\{ \begin{matrix} \omega_1^r, \ldots, \omega_s^r, f_{\text{opt}}^r \\ p_r > 0, r=\overline{1, R} \end{matrix} \right\}.$$

Необходимо найти решение задачи

$$\min_{\sigma \in \Omega} MF = \min_{\sigma \in \Omega} \sum_{r=1}^{R} p_r \left(\sum_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma) - f_{\text{opt}}^r \right). \tag{4}$$

Критерий 4. Найти допустимое решение $\sigma(\Delta_1, \ldots, \Delta_R)$, у которого

$$\Delta_i \le l_i, l_i > 0, i=\overline{1, R}. \tag{5}$$

Здесь $\sigma(\Delta_1, \ldots, \Delta_R)$ — допустимое решение $\sigma \in \Omega$, имеющее указанные отклонения от оптимумов при каждом наборе весов: $\Delta_r = \sum_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma) - f_{\text{opt}}^r$, $r=\overline{1, R}$.

Критерий 5. Для одного из набора весов $\omega_i^r, i=\overline{1, s}$, $r \in \{\overline{1, R}\}$, найти оптимальное решение, которому бы соответствовало $\min\limits_{\sigma \in \{\sigma_r\}} \sum\limits_{j=1, j \neq r}^{R} \Delta_j$.

Находим решение, удовлетворяющее одному из пяти приведенных критериев, из следующего утверждения и его следствий [1].

Утверждение 1. Для произвольных $a_r > 0, r = \overline{1, R}$, справедливо [1]

$$\arg\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{r=1}^{R} a_r \left[\sum_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma) - f_{\text{opt}}^r \right] = \arg\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{r=1}^{R} a_r \omega_i^r \right) k_i(\sigma). \tag{6}$$

Следствие 1. Решение задачи $\min\limits_{\sigma \in \Omega} \sum\limits_{r=1}^{R} a_r \left[\sum\limits_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma) - f_{\text{opt}}^r \right]$ сводится к решению одной задачи вида (7):

$$\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{r=1}^{R} a_r \omega_i^r \right) k_i(\sigma). \tag{7}$$

Пусть $\sigma^2(a_1, \ldots, a_R)$ — множество решений задачи вида (7) при коэффициентах $a_1, \ldots, a_R$; $\sigma(a_1, \ldots, a_R, \Delta_1, \ldots, \Delta_R)$ — допустимое решение $\sigma \in \sigma^2(a_1, \ldots, a_R)$, имеющее для заданных коэффициентов $a_r > 0, r = \overline{1, R}$, указанные $\Delta_r = \sum\limits_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma) - f_{\text{opt}}^r$, $r = \overline{1, R}$.

Следствие 2. Пусть множеству $\sigma^2(a_1, \ldots, a_R)$ принадлежит решение $\sigma(a_1, \ldots, a_R, \Delta_1, \ldots, \Delta_R)$, тогда $\nexists \sigma(\Delta'_1, \ldots, \Delta'_R) \in \Omega$, у которого $\Delta'_i \le \Delta_i, i = \overline{1, R}$, $\Delta^{\mathrm{T}} = (\Delta_1, \ldots, \Delta_R) \neq \Delta'^{\mathrm{T}} = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_R)$.

Следствие 3. Для получения решения по критерию 1 необходимо положить в задаче вида (7) $a_r = 1, r = \overline{1, R}$. В этом случае одно из решений задачи (6) не совпадает с решением σ_p, которому соответствует $\min\limits_r L_r$, если существует такое допустимое решение $\sigma(\Delta_1, \ldots, \Delta_R)$, $\Delta_r = \sum\limits_{i=1}^{s} \omega_i^r k_i(\sigma) - f_{\text{opt}}^r > 0$, $r = \overline{1, R}$, у которого

$$\sum_{r=1}^{R} \Delta_r \le L_p. \tag{8}$$

Следствие 4. Пусть $\sigma(a_1, \ldots, a_R, \Delta_1, \ldots, \Delta_R) \neq \sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_R$ и $\exists \sigma(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \ldots, a_R, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_R) \neq \sigma_1 \vee \ldots \vee \sigma_R$, $a'_i \neq a_i$. Тогда имеет место

$$\begin{gathered} (a'_i - a_i)(\Delta'_i - \Delta_i) < 0, \\ (\Delta'_i - \Delta_i)[(a_1 \Delta'_1 + \ldots + a_{i-1} \Delta'_{i-1} + a_{i+1} \Delta'_{i+1} + \ldots + a_R \Delta'_R) - \\ - (a_1 \Delta_1 + \ldots + a_{i-1} \Delta_{i-1} + a_{i+1} \Delta_{i+1} + \ldots + a_R \Delta_R)] < 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Следствие 5. Пусть $\sigma(1, \ldots, 1, \Delta_1, \ldots, \Delta_R) \neq \sigma_p$ и не удовлетворяет критерию 4. Тогда в силу логики неравенств (9), можно организовать последовательную процедуру решений задачи вида (7), на каждой итерации которой, увеличивая $\forall a_i$, если $\Delta_i > l_i$, и уменьшая $\forall a_j$, если $\Delta_j < l_j$. В результате находим решение σ, удовлетворяющее критерию 4, либо получаем множество решений $\{\sigma\}^1$, каждое из которых нарушает критерий 4, $\sigma(1,\ldots,1,\Delta_1,\ldots,\Delta_R)\in\{\sigma\}^1$. Пусть $\{\sigma\}^2=\{\sigma_1,\ldots,\sigma_R\}$. Тогда компромиссным решением по критерию 4 является решение $\bar{\sigma}\in\{\sigma\}^1\bigcup\{\sigma\}^2$, на котором достигается $\min\sum_t \alpha_{j_t}(\Delta_{j_t}-l_{j_t})$, $\forall t\,\Delta_{j_t}>l_{j_t}$, где $\alpha_j>0$, $j=\overline{1,s}$, — экспертные коэффициенты.

Следствие 6. Допустимое решение σ, удовлетворяющее критериям 2 или 3, находится по решению одной задачи вида (7).

Следствие 7. Решение σ, удовлетворяющее критерию 5, находится из решения задачи вида (7) с весами $a_j=1,\forall j\neq r$, $a_r>a_r^*>0$, a_r^* всегда существует, если Ω — дискретное множество.

Решение транспортной задачи в условиях неопределенности

Сформулируем задачу (1) как особый вид задачи векторной (многокритериальной) оптимизации:

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min, \tag{10}$$

$$C=\{c_{ij}\}_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}=\begin{cases}C^1=\{c_{ij}^1\}_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}\\ \text{или}\\ C^2=\{c_{ij}^2\}_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}\end{cases}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{13}$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}. \tag{14}$$

По сути, задача (10)–(14) является сбалансированной транспортной задачей линейного программирования [12] с матрицей стоимостей перевозок $C^1=\{c_{ij}^1\}_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ (далее ТЗЛП1), или транспортной задачей с матрицей стоимостей $C^2=\{c_{ij}^2\}_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ (далее ТЗЛП2).

К модели вида (10)–(14) может привести следующая ситуация. На практике перед решением задачи должны быть оценены условно-постоянные параметры модели (в нашем случае — значения элементов матрицы удельных стоимостей перевозок). Для этого специалистами (экспертами) в данной области используются определенные схемы расчета удельных стоимостей перевозок, которые учитывают много разных факторов. Возможны также ситуации, когда разные эксперты получают разные результаты (разные матрицы стоимостей). В случае, когда привлекаются два эксперта, получаем модель вида (10)–(14). Этот же результат получаем, если в результате работы группы экспертов получаем две альтернативные матрицы. Если же количество альтернатив $R \ge 3,$ то в (11) будут фигурировать матрицы $C^r = \{c_{ij}^r\}_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}, \ \ r = \overline{1, R}.$

Сопоставим обозначения общей теории с обозначениями задачи (10)–(14): $R = 2;$ множество Ω задается ограничениями (12)–(14); x — допустимое решение, $x = \{x_{ij}\}, i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}$ (аналог σ); x_{ij} — (ij)-й числовой параметр допустимого решения $\{x_{i,j}\} \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n};$ $\sum_{i=1}^{s} \omega_i k_i(\sigma) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$

Задача (10)–(14) обладает всеми свойствами исследуемого класса задач комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности:

• критерий оптимизации имеет вид (1);

• известен эффективный алгоритм решения задачи в детерминированной постановке (венгерский метод, метод потенциалов, причем каждый из этих методов эффективнее общего метода решения задачи линейного программирования); любое структурное изменение области ее допустимых решений приводит к невозможности применения этого алгоритма;

• значения весовых коэффициентов, входящих в критерий оптимизации, определены неоднозначно.

Проиллюстрируем предложенный подход нахождения компромиссного решения в условиях неопределенности на индивидуальных задачах (задачах с конкретными числовыми данными) размерности $m = 4, n = 3.$

Пример 1. Нахождение решения, у которого достигает минимум $(\Delta_1 + \Delta_2).$

Дано: $R = 2,$ векторы правых частей ограничений (12) и (13) соответственно: $a = [20\ 15\ 30\ 35\ 15]^{\mathrm{T}}, \ \ b = [19\ 34\ 33\ 29]^{\mathrm{T}}.$ Матрицы стоимостей ТЗЛП1, ТЗЛП2 и ТЗЛП (задачи с матрицей стоимостей $C = C^1 + C^2$), а также соответствующие им оптимальные решения и значения критериев приведены в табл. 1.

Таблица 1

Задача	Матрица стоимостей	Оптимальное решение	Значение критерия
ТЗЛП1	$C^1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 8 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$x^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 4 & 13 & 13 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 14 \\ 15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$f_{\mathrm{opt}}^1 = 436$
ТЗЛП2	$C^2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 13 & 14 \\ 16 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$f_{\mathrm{opt}}^2 = 415$
ТЗЛП	$C^3 = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 5 & 11 \\ 9 & 12 & 8 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 9 \\ 11 & 10 & 16 & 16 \\ 7 & 9 & 12 & 14 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 13 & 14 \\ 1 & 34 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	

Отметим, что у ТЗЛП1 и ТЗЛП2 указанные оптимумы не являются единственными решениями, а у ТЗЛП оптимальное решение единственное.

Отклонения по критериям решений x, x^1 и x^2 приведены в табл. 2.

Таблица 2

x	Δ_1	Δ_2	$\Delta_1 + \Delta_2$
x^1	0	71	71
x^2	62	0	62
x	2	15	17

Убедимся, что для решения x выполняется: $\Delta_1 + \Delta_2 < \min(L_1, L_2)$. Определим соответствующие величины L_1 и L_2. Для этого найдем $a_1 > 0$ (сохраняя $a_2 = 1$) такое, что решение ТЗЛП с матрицей $C = a_1 C^1 + C^2$ станет оптимальным решением ТЗЛП1 ($a_1 = 10$). Затем найдем $a_2 > 0$ (сохраняя $a_1 = 1$), при котором решение ТЗЛП с матрицей $C = C^1 + a_2 C^2$ станет оптимальным решением ТЗЛП2 ($a_2 = 4$). Полученные решения представлены в табл. 3.

Таблица 3

a_1	a_2	Решение задачи с матрицей $C = a_1 C^1 + a_2 C^2$	L_1	L_2
10	1	$x(10,\ 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 4 & 0 & 13 & 13 \\ 0 & 34 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$		19
1	4	$x(1,\ 4) = x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 13 & 14 \\ 16 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	62	

Для решения x выполняется $\Delta_1 + \Delta_2 < \min(L_1, L_2)$.

Ответ: решение x.

Примечание. Решения $x(10, 1)$ и $x(1, 4)$ оптимальны по критерию 5 ($r = 1$; $r = 2$).

Пример 2. Нахождение решения, для которого выполняется $\Delta_1 \le l_1, \Delta_2 \le l_2$, $l_1 > 0, l_2 > 0$.

Дано:

$$R = 2,\ a = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 25 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 14 \\ 34 \\ 23 \\ 29 \end{bmatrix},\ C^1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix},\ C^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_1 \le 35,\ \Delta_2 \le 25. \tag{15}$$

Матрицы стоимостей ТЗЛП1, ТЗЛП2 и ТЗЛП (задача с матрицей стоимостей $C = C^1 + C^2$), а также соответствующие им оптимальные решения и значения критериев приведены в табл. 4.

Таблица 4

Задача	Оптимальное решение	Значение критерия	Δ_1	Δ_2	$\Delta_1 + \Delta_2$
ТЗЛП1	$x^1 = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix}$	$f^1_{\text{opt}} = 312$	0	53	53
ТЗЛП2	$x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \\ 14 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$	$f^2_{\text{opt}} = 319$	88	0	88
ТЗЛП	$x = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix}$		9	38	47

В этом случае, для решения x $(x = x(1, 1))$ ограничение (15) по Δ_1 выполняется, но не выполняется по Δ_2. Согласно алгоритму, начнем увеличивать коэффициент a_2. При $a_2 = 1{,}5$ получаем, что $x(1, 1{,}5) = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$, у которого $\Delta_1 = 33$, $\Delta_2 = 22$, Условие (15) выполняется.

Ответ: результирующим решением является решение $x(1, 1{,}5)$.

Пример 3. Нахождение компромиссного решения

Пусть для задачи из примера 2 задано:

$$\Delta_1 \le 30, \tag{16}$$

$$\Delta_2 \le 30. \tag{17}$$

В этом случае для решения x имеем $\Delta_1 = 9$, $\Delta_2 = 38$ (см. табл. 4) — ограничение (16) выполняется, однако не выполняется ограничение (17). Увеличивая a_2, получаем, что при значении $a_2 = 1{,}5$ решение задачи с матрицей $C = C^1 + a_2 C^2$ изменилось ((16) не выполняется, (17) выполняется). Добавим к рассмотрению оптимальные решения ТЗЛП1 и ТЗЛП2 (x^1 и x^2 соответственно, см. табл. 4). В табл. 5 для этих решений приведены соответствующие им величины Δ_1 и Δ_2.

Таблица 5

№ п/п	Решение	a_1	a_2	Δ_1	Δ_2	l_1	l_2
1	$x(1, 1, 9, 38)$	1	1	9	38	30	30
2	$x(1, 1{,}5, 33, 22)$	1	1,5	33	22		
3	x^1	1	3	88	0		
4	x^2	3	1	0	53		

Как видим, одновременное выполнение условий (16) и (17) в этом случае невозможно. Согласно схеме нахождения компромиссного решения нужно выбрать

ISSN 0572-2691

одно из четырех решений: $x(1, 1, 9, 38)$, $x(1, 1{,}5, 33, 22)$, x^1 или x^2. Пусть экспертные весовые коэффициенты ограничений (16) и (17) составляют 0,6 и 0,4 соответственно. В табл. 6 приведены результаты расчетов.

Таблица 6

Решение	Нарушено условие	a_1	a_2	$\alpha_1(\Delta_1 - l_1)$, $\Delta_1 > l_1$	$\alpha_2(\Delta_2 - l_2)$, $\Delta_2 > l_{22}$
$x(1, 1, 9, 38)$	$\Delta_2 \le 30$	0,6	0,4	—	$0{,}4(38-30)=3{,}2$
$x(1, 1{,}5, 33, 22)$	$\Delta_1 \le 30$			$0{,}6(33-30)=1{,}8$	—
x^1	$\Delta_1 \le 30$			$0{,}6(88-30)=34{,}8$	—
x^2	$\Delta_2 \le 30$			—	$0{,}4(53-30)=9{,}2$

Согласно приведенным расчетам, минимум соответствует решению $x(1, 1{,}5, 33, 22)$.

$$\text{Ответ: } x(1, 1{,}5) = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Нахождение решения для случая $R = 4$.

Дано: векторы правых частей ограничений (12) и (13) взяты из примера 2.

Матрицы стоимостей ТЗЛП1, ТЗЛП2, ТЗЛП3, ТЗЛП4 и ТЗЛП с суммарной матрицей стоимостей, а также соответствующие им оптимальные решения и значения критериев приведены в табл. 7.

Таблица 7

Задача	Матрица стоимостей	Оптимальное решение	Значение критерия
ТЗЛП1	$C^1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	$x^1 = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix}$	$f^1_{\text{opt}} = 312$
ТЗЛП2	$C^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \\ 14 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$	$f^2_{\text{opt}} = 319$
ТЗЛП3	$C^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$	$x^3 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 14 & 0 & 11 \\ 14 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$	$f^3_{\text{opt}} = 308$
ТЗЛП4	$C^4 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 2 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$	$x^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 8 & 0 & 7 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 2 \\ 14 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$f^4_{\text{opt}} = 196$
ТЗЛП	$C = \begin{bmatrix} 10 & 16 & 19 & 14 \\ 16 & 20 & 23 & 8 \\ 21 & 19 & 27 & 16 \\ 14 & 19 & 18 & 16 \\ 18 & 16 & 15 & 26 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 14 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{bmatrix}$	

Отклонения по критериям 1-4 решения x таковы: $\Delta_1=114$, $\Delta_2=109$, $\Delta_3=73$, $\Delta_4=50$.

Поочередно, увеличивая $a_r, r=\overline{1,4}$, и сохраняя единичными остальные коэффициенты, найдем решения задач с матрицами $C=a_1C^1+a_2C^2+a_3C^3+a_4C^4$, у которых соответствующие значения Δ_r имеют нулевые значения. В табл. 8 приведены характеристики полученных решений.

Таблица 8

x	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	L_r
$x(8, 1, 1, 1)$	0	53	73	363	$L_1=\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4=489$
$x(1, 5, 1, 1)$	88	0	55	316	$L_2=\Delta_1+\Delta_3+\Delta_4=459$
$x(1, 5, 1, 1)$	81	45	0	234	$L_3=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_4=360$
$x(1, 1, 1, 19)$	244	183	123	0	$L_4=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=550$

Каждое из полученных решений оптимально по критерию 5.

Согласно табл. 8 $\min\{L_1, L_2, L_3, L_4\}=360$. Решением задачи является решение x, у которого $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4=346<360$.

Ниже приведены содержательные постановки ситуаций, которые приводят к добавлению к модели дополнительного ограничения (к сужению области допустимых решений) и невозможности применения известных эффективных методов решения транспортной задачи.

Пример 5. Многопродуктовая транспортная задача. Имеется m пунктов производства A_i, $i=\overline{1,m}$, в каждом из которых находится a_i^k единиц продукции k-го вида. Имеется также n пунктов потребления B_j, $j=\overline{1,n}$, в каждом из которых требуется b_j^k единиц продукции k-го вида $k=\overline{1,p}$. Известны величины c_{ij}^k — стоимость перевозки единицы продукции k-го вида из пункта производства A_i в пункт потребления B_j. Определить такой план перевозок $\{x_{ij}^k\}$ $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,p}$, ($x_{ij}^k\geq 0$ — количество продукции k-го вида, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j), чтобы суммарные транспортные затраты были минимальными.

Математическая модель задачи:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^k\leq a_i^k,\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p},$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^k=b_j^k,\quad j=\overline{1,n},\quad k=\overline{1,p},$$

$$x_{ij}^k\geq 0,\quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p}.$$

Задача распадается на p независимых ТЗЛП, каждая из которых решается эффективным методом решения (венгерским или методом потенциалов).

 ISSN 0572-2691

Пример 6. Многопродуктовая транспортная задача с ограничениями на пропускные способности дорог.

К условиям задачи из примера 5 добавляются дополнительные ограничения: d_{ij} — пропускная способность дороги из пункта A_i в пункт B_j, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Эти ограничения имеют вид

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ij}^{k} \le d_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Пример 7. Транспортная задача с ограничениями на суммарный объем продукции, вывозимой из заданного подмножества производителей.

К условиям однопродуктовой ТЗЛП добавляется дополнительное ограничение: суммарный объем продукции, вывозимый из заданного подмножества $M' \subset M = \{1, 2, \ldots, m\}$ производителей, ограничен величиной d:

$$\sum_{i \in M'} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} \le d.$$

Примечание 1. Задачи комбинаторной оптимизации 6 и 7 в детерминированной постановке решаются эффективным алгоритмом (одним из методов решения задачи линейного программирования общего вида). Это позволяет вводить в задачи 6 и 7 дополнительные линейные ограничения (что формально нарушает условие 2, см. введение), которое определяет исследуемый класс задач комбинаторной оптимизации. Этот факт упрощает реализацию только одной из приведенных выше процедур нахождения компромиссного решения: если существует допустимое решение задачи 6 или 7 по критерию 4, то вместо итерационной процедуры, не гарантирующей получение компромиссного решения по этому критерию, компромиссное решение получается решением R+1 задач линейного программирования: R задач, находящих $\sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij}^{k})^{r} (x_{ij}^{k})_{\text{opt}}^{r}$, $r = \overline{1, R}$, и задачи, в которую добавлены следующее ограничения: $\sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij}^{k})^{r} (x_{ij}^{k})^{r} - \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij}^{k})^{r} (x_{ij}^{k})_{\text{opt}}^{r} \le l_r$, $r = \overline{1, R}$.

Все остальные процедуры не изменяются.

Примечание 2. Класс задач комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности, введенный в [1, 2], может быть расширен:

1) функционал задачи в детерминированной постановке имеет вид (1);

2) существует эффективный алгоритм ее решения в детерминированной постановке;

3) под неопределенностью понимается неоднозначность значений весовых коэффициентов, входящих в критерий оптимизации.

Заключение

Показано, что решение транспортной задачи в условиях неопределенности принадлежит классу задач комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности, введенному А.А. Павловым [1, 2].

Нахождение компромиссного решения по критериям 1, 2, 3, 5 сводится к решению одной транспортной задачи в детерминированной постановке. Компромиссное решение по критерию 4 находится в результате реализации итерационной процедуры, приводящей либо к удовлетворению заданным ограничениям (см. критерий 4), либо к получению компромиссного решения на основе введенных дополнительных экспертных коэффициентов.

Эффективность предложенного подхода нахождения компромиссного решения ТЗЛП в условиях неопределенности проиллюстрирована на нескольких индивидуальных задачах.

Предложенный класс задач комбинаторной оптимизации можно расширить, задав лишь критерий вида (1) в детерминированной постановке при условии существования эффективного алгоритма ее решения.

О.А. Павлов, О.Г. Жданова

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Досліджено ефективність застосування запропонованих А.А. Павловим загальних теоретичних положень для знаходження компромісного вирішення одного класу задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності на прикладі вирішення транспортної задачі лінійного програмування. Досліджуваний клас задач характеризується тим, що: 1) критерій оптимізації є зваженою лінійною згорткою довільних числових характеристик допустимого розв’язку; 2) існує ефективний алгоритм розв’язання задачі в детермінованій постановці, який не дозволяє змінювати структуру обмежень; 3) під невизначеністю розуміється неоднозначність значень вагових коефіцієнтів, що входять в критерій оптимізації. Компромісні розв’язки знаходяться по одному з п’яти критеріїв. Сформульовано математичну модель транспортної задачі, в якій невизначеність обумовлена тим, що на етапі реалізації вирішення матриця питомих вартостей перевезень може приймати одне з декількох можливих значень. Описано практичні ситуації, що призводять до такої моделі. Метод знаходження компромісного розв’язку проілюстровано на прикладах кількох індивідуальних транспортних задач в умовах невизначеності. Дослідження підтвердило ефективність застосування на практиці загальних теоретичних положень і дозволило істотно розширити клас задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності, для яких застосовано ці теоретичні результати.

Ключові слова: невизначеність, комбінаторна оптимізація, компромісний розв’язок, транспортна задача лінійного програмування.

A.A. Pavlov, E.G. Zhdanova

THE TRANSPORTATION PROBLEM UNDER UNCERTAINTY

The efficiency of applying the general theoretical positions proposed by A.A. Pavlov to find a compromise solution for one class of combinatorial optimization problems under uncertainty by the example of solving the transportation linear programming problem. The studied class of problems is characterized as follows: 1) the optimization criterion is a weighted linear convolution of arbitrary numerical characteristics of a feasible solution; 2) there exists an efficient algorithm to solve the problem in the deterministic formulation that does not allow changing the structure of constraints; 3) as the uncertainty, we understand the ambiguity of values of the weight coefficients included in the optimization criterion. We search for compromise solutions according to one of the five criteria. A mathematical model of the transportation problem is formulated, in which the uncertainty means that the matrix of transportation costs-per-unit can take one of several possible values at the stage of the solution implementation. Practical situations which lead to such a model are described. We illustrate the method of finding a compromise solution by several transportation problem instances under uncertainty. The research confirmed the efficiency of practical application of the general theoretical principles and allowed one to expand significantly the class of combinatorial optimization problems under uncertainty for which these theoretical results are applicable.

Keywords: uncertainty, combinatorial optimization, compromise solution, transportation problem.

1. Pavlov A.A. Optimization for one class of combinatorial problems under uncertainty. *Адаптивні системи автоматичного управління*. 2019. **1**. № 34. С. 81–89. doi: 10.20535/1560-8956.1.2019.178233.
2. Pavlov A.A. Combinatorial optimization under uncertainty and formal models of expert estimation. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ».* 2019. № 1. С. 3–7. doi: 10.20998/2079-0023.2019.01.01.
3. Zgurovsky M.Z., Pavlov A.A. Combinatorial optimization problems in planning and decision making: Theory and applications, 1st edn. Studies in Systems. *Decision and Control*. 173, Springer, Cham. 2019. 526 p. DOI: 10.1007/978-3-319-98977-8.
4. Згуровский М.З., Павлов А.А. Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений. Киев : Наук. думка. 2016. 716 с.
5. Ногин В.Д. Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации. *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2014. № 4. С. 73–82.
6. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Problem of selecting an optimal portfolio with a probabilistic risk function. *Journal of Mathematical Sciences* 2016. **216**, N 5. P. 603–611. https://doi.org/10.1007/s10958-016-2921-z.
7. Kharchenko A., Halay I., Zagorodna N., Bodnarchuk I. Trade-off optimal decision of the problem of software system architecture choice. Xth International scientific and technical conference "Computer Sciences and Information Technologies" (CSIT). 2015. P. 198–205. http://doi.org/10.1109/STC-CSIT.2015.7325465.
8. Новикова Н.М., Поспелова И.И., Зенюков А.И. Метод сверток в многокритериальных задачах с неопределенностью. *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2017. № 5. С. 27–45. http://doi.org/10.7868/S0002338817050031.
9. Bindima T., Elias E. A novel design and implementation technique for low complexity variable digital filters using multi-objective artificial bee colony optimization and a minimal spanning tree approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence.* 2017. **59**. P. 133–147. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2016.12.011.
10. Mirzapour S.M.J., Hashem Al.-E., Malekly H., Aryanezhad M.B. A multi-objective robust optimization model for multi-product multi-site aggregate production planning in a supply chain under uncertainty. International Journal of Production Economics. 2011. **134.** P. 28–42. https://doi:10.1016/j.ijpe.2011.01.027.
11. Ємець О.О., Барболіна Т.М. Лінійні оптимізаційні задачі на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю: властивості і розв'язання. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2016. № 1. С. 107–119. https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2016.1.11.
12. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М. : Вильямс, 2005. 912 с.

Получено 22.01.2020