УДК 519.85

Л.Н. Колечкина, А.Н. Нагорная

УСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ НА МНОЖЕСТВЕ РАЗМЕЩЕНИЙ

Ключевые слова: оптимизация, математическая модель, квадратичная функция, множество размещений, опорное решение, оптимальное решение.

Введение

Исследование задач комбинаторной оптимизации базируется на довольно широком спектре математических моделей, связанных с необходимостью решения различных важных практических проблем оптимального планирования, управления и проектирования [1–7]. В связи с этим в последнее время появилось много работ, посвященных исследованию задач комбинаторной оптимизации на различных комбинаторных множествах и разработке новых подходов к их решению [8–15].

Интересной особенностью комбинаторных задач являются погружения в евклидово комбинаторное пространство. Исследованию комбинаторных задач в R^n пространстве и разработке методов их решения, основанных на свойствах комбинаторных множеств, погруженных в евклидово пространство, посвящены работы [4, 5, 7, 10, 13].

Задачи комбинаторной оптимизации рассматриваются на разных комбинаторных множествах и с различными целевыми функциями [16–27]. Следует отметить, что класс задач нелинейного программирования значительно шире линейного и большое количество задач прикладного характера решается при моделировании определенных процессов нелинейными функциями. Значительного внимания заслуживает квадратичная функция, которая является частным случаем нелинейной, представленной в виде суммы линейной и квадратичной функций. В [4] описаны некоторые приложения теории оптимизации квадратичных функций на евклидовых комбинаторных множествах.

Ряд практических задач технико-экономического содержания моделируется задачами с квадратичными целевыми функциями, и значительное количество моделей разработаны как вспомогательные или промежуточные [4]. В связи с этим возникает необходимость оценить существующие методы решения и создать новые подходы и алгоритмы для решения задач комбинаторной оптимизации с нелинейными целевыми функциями [28–30].

В статье представлена условная оптимизационная задача с квадратичной функцией цели на множестве размещений. Здесь сформулирована постановка задачи и ее свойства, а также предлагается метод решения комбинаторной задачи с квадратичной функцией цели на множестве размещений и пример ее решения.

При реализации метода находится первый опорный план и осуществляется проверка возможного его улучшения за счет сформулированных неравенств, налагаемых на элементы множества размещений.

1. Постановка задачи

Пусть $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ — конечное множество различных элементов произвольной природы. Рассмотрим комбинаторное множество P, порожденное Λ.

Определение 1 [4]. Множество P назовем евклидовым комбинаторным, если его элементами являются упорядоченные наборы элементов множества Λ.

Обозначим $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда каждый элемент $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_n\} \in P$ представляет собой упорядоченный набор

$$\pi = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{j_n}\}, \ i, j \in J_m, \ j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Примерами евклидовых комбинаторных множеств являются множества P_n перестановок из n символов без повторений, множество P_{nk} перестановок из n символов, из которых k различных, множество $\overline{P}_k^n$ k размещений без повторений, множество $\overline{P}_k^n$ k размещений с повторениями и т.д.

Отобразим множество P в арифметическое евклидово пространство [4]. Пусть $M = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ — множество k различных действительных чисел. Установим взаимно-однозначное соответствие f между элементами множества Λ и M:

$$\mu_i = f(\lambda_i), \ \lambda_i = f^{-1}(\mu_i), \ i = 1, 2, \dots, m.$$

Осуществим биекцию множества P на подмножество $\pi : E_f \subset E.$

Каждому элементу $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ вида (1) поставим в соответствие вектор $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \subset R^n$ по следующему правилу:

$$x_1 = f(\pi_i), \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Перенумеруем элементы множества Λ. Поставим в соответствие множеству Λ множество номеров его элементов, т.е. положим $M = J_m = \{1, \dots, m\}$. Пусть $\pi \in P$ и имеет вид (2). Тогда

$$x_j = i_j, \ j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим случай, когда элементами множества Λ являются действительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Тогда элементу $x \in E$ вида (1) можно поставить в соответствие вектор $x(x_1, \dots, x_n)$ с координатами $x_j = \lambda_{i_j}, i_j \in J_m, \ j = 1, \dots, n.$

В дальнейшем представим комбинаторные множества, порожденные действительными числами. Пусть P_k^n — множество n размещений без повторений, индуцируемое $k > n$ различными символами из множества $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Образ множества P_k^n при отображении в R^n обозначим E_k^n. Всякая точка $x \in E_k^n$ обладает тем свойством, что ее координаты принимают различные значения из множества действительных чисел $M = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, т.е. $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in M, \, x_i \neq x_j \ \forall i, \, j \in J_k, \, i \neq j.$ Соответственно, выполняется равенство

$$E_k^n = E_{nn} = E_n.$$

Рассмотрим множество P_k^n n размещений с повторениями, индуцируемое k символами из множества Λ. Образ множества $\overline{P}_k^n$ в R^n обозначим $\overline{E}_k^n$. Всякая точка $x \in \overline{E}_k^n$ обладает тем свойством, что ее координаты могут принимать любые значения из множества действительных чисел $M = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, т.е. $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in M, \, i = 1, \dots, n.$

Рассмотрим задачу оптимизации функционала на евклидовом комбинаторном множестве. Пусть на евклидовом комбинаторном множестве P задан функционал $k(\pi)$. Требуется найти точку $\pi^* \in R$, такую, что $k(\pi^*) = \underset{\pi \in P}{\text{extr}}(\pi)$. При отображении множества P в евклидово пространство R^n можно сформулировать задачу оптимизации некоторой функции $\varphi(x)$ на множестве E, причем каждой точке $\pi \in P$ будет соответствовать точка $x \in E$, такая, что $\varphi(x) = k(\pi)$. В результате имеем задачу математического программирования: требуется найти точку $x^* \in E$, такую, что

$$\varphi(x^*) = \underset{x \in E}{\text{extr}}\, \varphi(x).$$

Далее задачу запишем в виде

$$Z(F, P_k^n) : \text{extr}\{F(a) \mid X \in D \subset P_k^n\} \tag{3}$$

при дополнительных условиях

$$D = \{x \in P_k^n \subset R^n \mid Gx \le (\ge) b\}, \tag{4}$$

где $\Phi(a) = F(x)$ при $a \in P_k^n$, $x \in P_k^n$,

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{5}$$

Таким образом, рассматривается условная оптимизация задачи с квадратичной функцией цели на множестве размещений.

Согласно [27, 31] выпуклой оболочкой точек комбинаторного множества размещений является многогранник размещений $M(P_k^n)$. Многогранник размещений при $(n < k)$ комбинаторно эквивалентен перестановочному многограннику размерности n $M(P_n)$. Тогда X — непустое множество в R^n, которое обозначим следующим образом: $X = \text{vert}\, M(P_k^n)$, $M = \text{conv}\, P_n$.

Эквивалентность многогранников позволяет рассчитать количество транспозиций элементов множества размещений в многограннике размещений [7]:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = p. \tag{6}$$

На основании изложенных выше свойств и утверждений предложен метод решения оптимизационной задачи с квадратичной функцией цели на множестве размещений.

2. Метод решения комбинаторной задачи с квадратичной функцией цели на множестве размещений

Метод решения состоит из трех шагов. На первом шаге строится граф решений, на втором — находится множество опорных решений с учетом выполнения ограничений задачи (3)–(5), на третьем — из множества опорных решений выбирается оптимальное, при котором квадратичная целевая функция (5) достигает своего экстремального значения.

Далее рассмотрим более подробно изложенный метод для предложенной задачи.

Шаг 1. Построение графа поиска решений задачи. Задача (3)–(5) рассматривается на множестве размещений P_k^n, естественно полагать, что допустимым множеством решений является множество размещений. Граф G поиска решений представляет собой подмножества размещений, где отображаются точки множества размещений, которые формируются при рассмотрении транспозиции элементов множества. Из этого следует, что граф G является лишь частью многогранника размещений $M(P_k^n)$. Назовем данное подмножество множеством транспозиций S^{tr}, представленным в виде графа G (рис. 1).

$$G \subseteq M(P_k^n) \Rightarrow S^{tr} \subseteq P_k^n(A). \tag{7}$$

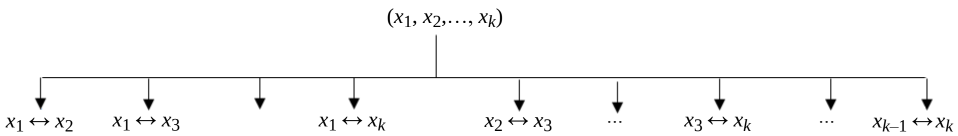

Рис. 1

С помощью формулы (6) вычисляем количество транспозиций элементов множества размещений. При рассмотрении каждой транспозиции элементов множества размещений квадратичную функцию цели (5) необходимо представить в виде произведения двух сомножителей:

$$F_{ij} = (x_i - x_j)(a_{ij}x_i + a_{ij}x_j + \ldots + a_k x_k), \tag{8}$$

где $i = 1, 2, \ldots, k,\quad j = 2, \ldots, k.$.

Таким образом, на данном шаге составляются все возможные транспозиции в количестве $p,$ которые определяют дальнейшее представление множества точек размещений в виде перестановки соответствующих элементов (рис. 2). Данные точки представляют собой подграфы графа G и составляют подмножества множества транспозиций S^{tr} (рис. 2).

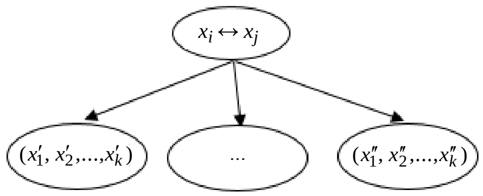

Рис. 2

Тогда множество транспозиций S^{tr} будет иметь вид

$$S^{tr} = S_1^{tr} \cup S_2^{tr} \cup \ldots \cup S_q^{tr},\ q = [1, 2, \ldots, p], \tag{9}$$

где S_q^{tr} — множество точек, представляющее собой подграфы графа $G.$

Количество точек, которые формируют подграфы графа $G,$ т.е. принадлежащих одной транспозиции, определяется выполнением условий сформированных задач $p,$ которые рассматриваются на следующем шаге.

Шаг 2. Нахождение опорного множества решений задачи. На данном шаге осуществляется нахождение множества опорных решений, которое состоит из нерассмотренных на первом шаге точек множества размещений P_k^n и оптимального решения, которое принадлежит S^{tr}.

Шаг 2.1. Составление задач, определяющих транспозиции элементов множества размещений**.** Для каждой функции (8) с учетом ее экстремальности необходимо сформировать дополнительные ограничения. Таким образом, составляем p задач.

Задача 1.

$$x_1 \leftrightarrow x_i, (i = 2,\ldots,k):$$

$$x_1 \leftrightarrow x_2: \ \operatorname{extr} F_{12} = (x_1 - x_2)(a_{12}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{k2}x_k),$$

$$\begin{cases} x_1 > (<)\, x_2, \\ x_1 > (<)\, x_3, \\ \quad \ldots \\ x_1 > (<)\, x_k, \\ x_2 > (<)\, x_3, \\ \quad \ldots \\ x_{k-1} < (>)\, x_k \end{cases}$$

… … … .

Задача 2.

$$x_2 \leftrightarrow x_k, (i = 3,\ldots,k), \ \ \operatorname{extr} F_{2k} = (x_2 - x_k)(a'_{1k}x_1 + a'_{2k}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k); \qquad (10)$$

$$\begin{cases} x_1 > (<)\, x_2, \\ x_1 > (<)\, x_3, \\ \quad \ldots \\ x_1 > (<)\, x_k, \\ x_2 > (<)\, x_3, \\ \quad \ldots \\ x_{k-1} < (>)\, x_k \end{cases}$$

… … … .

Задача *p*.

$$x_{k-1} \leftrightarrow x_k, \ \ \operatorname{extr} F_{k-1k} = (x_{k-1} - x_k)(a'_{1k-1}x_1 + a'_{2k-1}x_2 + \ldots a'_{kk-1}x_{k-1} + a'_{kk-1}x_k).$$

$$\begin{cases} x_1 > (<)\, x_2, \\ x_1 > (<)\, x_3, \\ \quad \ldots \\ x_1 > (<)\, x_k, \\ x_2 > (<)\, x_3, \\ \quad \ldots \\ x_{k-1} < (>)\, x_k. \end{cases}$$

Шаг 2.2. Нахождение множества опорных решений задачи**.** При решении каждой задачи (10) на множестве размещений P_k^n с учетом дополнительных ограничений формируются соответствующие определенным подграфам (рис. 2) подмножества транспозиций вида S_q^{tr}

$$S_q^{tr} = S_q^{op} \cup S_q^{con} \cup S_q^{cl}, \ \ q = [1, 2,\ldots, p], \qquad (11)$$

где S_q^{op} — подмножество точек подграфа графа G, которые удовлетворяют ограничениям; S_q^{con} — подмножество точек подграфа графа G, которые не удовлетворяют ограничениям; S_q^{cl} — подмножество отсеченных точек подграфа графа $G,$ не принадлежащих двум предыдущим подмножествам.

Тогда множество транспозиций $S^{tr},$ представленное в виде графа $G,$ будет иметь вид

$$S^{tr} = S^{op} \bigcup S^{con} \bigcup S^{cl}, \tag{12}$$

где $S^{op} = S_1^{op} \bigcup S_2^{op} \bigcup ... \bigcup S_p^{op},$ $q = [1, 2, ..., p];$ $S^{con} = S_1^{con} \bigcup S_2^{con} \bigcup ... \bigcup S_p^{con};$ $S^{cl} =$ $= S_1^{cl} \bigcup S_2^{cl} \bigcup ... \bigcup S_p^{cl}.$

Возможен вариант $S^{op} = 0,$ когда нет точек множества допустимых решений, которые удовлетворяли бы (4) и (8) одновременно.

На каждом подграфе графа G осуществляется проверка дополнительных ограничений (4) задачи (3)–(5). Следует учесть, что при проверке первой точки подграфов графа G необходимо сформировать ограничения вида

$$\begin{cases} g_1'(x_1^1, x_2^1, ..., x_{n-1}^1, x_n^1) = b_1' \le (\ge)\, b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ g_i'(x_1^i, x_2^i, ..., x_{n-1}^i, x_n^i) = b_i' \le (\ge)\, b_i. \end{cases} \tag{13}$$

Если рассматриваемая точка удовлетворяет всем ограничениям (4), то составляем необходимые условия для приростов ограничений:

$$\begin{cases} \Delta g_1' \ge (\le)\, b_{11}, b_{11} = b_1 - b_1', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta g_i' \ge (\le)\, b_{ii}, b_{ii} = b_i - b'. \end{cases} \tag{14}$$

Для всех последующих точек расчета прирост ограничений находится по формуле:

$$\Delta g = \Delta g_2 - \Delta g_1 = c_j (x_i^{g_2} - x_j^{g_1}) + c_i (x_j^{g_2} - x_i^{g_1}). \tag{15}$$

Для нахождения прироста Δf целевой функции (5) нужно использовать необходимую форму целевой функции в зависимости от транспозиции элементов в рассматриваемой точке подграфов графа G (8).

Если ограничения не выполняются, но приросты целевой функции возрастают (при максимизации (5)) или убывают (при минимизации (5)), то проверка продолжается, в противном случае необходимо перейти к следующей задаче вида (10), т.е. на следующий подграф графа G согласно транспозиции элементов.

Следует также отметить, что если ограничения выполняются, но целевая функция убывает (при максимизации) или возрастает (при минимизации), то дальнейшая проверка точек множества также продолжается.

Поиск опорного решения прекращается только в случае невыполнения ограничений (4) и неудовлетворения экстремальности функции цели (5).

Согласно (7) можно утверждать, что существуют нерассмотренные точки множества $P_k^n,$ которые не принадлежат $S^{tr}.$ Они будут образовывать подмножество допустимых решений:

$$S^{as} = P_k^n(A) \setminus S^{tr}. \tag{16}$$

Множество S^{ac} является подмножеством P_k^n соответственно

$$P_k^n = S^{tr} \bigcup S^{as}. \tag{17}$$

Из множества S^{op} выбирается точка экстремума x_{extr}, при которой $\text{extr}\,F(x_{\text{extr}})$. Тогда множество опорных решений S^{sup} будет иметь вид

$$S^{\text{sup}} = S^{as} \bigcup x_{\text{extr}}. \tag{18}$$

Следовательно, для нахождения множества опорных решений необходимо найти наилучшую точку множества S^{op} и рассмотреть все точки множества P_k^n, которые не принадлежат графу G.

Шаг 3. Нахождение оптимального решения. Для нахождения оптимального решения необходимо взять точку x_{extr} и поочередно рассмотреть все точки множества S^{ac}, которые находятся левее или правее данной точки, в зависимости от экстремума функции (5). Согласно определению множество размещений учитывает порядок следования элементов, поэтому нет необходимости в упорядочении точек множества S^{ac}.

Следует отметить, что при рассмотрении точек множества S^{ac} значение целевой функции и ограничений вычисляется только для первой точки, для всех последующих необходимо использовать формулы (8),(15), т.е. необходимо выполнение шага 2.2.

Далее рассмотрим примеры, для решения которых будет использован изложенный метод.

Пример. Необходимо найти максимальное значение квадратичной функции вида $F(x) = 7x_1^2 - 5x_2^2 - 3x_3^2 + 0{,}5x_4^2 + 3x_1x_2x_3 - 2x_1x_4 + 5x_3x_4 + 0{,}2x_1x_3x_4 + 0{,}7x_2x_4$ на множестве размещений P_5^4, которое образовано с помощью чисел $A = (1, 2, 3, 4, 5)$ с учетом следующих линейных ограничений:

$$\begin{cases} g_1 = -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 25, \\ g_2 = -4x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 40, \\ g_3 = -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 56, \\ g_4 = 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 12x_4 \geq 71. \end{cases}$$

Решение. Согласно (6), $p = 6$. Соответственно, необходимо рассмотреть транспозиции элементов x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4. Граф G поиска решений будет иметь вид, представленный на рис. 3.

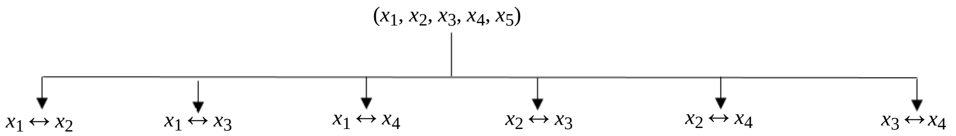

Рис. 3

Для первой транспозиции x_1x_2 составляем квадратичную функцию

$$F_{12} = (x_1 - x_2)(12x_1 + 12x_2 - 2{,}7x_4 + 0{,}2x_3x_4).$$

С учетом максимизации функции цели формируем условия дальнейшего поиска максимального значения:

$$\begin{cases} x_1 > x_2, \\ x_4 \to \min, \\ x_3 > x_4. \end{cases}$$

 ISSN 0572-2691

Тогда подграф G_{12} графа G будет иметь вид, как на рис. 4.

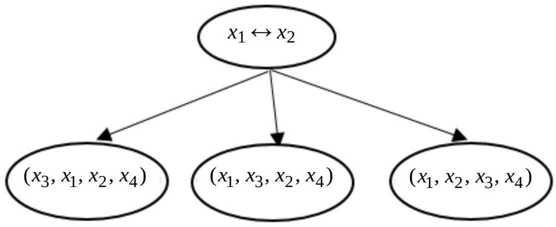

Рис. 4

С учетом рис. 4 необходимо рассмотреть точки множества размещений (табл. 1).

Таблица 1

№	(x_3, x_1, x_2, x_4)	(x_1, x_3, x_2, x_4)	(x_1, x_3, x_2, x_4)
1	(4, 3, 5, 2)	(5, 3, 4, 2)	(5, 4, 3, 2)
2	(4, 3, 5, 1)	(5, 3, 4, 1)	(5, 4, 3, 1)
3	(4, 2, 5, 1)	(5, 2, 4, 1)	(5, 4, 2, 1)
4	(3, 2, 5, 1)	(5, 2, 3, 1)	(5, 3, 2, 1)
5	(3, 2, 4, 1)	(4, 2, 3, 1)	(4, 3, 2, 1)

Осуществим проверку точек вида (x_3, x_1, x_2, x_4).

Точка $(4, 3, 5, 2)$: первое условие $g_1(4, 3, 5, 2) = 20 < 25$ не выполняется, функция цели $f(4, 3, 5, 2) = 220{,}20$. Тогда $\Delta g_1 \geq 5$.

Рассмотрим следующую точку $(4, 3, 5, 1)$: первое условие $\Delta g_1(4, 3, 5, 1) = = -5 < 5$ не выполняется, а функция цели убывает, поскольку прирост $\Delta f(4, 3, 5, 1) = = -24{,}6 < 0$.

Следовательно, нет необходимости рассматривать точки, меньше точки $(4, 3, 5, 1)$, т.е. ниже данной на подграфе G_{12}, согласно табл. 1, они будут входить во множество отсеченных точек при транспозиции $x_1 x_2$.

Аналогично проверим точки вида (x_1, x_3, x_2, x_4).

Точка $(5, 3, 4, 2)$: первое условие $g_1(5, 3, 4, 2) = 15 < 25$ не выполняется, $\Delta g_1 \geq 10$, функция цели $f(5, 3, 4, 2) = 296{,}20$.

Точка $(5, 3, 4, 1)$: первое условие $\Delta g_1(5, 3, 4, 1) = -5 < 10$ не выполняется, функция цели убывает $\Delta f(5, 3, 4, 1) = -17{,}6 < 0$.

Следовательно, точки, меньше точки $(5, 3, 4, 1)$, т.е. ниже данной на подграфе G_{12}, согласно табл. 1, будут входить во множество отсеченных точек при транспозиции $x_1 x_2$.

Для точек вида (x_1, x_3, x_2, x_4) имеем следующее.

Точка $(5, 4, 3, 2)$: первое условие $g_1(5, 4, 3, 2) = 13 < 25$ не выполняется, $\Delta g_1 \geq 12$, а функция цели равна $f(5, 4, 3, 2) = 271{,}60$.

Точка $(5, 4, 3, 1)$: $\Delta g_1(5, 4, 3, 1) = -5 < 12$ не выполняется, а функция цели убывает $\Delta f(5, 4, 3, 1) = -12{,}3 < 0$.

Точки, меньше точки $(5, 4, 3, 1)$, т.е. ниже данной на подграфе G_{12}, согласно табл. 1, будут входить в подмножество отсеченных точек при транспозиции $x_1 x_2$.

Подмножество отсеченных точек при транспозиции $x_1 x_2$ будет иметь такой вид:

$$S_{12}^{cl} = ((4, 2, 5, 1),\ (3, 2, 5, 1),\ (3, 2, 4, 1),\ (5, 2, 4, 1),\ (5, 2, 3, 1),$$
$$(4, 2, 3, 1),\ (5, 4, 2, 1),\ (5, 3, 2, 1),\ (4, 3, 2, 1)).$$

Подмножество оптимальных точек $S_{12}^{op} = 0$.

Подмножество точек, не удовлетворяющих ограничениям, — $S_{12}^{con} = ((4, 3, 5, 2),$ $(4, 3, 5, 1), (5, 3, 4, 2), (5, 3, 4, 1), (5, 4, 3, 2), (5, 4, 3, 1))$.

Для второй транспозиции x_1x_3 составляем квадратичную функцию

$$F_{13} = (x_1 - x_3)(10x_1 + 10x_3 - 7x_4).$$

Формируем условия дальнейшего поиска максимального значения:

$$\begin{cases} x_1 > x_3, \\ x_4 \to \min. \end{cases}$$

Согласно изложенному выше условию необходимо рассмотреть точки подграфа G_{13} (рис. 5).

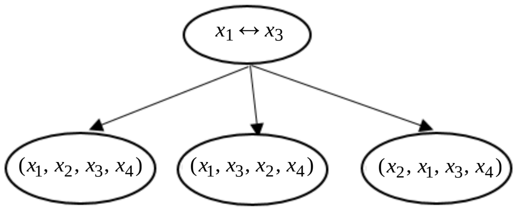

Рис. 5

Точки (x_3, x_1, x_2, x_4), (x_1, x_3, x_2, x_4) рассмотрены при транспозиции x_1x_2 в подграфе G_{12}, поэтому необходимо рассмотреть только точки вида (x_2, x_1, x_3, x_4): $(4, 5, 3, 2), (4, 5, 3, 1), (4, 5, 2, 1), (3, 5, 2, 1), (3, 4, 2, 1)$.

Осуществим проверку точек (x_2, x_1, x_3, x_4).

Точка $(4, 5, 3, 2)$: первое условие $g_1(4, 5, 3, 2) = 11 < 25$ не выполняется, $\Delta g_1 \geq$ ≥ 14, функция цели $f(4, 5, 3, 2) = 167{,}8$.

Рассмотрим следующую точку множества.

Точка $(4, 5, 3, 1)$: $\Delta g_1(4, 5, 3, 1) = 5 < 14$ не выполняется, а функция цели убывает $\Delta f(4, 5, 3, 1) = -14{,}4 < 0$.

Точки, меньше точки $(4, 5, 3, 1)$, т.е. ниже данной на подграфе G_{13}, нет необходимости рассматривать, они будут входить во множество отсеченных точек при транспозиции элементов x_1x_3.

Подмножество отсеченных точек при транспозиции элементов x_1x_3 будет иметь вид: $S_{13}^{cl} = ((4, 5, 2, 1), (3, 5, 2, 1), (3, 4, 2, 1))$.

Тогда $S_{13}^{op} = 0$, $S_{13}^{con} = ((4, 5, 3, 2), (4, 5, 3, 1))$.

Для транспозиции x_1x_4 квадратичная функция имеет вид: $F_{14} = (x_1 - x_4) \times$ $\times (6{,}5x_1 + 6{,}5x_4 - 0{,}7x_2 - 5x_3 + 3x_2x_3)$.

Формируем условия дальнейшего поиска максимального значения

$$\begin{cases} x_1 > x_4, \\ x_1 \to \max, \\ x_3 \to \min, \\ x_2 < x_4. \end{cases}$$

Необходимо рассмотреть точки подграфа G_{14} (рис. 6).

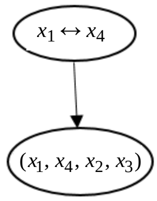

Рис. 6

Тогда (x_1, x_4, x_2, x_3): (5, 3, 2, 4), (5, 3, 1, 4), (5, 2, 1, 4), (5, 2, 1, 3), (4, 2, 1, 3).

Точка (5, 3, 2, 4): первое условие $g_1(5, 3, 2, 4) = 19 < 25$ не выполняется, $\Delta g_1 \geq 6$, функция цели $f(5, 3, 2, 4) = 232{,}4$.

Точка (5, 3, 1, 4): $\Delta g_1(5, 3, 1, 4) = -3 < 6$ не выполняется, а функция цели убывает $\Delta f(4, 5, 3, 1) = -60{,}4 < 0$.

Точки, меньше точки (5, 3, 1, 4), т.е. ниже данной на подграфе G_{14}, нет необходимости рассматривать, они будут входить в подмножество отсеченных точек при транспозиции x_1x_4 : S_{14}^{cl} = ((5, 2, 1, 4), (5, 2, 1, 3), (4, 2, 1, 3)).

Тогда $S_{14}^{op} = 0$, S_{14}^{con} = ((5, 3, 2, 4), (5, 3, 1, 4)).

Для транспозиции x_2x_3 составляем квадратичную функцию $F_{23} = (x_3 - x_2)(2x_1 + 2x_3 + 0{,}2x_1x_4 + 4{,}3x_4)$.

Формируем условия дальнейшего поиска максимального значения:

$$\begin{cases} x_3 > x_2, \\ x_4 \to \max. \end{cases}$$

Подграф G_{23} для данной транспозиции будет иметь вид, представленный на рис. 7.

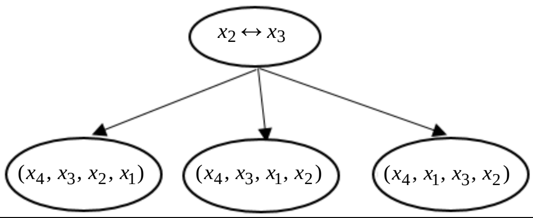

Рис. 7

С учетом составленного условия необходимо рассмотреть точки подграфа G_{23} (табл. 2).

Таблица 2

№	(x_4, x_3, x_2, x_1)	(x_4, x_3, x_1, x_2)	(x_4, x_1, x_3, x_2)
1	(2, 3, 4, 5)	(3, 2, 4, 5)	(4, 2, 3, 5)
2	(1, 3, 4, 5)	(3, 1, 4, 5)	(4, 1, 3, 5)
3	(1, 2, 4, 5)	(2, 1, 4, 5)	(4, 1, 2, 5)
4	(1, 2, 3, 5)	(2, 1, 3, 5)	(3, 1, 2, 5)
5	(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 3, 4)	(3, 1, 2, 4)

Проверим точки (x_4, x_3, x_2, x_1).

Точка (2, 3, 4, 5): $g_1(2, 3, 4, 5) = 36 \geq 25$, $g_2(2, 3, 4, 5) = 38 \leq 40$, $g_3(2, 3, 4, 5) = 56 \leq 56$, $g_4(2, 3, 4, 5) = 80 \geq 71$ выполняются, функция цели $f(2, 3, 4, 5) = 118$. Тогда $\Delta g_1 \geq -11$, $\Delta g_2 \leq 2$, $\Delta g_3 \leq 0$, $\Delta g_4 \geq -9$.

Точка (1, 3, 4, 5): $\Delta g_1(1, 3, 4, 5) = 2 > -11$ выполняется, $\Delta g_2(1, 3, 4, 5) = 4 > 2$ не выполняется, а функция цели убывает, поскольку прирост $\Delta f(1, 3, 4, 5) = -51$.

Следовательно, нет необходимости рассматривать точки, меньше точки $(1, 3, 4, 5)$, т.е. ниже данной на подграфе G_{23}, согласно табл. 2, они будут формировать множество отсеченных точек при данной транспозиции.

Проверим точки вида (x_4, x_3, x_1, x_2).

Точка $(3, 2, 4, 5)$: $g_1(3, 2, 4, 5) = 33 \geq 25$, $g_2(3, 2, 4, 5) = 33 \leq 40$, $g_3(3, 2, 4, 5) = 49 \leq 56$, $g_4(3, 2, 4, 5) = 87 \geq 71$ выполняются, функция цели $f(3, 2, 4, 5) = 168{,}5$. Тогда $\Delta g_1 \geq -11$, $\Delta g_2 \leq 7$, $\Delta g_3 \leq 7$, $\Delta g_4 \geq -16$.

Точка $(3, 1, 4, 5)$: $\Delta g_1 = -1 \geq -11$, $\Delta g_2 = -1 \leq 7$, $\Delta g_3 = 4 \leq 7$, $\Delta g_4 = 2 \geq -16$ выполняются, функция цели $\Delta f(3, 1, 4, 5) = -24{,}5$. Поскольку прирост функции убывает, а все ограничения выполняются, следует продолжить поиск решения. Необходимо учесть, что $\Delta g_1 \geq -10$, $\Delta g_2 \leq 8$, $\Delta g_3 \leq 3$, $\Delta g_4 \geq -18$.

Точка $(2, 1, 4, 5)$: $\Delta g_1 = 2 \geq -10$, $\Delta g_2 = 4 \leq 8$, $\Delta g_3 = 3 \leq 3$, $\Delta g_4 = -5 \geq -18$ выполняются, функция цели $\Delta f(2, 1, 4, 5) = -41$. Поскольку прирост функции убывает, а все ограничения выполняются, следует продолжить поиск решения. Необходимо учесть, что $\Delta g_1 \geq -12$, $\Delta g_2 \leq 4$, $\Delta g_3 \leq 0$, $\Delta g_4 \geq -13$.

Точка $(2, 1, 3, 5)$: $\Delta g_1 = -3 \geq -12$, $\Delta g_2 = -2 \leq 4$, $\Delta g_3 = -5 \leq 0$, $\Delta g_4 = -4 \geq -13$ выполняются, функция цели $\Delta f(2, 1, 3, 5) = -12$. Поскольку прирост функции убывает, а все ограничения выполняются, следует продолжить поиск решения. Необходимо учесть, что $\Delta g_1 \geq -9$, $\Delta g_2 \leq 2$, $\Delta g_3 \leq 5$, $\Delta g_4 \geq -9$.

Точка $(2, 1, 3, 4)$: $\Delta g_1 = -5 \geq -9$, $\Delta g_2 = -7 \leq 2$, $\Delta g_3 = -6 \leq 5$ выполняются, $\Delta g_4 = -12 < -9$ не выполняется, функция цели $\Delta f(2, 1, 3, 4) = -17{,}4$. Данная точка не является оптимальной.

Подмножество отсеченных точек при транспозиции x_2, x_3: $S_{23}^{cl} =$ ((1, 2, 4, 5), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 4), (3, 1, 2, 5), (3, 1, 2, 4)).

$S_{23}^{op} =$ ((2, 3, 4, 5), (3, 2, 4, 5), (3, 1, 4, 5), (2, 1, 4, 5), (2, 1, 3, 5), (4, 2, 3, 5), (4, 1, 3, 5)).

$$S_{23}^{con} = ((1, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 4), (4, 1, 2, 5)).$$

Для транспозиции x_2, x_4 составляем квадратичную функцию

$$F_{24} = (x_4 - x_2)(5{,}5x_2 + 5{,}5x_4 - 2x_1 + 5x_3 - 2{,}8x_1x_3).$$

Условия дальнейшего поиска максимального значения имеют вид

$$\begin{cases} x_4 > x_2, \\ x_4 \to \max, \\ x_1 \to \min. \end{cases}$$

Согласно изложенным выше условиям необходимо рассмотреть точки подграфа G_{24}: (x_4, x_2, x_3, x_1), (x_4, x_3, x_2, x_1), (x_4, x_2, x_1, x_3) (рис. 8).

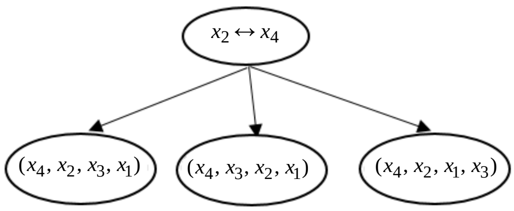

Рис. 8

 ISSN 0572-2691

Точки (x_4, x_3, x_2, x_1) рассмотрены при транспозиции элементов $x_2 x_3$, поэтому рассмотрим точки согласно табл. 3.

Таблица 3

№	(x_4, x_2, x_3, x_1)	(x_4, x_2, x_1, x_3)
1	(2, 4, 3, 5)	(3, 4, 2, 5)
2	(1, 4, 3, 5)	(3, 4, 1, 5)
3	(1, 4, 2, 5)	(2, 4, 1, 5)
4	(1, 3, 2, 5)	(2, 3, 1, 5)
5	(1, 3, 2, 4)	(2, 3, 1, 4)

Проверим точки вида (x_4, x_2, x_3, x_1).

Точка $(2, 4, 3, 5)$: $g_1(2, 4, 3, 5) = 34 \geq 25$, $g_2(2, 4, 3, 5) = 37 \leq 40$, $g_3(2, 4, 3, 5) = = 55 \leq 56$, $g_4(2, 4, 3, 5) = 74 \geq 71$ выполняются, функция цели $f(2, 4, 3, 5) = 80{,}5$. Тогда $\Delta g_1 \geq -9$, $\Delta g_2 \leq 3$, $\Delta g_3 \leq 1$, $\Delta g_4 \geq -3$.

Точка $(1, 4, 3, 5)$: $\Delta g_1 = 2 \geq -9$ выполняется, $\Delta g_2 = 4 > 3$ не выполняется, а функция цели убывает, поскольку прирост $\Delta f(1, 4, 3, 5) = -50$. Поэтому нет необходимости рассматривать точки, меньше данной, они будут формировать множество отсеченных точек при данной транспозиции.

Осуществим проверку точек вида (x_4, x_2, x_1, x_3).

Точка $(3, 4, 2, 5)$: $g_1(3, 4, 2, 5) = 29 \geq 25$, $g_2(3, 4, 2, 5) = 31 \leq 40$, $g_3(3, 4, 2, 5) = = 47 \leq 56$, $g_4(3, 4, 2, 5) = 75 \geq 71$ выполняются, функция цели $f(3, 4, 2, 5) = 95{,}5$. Тогда $\Delta g_1 \geq -4$, $\Delta g_2 \leq 9$, $\Delta g_3 \leq 9$, $\Delta g_4 \geq -4$.

Точка $(3, 4, 1, 5)$: $\Delta g_1 = -3 \geq -4$, $\Delta g_2 = -2 \leq 9$, $\Delta g_3 = -5 \leq 9$, $\Delta g_4 = -4 \geq -4$ выполняются, прирост $\Delta f(3, 4, 1, 5) = -55$. Тогда $\Delta g_1 \geq -1$, $\Delta g_2 \leq 11$, $\Delta g_3 \leq 14$, $\Delta g_4 \geq 0$. Поскольку все ограничения выполняются, необходимо рассмотреть следующую точку множества.

Точка $(2, 4, 1, 5)$: $\Delta g_1 = 2 \geq -1$, $\Delta g_2 = 4 \leq 11$, $\Delta g_3 = 3 \leq 14$ выполняются, $\Delta g_4 = = -5 < 0$ не выполняется, прирост убывает $\Delta f(2, 4, 1, 5) = -38$, поэтому нет смысла в рассмотрении точек, меньше данной.

Соответственно, $S_{24}^{cl} = ((1, 4, 2, 5), (1, 3, 2, 5), (1, 3, 2, 4), (2, 3, 1, 5), (2, 3, 1, 4))$, $S_{24}^{op} = ((2, 4, 3, 5), (3, 4, 2, 5), (3, 4, 1, 5))$, $S_{24}^{con} = ((1, 4, 3, 5), (2, 4, 1, 5))$.

Для транспозиции x_3, x_4 составляем квадратичную функцию

$$F_{34} = (x_3 - x_4)(-3{,}5x_3 - 3{,}5x_4 + 3x_1x_2 + 2x_1 - 0{,}7x_2)..$$

Формируем условия дальнейшего поиска максимального значения:

$$\begin{cases} x_3 > x_4, \\ x_1 \to \max. \end{cases}$$

Согласно изложенному выше условию необходимо рассмотреть точки множества подграфа G_{34}: (x_1, x_3, x_4, x_2), (x_1, x_3, x_2, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4) (рис. 9).

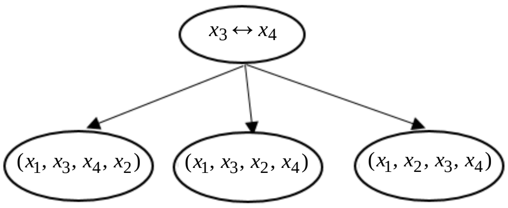

Рис. 9

Точки (x_1, x_3, x_2, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4) рассмотрены при транспозиции $x_1 x_2$. Поэтому рассматриваются только точки вида (x_1, x_3, x_4, x_2): $(5, 2, 4, 3)$, $(5, 1, 4, 3)$, $(5, 1, 4, 2)$, $(5, 1, 3, 2)$, $(4, 1, 3, 2)$.

Точка $(5, 2, 4, 3)$: первое условие $g_1(5, 2, 4, 3) = 19 < 25$ не выполняется, $\Delta g_1 \geq 6$, функция цели $f(5, 2, 4, 3) = 277{,}7$.

Точка $(5, 1, 4, 3)$: $\Delta g_1(5, 1, 4, 3) = -1 < 6$ не выполняется, а функция цели убывает $\Delta f(5, 1, 4, 3) = -47{,}1 < 0$.

Точки, которые расположены ниже точки $(5, 1, 4, 3)$ в подграфе G_{34}, нет необходимости рассматривать, они будут входить в подмножество отсеченных точек при транспозиции x_3, x_4: $S_{34}^{cl} = ((5, 1, 4, 2), (5, 1, 3, 2), (4, 1, 3, 2))$.

Получено $S_{34}^{op} = 0$, $S_{34}^{con} = ((5, 2, 4, 3), (5, 1, 4, 3))$.

Рассмотрим подмножество $Z^{op} = (Z_{12}^{op} \cup Z_{13}^{op} \cup Z_{14}^{op} \cup Z_{23}^{op} \cup Z_{24}^{op} \cup Z_{34}^{op})$.

В данном множестве максимальное значение целевая функция принимает в точке $(4, 2, 3, 5)$, $F_{\max} = 203{,}5$. Данная точка является оптимальной на множестве транспозиций элементов, поэтому необходимо проверить, нет ли точек на множестве вида S^{ac}, которые могли давать большее значение целевой функции.

Необходимо рассмотреть точку $(4, 3, 1, 2)$, которая принадлежит общему множеству S^{ac} и находится правее точки $(4, 2, 3, 5)$.

Точка $(4, 2, 3, 5)$: $g_1 = 24 < 25$ не выполняется, а функция возрастает $f(4, 2, 3, 5) = 208{,}70$, поэтому необходимо рассмотреть следующую точку множества S^{ac}.

Точка $(4, 3, 1, 2)$: $\Delta g_1 = -16 < 0$ не выполняется, $\Delta f(4, 3, 1, 2) = -106{,}9$; нет необходимости в дальнейшем рассмотрении следующих точек.

Ответ: Оптимальным решением является точка $(4, 2, 3, 5)$, при которой целевая функция принимает максимальное значение $F_{\max} = 203{,}5$.

Заключение

В статье рассмотрена оптимизационная задача на множестве размещений с квадратичной целевой функцией и предложен метод ее решения.

Представленный метод состоит из трех шагов. На первом осуществляется построение дерева решений, ветки ветвления которого представляют собой транспозиции соответствующих элементов множества размещений P_k^n. Таким образом, на данном шаге составляются все возможные транспозиции в количестве p, которые определяют дальнейшее представление множества точек размещений в виде перестановки соответствующих элементов. Данные точки представляют собой подграфы графа G и составляют подмножества множества транспозиций S^{tr}.

На втором шаге составляются задачи, целевые функции которых являются квадратичными и представляются с учетом рассматриваемых транспозиций. При решении каждой задачи рассматриваются S_q^{op} — подмножество точек подграфа графа G, которые удовлетворяют ограничениям; S_q^{con} — подмножество точек подграфа графа G, которые не удовлетворяют ограничениям; S_q^{cl} — подмножество

 ISSN 0572-2691

отсеченных точек подграфа графа G, не принадлежащих к двум предыдущим. Данные подмножества в совокупности составляют множества транспозиций S^{tr}. На каждом подграфе графа G проверяются дополнительные ограничения (4) задачи (3)–(5). При этом вычисляются лишь приросты ограничений и целевой функции с помощью необходимых формул. Множество опорных решений будет состоять из точки экстремума x_{extr}, при которой $\text{extr}\, F(x_{\text{extr}})$, и множества точек размещения, которые не были рассмотрены при транспозиции элементов S^{ac}.

На третьем шаге осуществляется поиск оптимального решения задачи путем сравнения приростов целевой функции точки x_{extr} и точек множества S^{ac}.

В статье предложен числовой пример реализации данного метода. Из 120 точек множества размещений найдено оптимальное решение при рассмотрении 27 и отсечении 28 точек за 18 шагов.

Дальнейшие исследования будут направлены на адаптацию данного метода на других комбинаторных множествах с дробно-линейной функцией цели.

Л.М. Колєчкіна, А.М. Нагірна

УМОВНА ОПТИМІЗАЦІЯ ЗАДАЧІ З КВАДРАТИЧНОЮ ФУНКЦІЄЮ ЦІЛІ НА МНОЖИНІ РОЗМІЩЕНЬ

Сформульовано постановку задачі оптимізації з квадратичною функцією цілі на комбінаторній множині розміщень і запропоновано метод її розв’язування з урахуванням виконання умов задач, сформованих при розгляді транспозицій елементів множини розміщень. Представлений метод складається з трьох кроків. На першому здійснюється побудова дерева рішень, гілки розгалуження якого є транспозиції відповідних елементів множини розміщень. На даному етапі складаються всі можливі транспозиції в кількості p, які визначають подальше представлення множини точок розміщень у вигляді перестановки відповідних елементів. З даних точок здійснюється побудова підграфів графа G і складаються підмножини множини транспозицій. Необхідно відзначити, що граф G є лише частиною багатогранника розміщень $M(P_k^n)$. На другому кроці складаються задачі, цільові функції яких є квадратичними і представляються з урахуванням розглянутих транспозицій. При розв’язуванні кожної задачі формується множина транспозицій елементів, яка складається з S_q^{op} (підмножина точок підграфа графа G, які задовольняють обмеженням); S_q^{con} (підмножина точок підграфа графа G, які не задовольняють обмеженням); S_q^{cl} (підмножина відсічених точок підграфа графа G, що не належать до двох попередніх підмножин). На кожному підграфі графа G здійснюється перевірка додаткових обмежень (4) задачі (3)–(5). При цьому обчислюються лише прирости обмежень і цільової функції за допомогою необхідних формул. Множина опорних розв’язків буде складатися з точки x_{extr}, при якій $\text{extr}\, F(x_{\text{extr}})$, і множини точок розміщення S^{ac}, які не були розглянуті при транспозиції елементів, але належать багатограннику розміщень $M(P_k^n)$. На третьому кроці здійснюється пошук оптимального розв’язку задачі шляхом порівняння приростів квадратичної цільової функції точки x_{extr} і точок множини S^{ac}. Запропоновано числовий приклад реалізації даного методу. З 120 точок множини розміщень знайдено оптимальний розв’язок за 18 кроків при розгляді 27 і відсіканні 28 точок. Використовуючи даний метод, за скінчене число кроків можна отримати оптимальний розв’язок.

Ключові слова: оптимізація, математична модель, квадратична функція, множина розміщень, опорний розв’язок, оптимальне рішення.

L.N. Koliechkina, A.N. Nahirna

CONDITIONAL OPTIMIZATION OF A PROBLEM WITH OBJECTIVE QUADRATIC FUNCTION ON A SET OF PERMUTATIONS

The statement of the optimization problem with the quadratic objective function on the combinatorial set of permutations is formulated. A new method of solving the optimization problem, taking into account the fulfillment of the conditions of the tasks formed when considering transpositions of elements of the set of permutations is proposed. The presented method consists of three steps. At the first step, a decision tree is constructed, the branch branches of which are transpositions of the corresponding elements of the set of permutations. At this step, all possible transpositions are compiled in the quantity p that determine the further representation of the set of permutation points in the form of a permutation of the corresponding elements. Subgraphs of the graph G are constructed from these points and subsets of the set of transpositions are compiled. It should be noted that the graph G is only part of the polyhedron of permutations $M(P_k^n)$. At the second step, tasks are compiled whose objective functions are quadratic and are presented taking into account the transpositions under consideration. When solving each problem, a set of transpositions of elements is formed, which consists of S_q^{op} — subset of points in the graph G subgraph that satisfy the constraints; S_q^{con} — subset of points in a subgraph of a graph G that do not satisfy the constraint; S_q^{cl} — subset of the cut-off points of a graph G subgraph that do not belong to the two previous subsets. On each of the subgraphs of the graph G, additional constraints (4) of the problem (3)–(5) are checked. In this case, only the increments of the constraints and the objective function are calculated using the necessary formulas. The set of supporting solutions will consist of a point x_{extr} at which $\mathrm{extr}\, F(x_{\mathrm{extr}})$ and the set of partial permutation points S^{ac}, which were not considered during the transposition of elements, but belong to the polyhedron of permutations $M(P_k^n)$. At the third step, the search for the optimal solution to the problem is carried out by comparing the increments of the quadratic objective function of the point x_{extr} and the points of the set S^{ac}. The article offers a numerical example of the implementation of this method. From 120 points of the set of permutations, the optimal solution was found in 18 steps when considering 27 points and cut off 28 points. Using this method, you can get the optimal solution in a finite number of steps.

Keywords: optimization, mathematical model, quadratic function, partial permutation, reference solution, optimal solution.

1. Sergienko I.V., Shilo V.P. Modern approaches to solving complex discrete optimization problems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. **48**, N 1. P. 15–24.
2. Згуровский М.З., Павлов А.А. Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений. К. : Наук. думка, 2016. 715 с.
3. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of combinatorial designs, second edition. London; New York : CRC Press, 2010. 784 p.
4. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М., Аристов И.В. Элементы теории геометрического проектирования. Под ред. В.Л. Рвачева. К. : Наук. думка, 1995. 241 с.
5. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: theory and algorithms. Heidelberg; New York : Springer, 2018. 698 p.
6. Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L. Handbook of combinatorial optimization. New York : Springer, 2013. 3409 p.
7. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Mineola : Dover Publications, 2013. 528 p.
8. Hulianytskyi L., Riasna I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. *Optimization Methods and Applications*. Butenko S. et al.(eds.). New York : Springer, 2017. P. 239–250.

9. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. К. : Наук. думка, 2009. 266 с.
10. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. Solution and investigation of vector problems of combinatorial optimization on a set of permutations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2008. **40**, N 12. P. 67–80.
11. Kolechkina L.N., Dvirna O.A., Nagornaya A.N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **59**, N 4. P. 620–626.
12. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**, N 6. P. 921–930.
13. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. **27**, N 4. P. 562–567.
14. Koliechkina L., Pichugina O. A horizontal method of localizing values of a linear function in permutation-based optimization. In Le Thi H.A., Le H.M., Pham Dinh T. (eds.) Optimization of Complex Systems: theory, models, algorithms and applications. London : Springer, 2020. P. 355–364.
15. Yakovlev S.V., Pichugina O.S. Properties of combinatorial optimization problems over polyhedral-spherical sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. **54**, N 1. P. 99–109.
16. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: theory and applications. *In 2017 IEEE First Ukrainian Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON 2017)*. Proceedings. Kyiv. 2017. P. 1167–1175.
17. Stoyan Yu.G., Sokolovskii V.Z., Yakovlev S.V. Method of balancing rotating discretely distributed masses. *Energomashinostroyenie*. 1982. N 2. P. 4–5.
18. Yakovlev S.V., Grebennik I.V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1993. **29**, N 5. P. 419–426.
19. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagirna A.N. An approach to solving discrete vector optimization problems over a combinatorial set of permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. **44**, N 3. P. 441–451.
20. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. Solution and investigation of vector problems of combinatorial optimization on a set of polypermutations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2008. **40**, N 12. P. 27–42.
21. Semenova N.V., Kolechkina L.N. A polyhedral approach to solving multicriterion combinatorial optimization problems over sets of polyarrangements. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. **45**, N 3. P. 438–445.
22. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. On approach to solving vector problems with fractionally linear functions of the criteria on the combinatorial set of arrangements. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. **42**, N 2. P. 67–80.
23. Kolechkina L.N., Dvirna O.A. Solving extremum problems with linear fractional objective functions on the combinatorial configuration of permutations under multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**, N 4. P. 590–599.
24. Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Комбінаторна математична модель багатокритеріальної оптимізації при побудові комп'ютерних мереж. *Математичні машини і системи.* 2016. № 6. С. 26–41.
25. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
26. Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н., Семенов В.В. Метод решения задачи условной оптимизации на комбинаторном множестве размещений. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2019. № 4. С. 62–72.
27. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. Харьков : Константа, 2017. 404 с.
28. Yakovlev S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**, N 9. P. 38–50.
29. Yakovlev S.V. Formalization of spatial configuration optimization problems with a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55**, N 4. P. 512–523.
30. Yakovlev S., Pichugina O., Yarovaya O. Polyhedral spherical configuration in discrete optimization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N 1. P. 38–50.
31. Yemelichev V.A., Kovalev V.A., Kravtsov M.K. Polytopes, graphs and optimisation. Cambridge : Cambridge University Press, 1984. 432 p.

Получено 25.10.2019