

ОПТИМИЗАЦИЯ МАНЕВРА МАЛОГО  
ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА НАКЛОНЕНИЯ ОРБИТЫ  
МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО  
АППАРАТА С ДВИГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ  
ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ  
И АККУМУЛЯТОРОМ ЭНЕРГИИ

**Ключевые слова:** оптимальная траектория, межорбитальный транспортный аппарат, аккумулятор энергии.

**Введение**

В работах [1, 2] приведен метод построения оптимальных траекторий перелетов между произвольными эллиптическими орбитами для межорбитального транспортного аппарата (МТА) с классической идеально регулируемой двигательной системой (двигательной системой без аккумулятора энергии). Указанный метод базируется на решении задачи об оптимальном переходе между близкими орбитами в течение одного витка вокруг гравитационного центра. В работах [3, 4] исследованы оптимальные элементарные эллиптические маневры МТА с двигательной системой постоянной мощности и аккумулятором энергии. Под элементарным понимается маневр малого изменения одного из орбитальных параметров исходной орбиты за один виток. В [1] показана чрезвычайно низкая эффективность использования аккумулятора энергии в составе двигательной системы постоянной мощности при доставке полезного груза с низкой монтажной орбиты на орбиты, близкие к геостационарным. В [5] на примере маневрирования между близкими круговыми орбитами показано, что включение аккумулятора энергии в состав двигательной системы ограниченной мощности позволяет более эффективно использовать аккумулятор по сравнению с его включением в двигательную систему постоянной мощности. Поэтому имеет смысл найти решение задачи об оптимальных элементарных маневрах МТА с двигательной системой ограниченной мощности, в состав которой включен аккумулятор энергии. В настоящей работе исследован элементарный маневр изменения угла наклона эллиптической орбиты.

**Общая постановка задачи**

Движение МТА моделируем движением материальной точки переменной массы с начальной массой  $M_0$ , которая состоит из массы полезной нагрузки  $M_n$ , массы рабочего тела, необходимого для выполнения заданного межорбитального перелета  $M_F$  и массы двигательной системы  $M_\sigma$ . Тогда задача о максимизации полезной нагрузки, перемещаемой из заданной начальной точки фазового пространства координат-скоростей  $\{\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i\}$  в заданную конечную точку  $\{\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f\}$  за фиксированное время  $T$ , формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{M} &= -q, & M(0) &= M_0, & M_\pi &= M(T) - M_\sigma \rightarrow \max, \\
\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, & \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_i, & \mathbf{r}(T) &= \mathbf{r}_f, \\
\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_R, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_i, & \mathbf{v}(T) &= \mathbf{v}_f,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $M$  — текущая масса МТА,  $q$  — массовый расход рабочего тела,  $\mathbf{W}_e$  — вектор реактивного ускорения от тяги двигательной системы,  $\mathbf{W}_R$  — ускорение от действия внешних сил. Двигательная система МТА включает в себя источник энергии массой  $M_v$ , обеспечивающий энергопитание двигателя, двигатель массой  $M_\gamma$ , генерирующий тягу путем разгона рабочего тела за счет подведенной к нему энергии, и аккумулятор энергии массой  $M_e$ , который позволяет перераспределять энергию источника в соответствии с требуемым уровнем реактивного ускорения. Более детальное описание идеи включения аккумулятора энергии в двигательную систему МТА приведено в [3–6].

Для описания работы двигательной системы используем модель идеально регулируемой двигательной системы ограниченной мощности [5, 6]. Эта модель предполагает, что мощность источника энергии  $N$  ограничена сверху величиной  $N_0$ , текущая потребляемая двигателем мощность  $N_\Gamma$  ограничена сверху величиной  $n_\gamma N_0$ , а текущий запас энергии аккумулятора  $E_a$  — его энергоемкостью  $E_a^{\max}$ . Ограничения на тягу сверху не накладываются, текущие мощности и реактивное ускорение принимаются независимыми управлениями, массы источника энергии и двигателя пропорциональны их максимальным мощностям, а масса аккумулятора энергии пропорциональна его энергоемкости:

$$M_v = \alpha N_0, \quad M_\gamma = \gamma n_\gamma N_0, \quad M_e = \beta E_a^{\max}. \tag{2}$$

При этом текущий расход рабочего тела вычисляется по формуле

$$q = \frac{M^2 \mathbf{W}_e^2}{2N_\Gamma}, \quad N_\Gamma \in [0; n_\gamma N_0]. \tag{3}$$

Систему (1) следует дополнить уравнением, описывающим изменение энергии в аккумуляторе:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_a &= -N_e, & E_a(0) &= E_a^0, & E_a(T) &= E_a^T, \\
E_a &\in [0; E_a^{\max}].
\end{aligned} \tag{4}$$

Аккумулятор заряжается от источника мощности, поэтому максимальная скорость зарядки происходит при  $N_e = -N_0$ , а при разрядке накопленная энергия аккумулятора и энергия источника направлены в двигатель, и соответственно  $N_e + N = N_\Gamma$ . Таким образом, формула (3) принимает вид

$$q = \frac{M^2 \mathbf{W}_e^2}{2(N + N_e)}, \quad N \in [0; N_0], \quad N_e \in [-N_0; N_0(n_\gamma - 1)]. \tag{5}$$

Положение центра масс МТА в пространстве удобно описывать с помощью орбитальных параметров: натурального логарифма углового момента  $\vartheta = \ln \sqrt{a(1-e^2)}$  ( $a$  — большая полуось), эксцентриситета  $e$ , углового расстояния перицентра до узла  $\omega$ , угла наклона  $I$ , долготы восходящего узла  $\Omega$  и эксцентрической аномалии  $E$ . При этом безразмерные уравнения движения центра масс МТА в сферическом гравитационном поле под действием тяги двигательной системы имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_{ek}, \\ \frac{dE}{dt} &= F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{6k} w_{ek}, \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x_j$  — компоненты вектора  $\vec{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]^T$ ,  $w_k$  — компоненты вектора реактивного ускорения, а функции  $F_{ij}$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0; \quad F_{12} = \frac{1-e \cos E}{1-e^2}; \quad F_{13} = 0; \quad F_{21} = \sqrt{1-e^2} \frac{\sin E}{1-e \cos E}; \\ F_{22} &= \cos E + \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}; \quad F_{23} = 0; \\ F_{31} &= -\frac{\cos E - e}{e(1-e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2-e^2 - e \cos E}{e \sqrt{1-e^2} (1-e \cos E)} \sin E; \\ F_{33} &= -\operatorname{ctg} I \left( \frac{\sin \omega}{1-e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1-e^2}} \sin E \right); \quad F_{41} = F_{42} = 0; \\ F_{43} &= \frac{\cos \omega}{1-e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1-e^2}} \sin E; \quad F_{51} = F_{52} = 0; \quad F_{53} = -\frac{1}{\cos I} F_{33}; \\ F_{60} &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{\exp(3\vartheta)(1-e \cos E)}; \quad F_{61} = \left( \frac{\cos E - e}{e(1-e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}; \\ F_{62} &= -\frac{2-e \cos E}{e(1-e \cos E)} \sin E; \quad F_{63} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (6) и соотношения (7) приведены к безразмерной форме введением характерного расстояния  $r_*$  и характерного времени  $T_* = \sqrt{r_*^3 / K}$  ( $K$  — гравитационная постоянная центрального тела), равного деленному на  $2\pi$  периоду обращения по круговой орбите радиусом  $r_*$ . Для обезразмеривания первого уравнения из (1) и уравнения (4) введем характерную массу  $M_*$ , характерную мощность  $N_*$  и характерную энергоёмкость  $E_{a*}$ , которые примем равными

$$M_* = M_0, \quad N_* = N_0, \quad E_{a*} = E_a^{\max}. \quad (8)$$

Безразмерные значения масс, мощностей и текущего запаса энергии обозначены строчными символами. Тогда с учетом соотношений (2) оптимальные массы составляющих двигательной системы и оптимальная масса полезной нагрузки определяются по формулам

$$m_v = \frac{(\sqrt{\Phi_e} - \Phi_e)}{1 + \xi_B + \varepsilon n_\gamma}, \quad m_\gamma = \frac{\varepsilon n_\gamma (\sqrt{\Phi_e} - \Phi_e)}{1 + \xi_B + \varepsilon n_\gamma}, \quad (9)$$

$$m_\pi = (\sqrt{\Phi_e} - 1)^2, \quad m_e = \frac{\xi_B (\sqrt{\Phi_e} - \Phi_e)}{1 + \xi_B + \varepsilon n_\gamma}, \quad \Phi_e = \frac{\alpha r_*^2}{2T_*^3} J_e,$$

где  $\varepsilon = \gamma / \alpha$ ,  $\xi_B = m_e / m_v$ ,  $J_e = (1 + \xi_B + \varepsilon n_\gamma) \int_0^T \frac{\mathbf{w}_e^2}{n + n_e} dt$ . Уравнение (4) в безразмерной форме имеет вид

$$\dot{e}_a = -\frac{\eta}{\xi_B} n_e, \quad e_a(0) = e_a^0, \quad e_a(T) = e_a^T, \quad (10)$$

$$e_a \in [0; 1], \quad n_e \in [-1; n_\gamma - 1],$$

где  $\eta = \beta T_* / \alpha$ . Из формул (9) следует, что масса полезной нагрузки возрастает с уменьшением функционала  $J_e$ . Таким образом, в силу (6) и (10) задача максимизации массы полезной нагрузки при межорбитальном переходе сводится к нахождению оптимальных программ компонент реактивного ускорения  $w_{ek}$ , мощностей  $n$  и  $n_e$ , а также оптимальных значений параметров  $\xi_B$  и  $n_\gamma$  из задачи оптимального управления:

$$J_e = (1 + \xi_B + \varepsilon n_\gamma) \int_0^T \frac{\mathbf{w}_e^2}{n + n_e} dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{e}_a = -\frac{\eta}{\xi_B} n_e, \quad e_a(0) = e_a^0, \quad e_a(T) = e_a^T,$$

$$\frac{dx_j}{dt} = \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} w_{ek}, \quad x_j(0) = x_j^i, \quad x_j(T) = x_j^f, \quad (11)$$

$$\frac{dE}{dt} = F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{6k} w_{ek}, \quad E(0) = E_0,$$

$$e_a \in [0; 1], \quad n_e \in [-1; n_\gamma - 1], \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3},$$

где  $x_j^i$  и  $x_j^f$  — компоненты векторов  $\mathbf{x}^i = [\vartheta^i, e^i, \omega^i, I^i, \Omega^i]$  и  $\mathbf{x}^f = [\vartheta^f, e^f, \omega^f, I^f, \Omega^f]$ , которые состоят из значений орбитальных параметров начальной и конечной орбит,  $E_0$  — начальная эксцентрическая аномалия, положение на конечной орбите не фиксируется. Задача (11) представляет собой нелинейную задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями. В общем случае получить даже численное решение этой задачи маловероятно [1, 3–5].

### Оптимальные управления линеаризованной задачи

Пусть за один виток вектор орбитальных параметров  $\mathbf{x}^i$  получил заданное приращение  $\Delta = [\Delta_\vartheta, \Delta_e, \Delta_\omega, \Delta_I, \Delta_\Omega]$ . Принимая во внимание малость реактивного ускорения (рассматриваем двигательные системы малой тяги), можем утверждать, что компоненты вектора  $\Delta$  будут малыми величинами. Введем новый вектор  $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^i$ , который по определению является малым. Известно [8], что в линейной постановке дифференциалы времени и эксцентрисической аномалии связаны соотношением  $dt = F_{60}^{-1}dE$ . Этот факт позволяет перейти от независимой переменной  $t$  к независимой переменной  $E$ . Тогда для перелетов за один виток задача (11) после линеаризации и перехода к независимой переменной  $E$  примет вид

$$J_e = (1 + \xi_B + \varepsilon n_\gamma) \int_{E_0}^{E_0+2\pi} \frac{w_{e1}^2 + w_{e2}^2 + w_{e3}^2}{n + n_e} \hat{F}_E(E, \mathbf{x}^i) dE \rightarrow \min,$$

$$\frac{de_a}{dE} = -\hat{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \frac{\eta}{\xi_B} n_e, \quad e_a(E_0) = 0,5, \quad e_a(E_0 + 2\pi) = 0,5, \quad (12)$$

$$\frac{dy_j}{dE} = F_E(E, \mathbf{x}^i) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \mathbf{x}^i) w_{ek}, \quad y_j(E_0) = 0, \quad y_j(E_0 + 2\pi) = \Delta_j,$$

$$e_a \in [0; 1], \quad n_e \in [-1; n_\gamma - 1], \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3},$$

где  $F_E(E, \mathbf{x}^i) = \exp(\vartheta^i) / F_{60}(E, \mathbf{x}^i)$ ,  $\hat{F}_E(E, \mathbf{x}^i) = 1 / F_{60}(E, \mathbf{x}^i)$ . Начальные и конечные значения количества энергии, накопленной в аккумуляторе, как и в работах [3–5], приняты равными 0,5. Задача (12) представляет собой задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями. Фазовая координата  $e_a$  ограничена отрезком  $[0; 1]$ . Согласно методу Гамкредидзе [9] участки оптимальной фазовой траектории, принадлежащие открытому ядру ( $0 < e_a < 1$ ), удовлетворяют принципу максимума Понтрягина. Следуя процедуре принципа максимума, составим гамильтониан

$$H = -b \frac{w_{e1}^2 + w_{e2}^2 + w_{e3}^2}{n + n_e} \hat{F}_E(E, \mathbf{x}^i) +$$

$$+ F_E(E, \mathbf{x}^i) \sum_{l=1}^5 \lambda_{el} \sum_{k=1}^3 F_{lk}(E, \mathbf{x}^i) w_{ek} - \hat{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \lambda_{e6} \frac{\eta}{\xi_B} n_e, \quad (13)$$

где  $b = (1 + \xi_B + \varepsilon n_\gamma)$ , а  $\lambda_{el}, l = \overline{1, 6}$ , — присоединенные функции. Как следует из (13), функция  $H$  не зависит от фазовых переменных задачи (12), поэтому  $\lambda_{el}, l = \overline{1, 5}$ , будут константами, а функция  $\lambda_{e6}$  будет кусочно-постоянной со скачками в точках выхода фазовой координаты  $e_a$  на ограничения  $e_a = 0$  или  $e_a = 1$ . Из условия максимума гамильтониана (13) по управлениям  $w_{e1}, w_{e2}, w_{e3}, n$  и  $n_e$  находим:

$$n = 1,$$

$$\begin{cases} n_e = n_\gamma - 1, \\ w_{e1} = A_C, \\ w_{e2} = B_C, \\ w_{e3} = C_C, \end{cases} \quad b_C(A_C^2 + B_C^2 + C_C^2) - \lambda_{e6} \frac{\eta}{\xi_B} > 0, \quad (14)$$

$$n = 1,$$

$$\begin{cases} n_e = -1, \\ w_{e1} = 0, \\ w_{e2} = 0, \\ w_{e3} = 0, \end{cases} \quad b_C(A_C^2 + B_C^2 + C_C^2) - \lambda_{e6} \frac{\eta}{\xi_B} < 0, \quad (15)$$

где

$$A_C = \exp(\vartheta^i) \frac{\lambda_{e2} F_{21}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e3} F_{31}(E, \mathbf{x}^i)}{2b_C},$$

$$B_C = \exp(\vartheta^i) \frac{\lambda_{e1} F_{12}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e2} F_{22}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e3} F_{32}(E, \mathbf{x}^i)}{2b_C}, \quad (16)$$

$$C_C = \exp(\vartheta^i) \frac{\lambda_{e3} F_{33}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e4} F_{43}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e5} F_{53}(E, \mathbf{x}^i)}{2b_C},$$

$$b_C = (1 + \xi_B) / n_\gamma + \varepsilon.$$

Согласно упомянутому выше методу Гамкрелидзе оптимальные управления при движении по граничным участкам траектории  $e_a = 1$  и  $e_a = 0$  определяются по формулам

$$n = 1,$$

$$\begin{cases} n_e = 0, \\ w_{e1} = A, \\ w_{e2} = B, \\ w_{e3} = C, \end{cases} \quad \begin{cases} b(A^2 + B^2 + C^2) - \tilde{\lambda}_{e6} \frac{\eta}{\xi_B} = -\sigma_1(t) \frac{\eta}{\xi_B}, & e_a = 1, \\ b(A^2 + B^2 + C^2) - \tilde{\lambda}_{e6} \frac{\eta}{\xi_B} = \sigma_2(t) \frac{\eta}{\xi_B}, & e_a = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$A = \exp(\vartheta^i) \frac{\lambda_{e2} F_{21}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e3} F_{31}(E, \mathbf{x}^i)}{2b},$$

$$B = \exp(\vartheta^i) \frac{\lambda_{e1} F_{12}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e2} F_{22}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e3} F_{32}(E, \mathbf{x}^i)}{2b}, \quad (18)$$

$$C = \exp(\vartheta^i) \frac{\lambda_{e3} F_{33}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e4} F_{43}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_{e5} F_{53}(E, \mathbf{x}^i)}{2b},$$

$$b = 1 + \xi_B + \varepsilon n_\gamma.$$

В формулах (17)  $\sigma_1(t), \sigma_2(t)$  — кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие невозрастающие функции. В точках выхода на ограничения соблюдаются условия скачка:

$$\tilde{\lambda}_{e6} = \lambda_{e6} + \mu_p, \quad p = \overline{1, n_p}. \quad (19)$$

Здесь  $n_p$  — количество выходов фазовой траектории на указанные выше ограничения.

Таким образом, оптимальная траектория состоит из участков следующих типов. Активный участок, при котором происходит разрядка аккумулятора, накопленная энергия вместе с энергией источника направлена в двигатель, а оптимальные управления определяются по формулам (14), причем  $0 < e_a < 1$ . Пассивный участок, при котором двигатель отключается, реактивное ускорение равно 0, и вся энергия источника направлена на зарядку аккумулятора (оптимальные управления определяются по формулам (15)). И, наконец, активный граничный участок при полностью заряженном или разряженном аккумуляторе, когда энергоснабжение двигателя производится только от источника энергии (оптимальные управления определяются по формулам (17)).

Поскольку в общем случае количество выходов фазовой траектории на фазовые ограничения неизвестно, дальнейшее решение задачи возможно для конкретных классов маневров.

### Поворот плоскости орбиты

Рассмотрим класс маневров по малому изменению угла наклона начальных орбит, у которых  $\omega^i = 0$ . Начальное значение эксцентрисической аномалии равно 0, а конечное —  $2\pi$ . Как и в работах [3, 4], распределение активных, пассивных и активных граничных участков вдоль траектории перехода выбираем в соответствии с уровнем оптимального реактивного ускорения для этого перехода МТА с двигательной системой без аккумулятора энергии. Эти программы модуля оптимального реактивного ускорения при различных эксцентриситетах начальной орбиты приведены на рис. 1.

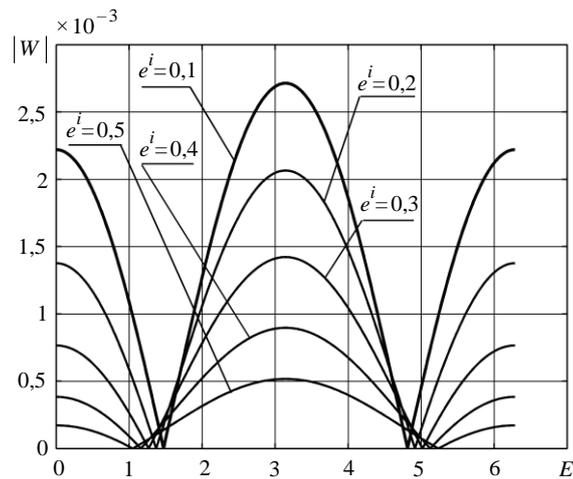


Рис. 1

Как видно из рис. 1, функции  $w(E)$  симметричны относительно прямой  $E = \pi$  и имеют три локальных максимума в точках  $E = 0$ ,  $E = \pi$  и  $E = 2\pi$ , причем

$w(0) = w(2\pi) < w(\pi)$ . Принимая во внимание результаты работ [3, 4], можем утверждать, что в зависимости от заданных величин  $e^i, \eta, \varepsilon$  имеет место одна из двух последовательностей активных (разрядка аккумулятора), пассивных (зарядка аккумулятора) и активных граничных (движение с полностью разряженным ( $e_a = 0$ ) или заряженным ( $e_a = 1$ ) аккумулятором) участков траектории. Схематически эти последовательности изображены на рис. 2 и рис. 3.

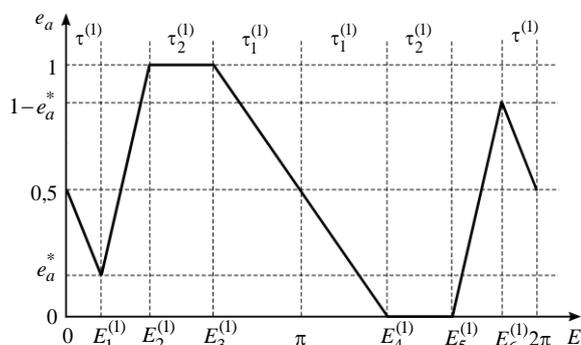


Рис. 2

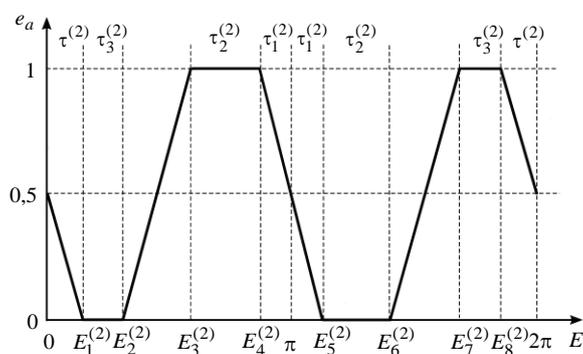


Рис. 3

На этих рисунках  $\tau^{(1)}, \tau_1^{(1)}, \tau^{(2)}, \tau_1^{(2)}$  — длительности активных участков траектории,  $\tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}, \tau_3^{(2)}$  — длительности активных граничных участков траектории, которые подлежат определению из условия минимума функционала  $J_e$ . Пусть  $J_e^{(1)}$  — функционал, который соответствует первой последовательности (см. рис. 2), а  $J_e^{(2)}$  — функционал, соответствующий второй последовательности (см. рис. 3). Таким образом, оптимальное значение функционала  $J_e$  и оптимальная последовательность активных, пассивных и активных граничных участков траектории определяются из условия

$$J_e = \min \{J_e^{(1)}, J_e^{(2)}\}. \quad (20)$$

Введем функции  $D_{\text{akt}}(z_1, z_2, n_\gamma, \xi_b)$  и  $D_{\text{pas}}(z_1, z_2, n_\gamma, \xi_b)$ , которые описывают изменение количества энергии в аккумуляторе на произвольном интервале  $E \in [z_1; z_2]$  для активного и пассивного участков траектории. Проинтегрируем уравнение для фазовой координаты  $e_a$  из (12) на указанном интервале. Принимая во внимание (7), (14) и (15), получаем:

$$D_{akt}(z_1, z_2, n_\gamma, \xi_B) = \frac{\hat{A}\eta(n_\gamma - 1)}{\xi_B} (z_1 - z_2 + e^i (\sin z_2 - \sin z_1)), \quad (21)$$

$$D_{pas}(z_1, z_2, n_\gamma, \xi_B) = \frac{\hat{A}\eta}{\xi_B} (z_2 - z_1 + e^i (\sin z_1 - \sin z_2)),$$

где  $\hat{A} = \exp(3\vartheta^i) / \sqrt{(1 - e^i)^3}$ .

При  $\omega^i = 0$  симметричность программ оптимального реактивного ускорения для задачи без аккумулятора энергии относительно  $E = \pi$  позволяет принять зависимости  $e_a(E)$  симметричными относительно  $E = \pi$ .

Определим функционал  $J_e^{(1)}$ . Как следует из рис. 2,

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= \tau^{(1)}, \quad E_2^{(1)} = \pi - \tau_1^{(1)} - \tau_2^{(1)}, \quad E_3^{(1)} = \pi - \tau_1^{(1)}, \\ E_4^{(1)} &= \pi + \tau_1^{(1)}, \quad E_5^{(1)} = \pi + \tau_1^{(1)} + \tau_2^{(1)}, \quad E_6^{(1)} = 2\pi - \tau^{(1)}. \end{aligned}$$

На пассивном участке траектории  $E \in [E_1^{(1)}; E_2^{(1)}]$  заряд энергии аккумулятора получит приращение, равное  $1 - e_a^*$ . Очевидно, что  $e_a^* = e_a(\tau) = 0,5 + D_{akt}(0, \tau, n_\gamma^{(1)}, \xi_B^{(1)})$ . На активном участке  $E \in [E_3^{(1)}; \pi]$  заряд энергии аккумулятора получит приращение, равное  $-0,5$ . Таким образом, систему уравнений для определения  $n_\gamma^{(1)}$  и  $\xi_B^{(1)}$  запишем

$$\begin{aligned} D_{akt}(\pi - \tau_1^{(1)}, \pi, n_\gamma^{(1)}, \xi_B^{(1)}) &= -0,5, \\ D_{pas}(\tau^{(1)}, \pi - \tau_1^{(1)} - \tau_2^{(1)}, n_\gamma^{(1)}, \xi_B^{(1)}) &= 0,5 - D_{akt}(0, \tau^{(1)}, n_\gamma^{(1)}, \xi_B^{(1)}). \end{aligned} \quad (22)$$

Решив систему (22) относительно  $n_\gamma^{(1)}$  и  $\xi_B^{(1)}$ , найдем

$$\begin{aligned} n_\gamma^{(1)} &= \frac{\pi - \tau_2^{(1)} + e^i (\sin \tau_1^{(1)} - \sin (\tau_1^{(1)} + \tau_2^{(1)}))}{\tau^{(1)} - \tau_1^{(1)} + e^i (\sin \tau_1^{(1)} - \sin \tau^{(1)})}, \\ \xi_B^{(1)} &= \frac{2\hat{A}\eta(\tau_1^{(1)} + e^i \sin \tau_1^{(1)})(\pi - \tau^{(1)} - \tau_1^{(1)} - \tau_2^{(1)} + e^i (\sin \tau^{(1)} - \sin (\tau_1^{(1)} + \tau_2^{(1)})))}{\tau^{(1)} - \tau_1^{(1)} + e^i (\sin \tau_1^{(1)} - \sin \tau^{(1)})}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для рассматриваемой первой последовательности активных, пассивных и граничных участков оптимальные управления определяются: формулами (14) при  $E \in [0; E_1^{(1)}] \cup [E_3^{(1)}; E_4^{(1)}] \cup [E_6^{(1)}; 2\pi]$  (активные участки траектории); формулами (15) при  $E \in [E_1^{(1)}; E_2^{(1)}] \cup [E_5^{(1)}; E_6^{(1)}]$  (пассивные участки траектории); формулами (17) при  $E \in [E_2^{(1)}; E_3^{(1)}] \cup [E_4^{(1)}; E_5^{(1)}]$  (активные граничные участки траектории). Проинтегрировав уравнения движения и подынтегральную функцию функционала  $J_e$  из (12), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных  $\lambda_{ei}^{(1)}$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , и формулу для определения функционала  $J_e^{(1)}$ :

$$\Theta_1 \lambda_e^{(1)} = \Delta,$$

(24)

$$J_e^{(1)} = (\lambda_e^{(1)} \cdot \Delta) / 2,$$

где матрица  $\Theta$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta_1 = & \int_0^{E_1^{(1)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b_C} dE + \int_{E_2^{(1)}}^{E_3^{(1)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b} dE + \int_{E_3^{(1)}}^{E_4^{(1)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b_C} dE + \\ & + \int_{E_4^{(1)}}^{E_5^{(1)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b} dE + \int_{E_6^{(1)}}^{2\pi} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b_C} dE, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & F_{12}(E, \mathbf{x}^i) & 0 & 0 & 0 \\ F_{21}(E, \mathbf{x}^i) & F_{22}(E, \mathbf{x}^i) & 0 & 0 & 0 \\ F_{31}(E, \mathbf{x}^i) & F_{32}(E, \mathbf{x}^i) & F_{33}(E, \mathbf{x}^i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{43}(E, \mathbf{x}^i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{53}(E, \mathbf{x}^i) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $b_C = (1 + \xi_B^{(1)}) / n_\gamma^{(1)} + \varepsilon$ ,  $b = 1 + \xi_B^{(1)} + \varepsilon n_\gamma^{(1)}$ . Так как рассматриваем маневр изменения угла наклона орбиты, то  $\Delta = [0, 0, 0, \Delta_I, 0]$ , и соответственно из (24) следует

$$J_e^{(1)} = \lambda_{e4}^{(1)} \Delta_I / 2. \quad (26)$$

Принимая во внимание (14)–(18) и (14)–(25), можем утверждать, что функционал  $J_e^{(1)}$  является функцией переменных  $\tau^{(1)}$ ,  $\tau_1^{(1)}$ ,  $\tau_2^{(1)}$ , минимум которой находим с помощью численных методов.

Теперь перейдем к определению  $J_e^{(2)}$ . В этом случае

$$E_1^{(2)} = \tau^{(2)}, \quad E_2^{(2)} = \tau^{(2)} + \tau_3^{(2)}, \quad E_3^{(2)} = \pi - \tau_1^{(2)} - \tau_2^{(2)}, \quad E_4^{(2)} = \pi - \tau_1^{(2)},$$

$$E_5^{(2)} = \pi + \tau_1^{(2)}, \quad E_6^{(2)} = \pi + \tau_1^{(2)} + \tau_2^{(2)}, \quad E_7^{(2)} = 2\pi - \tau^{(2)} - \tau_3^{(2)}, \quad E_8^{(2)} = 2\pi - \tau^{(2)}.$$

Аналог системы (22) получим из условия равенства приращений величины  $e_a$  на пассивном участке  $E \in [E_2^{(2)}; E_3^{(2)}]$  и активном —  $E \in [E_4^{(2)}; \pi]$  1 и  $-0,5$  соответственно (см. рис. 3)

$$D_{akt}(\pi - \tau_1^{(2)}, \pi, n_\gamma^{(2)}, \xi_B^{(2)}) = -0,5,$$

(27)

$$D_{pas}(\tau^{(2)} + \tau_3^{(2)}, \pi - \tau_1^{(2)} - \tau_2^{(2)}, n_\gamma^{(2)}, \xi_B^{(2)}) = 1.$$

Система линейных алгебраических уравнений (27) относительно  $n_\gamma^{(2)}$ ,  $\xi_B^{(2)}$  имеет решение

$$n_\gamma^{(2)} = \frac{\pi - \tau^{(2)} + \tau_1^{(2)} - \tau_2^{(2)} - \tau_3^{(2)} - e^i(\sin(\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(2)}) - 2\sin \tau_1^{(2)} - \sin(\tau^{(2)} + \tau_3^{(2)}))}{\tau^{(2)} - \tau_1^{(2)} + e^i(\sin \tau_1^{(2)} - \sin \tau^{(2)})}, \quad (28)$$

$$\xi_B^{(2)} = \hat{A}\eta(\pi - \tau^{(2)} - \tau_1^{(2)} - \tau_2^{(2)} - \tau_3^{(2)} + e^i(\sin(\tau^{(2)} + \tau_3^{(2)}) - \sin(\tau_1^{(2)} + \tau_2^{(2)}))).$$

Интегрируя уравнения движения и подынтегральную функцию функционала  $J_e$  в (12) согласно последовательности активных, пассивных и граничных участков, указанной на рис. 3, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора  $\lambda_e^{(2)}$  и выражение для  $J_e^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \Theta_2 \lambda_e^{(2)} &= \Delta, \\ J_e^{(2)} &= (\lambda_e^{(2)} \cdot \Delta) / 2, \\ \Theta_2 &= \int_0^{E_1^{(2)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b_C} dE + \int_{E_1^{(2)}}^{E_2^{(2)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b} dE + \\ &+ \int_{E_3^{(2)}}^{E_4^{(2)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b} dE + \int_{E_4^{(2)}}^{E_5^{(2)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b_C} dE + \int_{E_5^{(2)}}^{E_6^{(2)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b} dE + \\ &+ \int_{E_7^{(2)}}^{E_8^{(2)}} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b} dE + \int_{E_8^{(2)}}^{2\pi} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2b_C} dE, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $b_C = (1 + \xi_B^{(2)}) / n_\gamma^{(2)} + \varepsilon$ ,  $b = 1 + \xi_B^{(2)} + \varepsilon n_\gamma^{(2)}$ , а матрица  $\mathbf{F}$  определяется из (25). Как и для первого случая, справедливо

$$J_e^{(2)} = \lambda_{e4}^{(2)} \Delta_I / 2. \quad (30)$$

Из формул (14)–(18) и (28)–(30) следует, что функционал  $J_e^{(2)}$  является функцией переменных  $\tau^{(2)}$ ,  $\tau_1^{(2)}$ ,  $\tau_2^{(2)}$ ,  $\tau_3^{(2)}$ . Однако благодаря тому, что приращения запаса энергии аккумулятора на участках  $E \in [0; E_1^{(2)}]$  и  $E \in [E_4^{(2)}; \pi]$  равны, переменные  $\tau^{(2)}$  и  $\tau_1^{(2)}$  связаны между собой (см. рис. 3) алгебраическим соотношением  $D_{akt}(0, \tau^{(2)}, n_\gamma^{(2)}, \xi_B^{(2)}) = D_{akt}(\pi - \tau_1^{(2)}, \pi, n_\gamma^{(2)}, \xi_B^{(2)})$ . Поэтому  $J_e^{(2)}$  является функцией трех независимых переменных  $\tau_1^{(2)}$ ,  $\tau_2^{(2)}$ ,  $\tau_3^{(2)}$ , поиск минимума которой осуществляется с помощью численных методов.

Теперь, используя выражения (26) и (30), из условия (20) определяем соответствующую последовательность участков траектории, значения функционала  $J_e$  и величин  $\lambda_{e4}$ ,  $\xi_B$ ,  $n_\gamma$ .

Включать аккумулятор энергии в состав двигательной системы имеет смысл при выполнении условия  $J_e / J < 1$ , которое указывает на то, что это включение позволяет увеличить массу полезной нагрузки при выполнении заданного динамического маневра по сравнению со случаем использования традиционной двигательной системы.

Здесь  $J$  — значение функционала, полученное при оптимизации такого же динамического маневра МТА с двигательной системой без аккумулятора энергии. В этом случае задача оптимального управления записывается следующим образом [3]:

$$J_e = (1 + \varepsilon) \int_0^{2\pi} \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}{n} \hat{F}_E(E, \mathbf{x}^i) dE \rightarrow \min,$$

$$\frac{dy_j}{dE} = F_E(E, \mathbf{x}^i) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \mathbf{x}^i) w_k, \quad y_j(E_0) = 0, \quad y_j(E_0 + 2\pi) = \Delta_j, \quad (31)$$

$$n \in [0; 1], \quad j = \overline{1, 5}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Задача (31) имеет решение

$$n = 1$$

$$w_1 = \exp(\mathcal{G}^i) \frac{\lambda_2 F_{21}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_3 F_{31}(E, \mathbf{x}^i)}{2(1 + \varepsilon)},$$

$$w_2 = \exp(\mathcal{G}^i) \frac{\lambda_1 F_{12}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_2 F_{22}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_3 F_{32}(E, \mathbf{x}^i)}{2(1 + \varepsilon)},$$

$$w_3 = \exp(\mathcal{G}^i) \frac{\lambda_3 F_{33}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_4 F_{43}(E, \mathbf{x}^i) + \lambda_5 F_{53}(E, \mathbf{x}^i)}{2(1 + \varepsilon)}, \quad (32)$$

$$\Theta \lambda = \Lambda,$$

$$J = (\lambda \cdot \Lambda) / 2,$$

$$\Theta = \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{F}_E(E, \mathbf{x}^i) \mathbf{F} \mathbf{F}^T}{2(1 + \varepsilon)} dE.$$

### Результаты численных исследований

Рассмотрим начальную орбиту, у которой угловое расстояние перицентра до узла и долгота восходящего узла равны нулю  $\omega^i = \Omega^i = 0$ . Угол наклона начальной орбиты положим равным  $I^i = \pi/3$ . Характерное расстояние  $r_*$  выберем равным радиусу перицентра начальной орбиты, тогда  $\mathcal{G}^i = \ln \sqrt{1 + e^i}$ . Проследим эффективность использования аккумулятора энергии в зависимости от значения параметра  $\eta$  для ряда значений эксцентриситета начальной орбиты  $e^i$  при выполнении маневра изменения угла наклона орбиты на величину  $\Delta_i = 0,01$  за один виток. На рис. 4 приведены графики зависимостей  $J_e(\eta)/J$  на интервалах целесообразности использования накопителя энергии в составе двигательной системы. Поведение оптимальных параметров двигательной системы  $n_\gamma$ ,  $\xi_B$  проиллюстрировано на рис. 5 и рис. 6.

Кривые, изображенные на рис. 4–6, свидетельствуют о том, что существует такое значение  $\eta = \eta_{\max}(e^i)$ , при котором оптимальная масса аккумулятора равна

нулю ( $\xi_B = m_e / m_v = 0$ );  $n_\gamma = 1$  — оптимальная мощность источника равна оптимальной мощности двигателя (вся вырабатываемая источником энергия направлена в двигатель);  $J_e = J$  — отсутствует выигрыш по полезной массе МТА, т.е. оптимальной становится классическая двигательная система без аккумулятора энергии. Сравнивая данные результаты с результатами, полученными для двигательной системы постоянной мощности [3, 4], можем утверждать, что использование накопителя энергии предпочтительней для двигательных систем ограниченной мощности по сравнению с двигательными системами постоянной мощности. На рис. 7 показано, какая из последовательностей активных, активных граничных и пассивных участков траектории оптимальна; 1 соответствует первой последовательности (см. рис. 2), а 2 — второй последовательности (см. рис. 3).

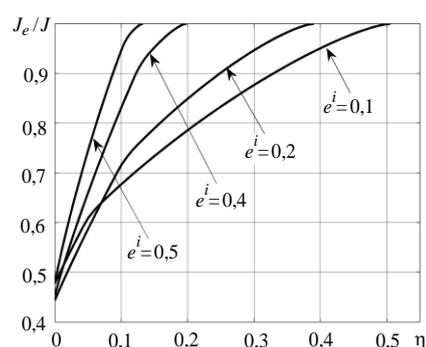


Рис. 4

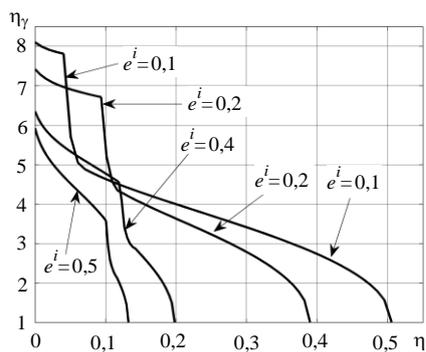


Рис. 5

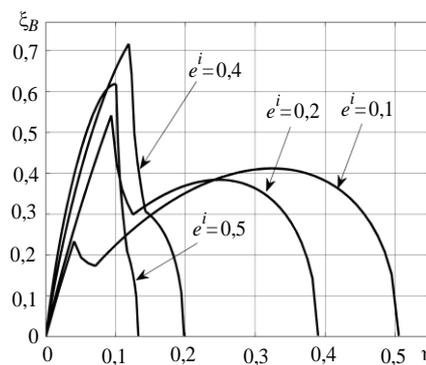


Рис. 6

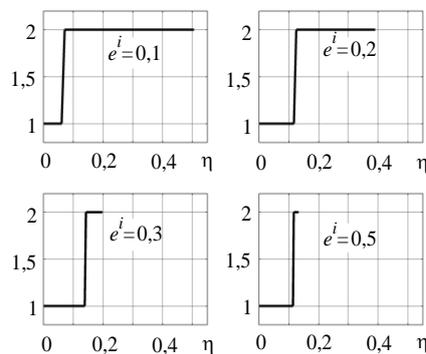


Рис. 7

### Заключение

Разработан алгоритм оптимизации маневра малого изменения угла наклона эллиптической орбиты МТА с двигательной системой ограниченной мощности и аккумулятором энергии. Цель оптимизации — максимизация массы полезной нагрузки при заданной начальной массе МТА. Получены аналитические выражения для описания оптимальных режимов работы двигательной системы. Приведены оптимальные зависимости между удельными характеристиками двигательной системы. Результаты данной работы могут использоваться как для задач коррекции заданной орбиты, так и при разработке алгоритмов оптимизации переходов между отдаленными эллиптическими орбитами.

*Я.В. Ткаченко, І.Ю. Васильєв*

## ОПТИМІЗАЦІЯ МАНЕВРУ МАЛОЇ ЗМІНИ КУТА НАХИЛУ ОРБИТИ МІЖОРБІТАЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО АПАРАТА З РУШІЙНОЮ СИСТЕМОЮ ОБМЕЖЕНОЇ ПОТУЖНОСТІ І АКУМУЛЯТОРОМ ЕНЕРГІЇ

Розроблено алгоритм оптимізації маневру малої зміни кута нахилу еліптичної орбіти міжорбітального транспортного апарата (МТА) з рушійною системою обмеженої потужності і акумулятором енергії. Мета оптимізації — максимізація маси корисного навантаження при заданій початковій масі МТА. Рух МТА моделюється рухом матеріальної точки змінної маси під дією сильного сферичного гравітаційного поля та тяги, що генерується рушійною системою. Початкова маса МТА складається з маси рушійної системи, маси робочої речовини, необхідної для виконання маневру, та маси корисного навантаження. В свою чергу, маса рушійної системи складається з мас двигуна, джерела енергії та акумулятора енергії. При формулюванні задачі оптимального керування використано модель ідеально керованої рушійної системи. Приймаючи до уваги малість вектора реактивного прискорення та малість приросту кута нахилу, проведено лінеаризацію рівнянь руху МТА в оскулюючих змінних. Оптимальні програми вектора реактивного прискорення побудовані з використанням методу ГамкRELІДзе (розповсюдження принципу максимуму Понтрягіна на задачі з фазовими обмеженнями). Лінеаризовані рівняння руху проінтегровано в елементарних функціях. Отримано аналітичні вирази для опису оптимальних режимів роботи рушійної системи. Сформульована задача оптимального керування з квадратичним критерієм оптимальності зведена до задачі пошуку мінімуму функції трьох змінних. Пошук мінімуму здійснено за допомогою чисельних методів. Показано, що існують інтервали значень питомої маси акумулятора енергії, на яких застосування акумулятора енергії в складі рушійної системи дозволяє збільшити масу корисного навантаження МТА, а отже використання акумулятора енергії в складі рушійної системи МТА має сенс. На цих інтервалах наведено оптимальні залежності між питомими характеристиками рушійної системи.

**Ключові слова:** оптимальна траєкторія, міжорбітальний транспортний апарат, акумулятор енергії.

*Ya.V. Tkachenko, I.Yu. Vasilev*

## OPTIMIZATION OF A MANEUVER OF A SMALL CHANGE OF AN ORBIT INCLINATION ANGLE OF THE INTERORBITAL TRANSPORT VEHICLE WITH A PROPULSION SYSTEM OF LIMITED POWER AND ENERGY ACCUMULATOR

An algorithm for optimizing the maneuver of inclination small change of an elliptical orbit of an orbital transport vehicle (OTV) with a bounded-power propulsion system and an energy accumulator is developed. The goal of optimization is to maximize the payload mass for a given initial OTV mass. The movement of the OTV is modeled by the movement of variable mass particle under the action of a strong spherical gravitational field and thrust generated by the propulsion system. The initial mass of the OTV consists of the mass of the propulsion system, the mass of the working substance necessary to perform the maneuver, and the mass of the payload. In turn, the mass of the propulsion system consists of the masses of the engine, an energy source and an energy accumulator. In formulating the optimal control problem, a model of ideally controlled propulsion system is used. Taking into account the smallness of the

jet acceleration vector and the smallness of the increment of the inclination, the equations of motion of the OTV in the osculating variables are linearized. The optimal programs of the reactive acceleration vector are constructed using the Gamkrelidze method (extending the Pontryagin maximum principle to problems with phase constraints). The linearized equations of motion are integrated in elementary functions. Analytical expressions are obtained to describe the optimal operating modes of the propulsion system. The formulated optimal control problem with a quadratic optimality criterion is reduced to the problem of finding the minimum of the function of three variables. The search for the minimum was carried out using numerical methods. It is shown that there are intervals of values of the specific mass of the energy accumulator at which the using of the energy accumulator as part of the propulsion system makes it possible to increase the mass of the OTV payload, and therefore the using of the energy accumulator as part of the OTV propulsion system makes sense. At these intervals, the optimal dependencies between the specific characteristics of the propulsion system are given.

**Keywords:** optimal trajectory, orbital transport vehicle, energy storage.

1. Кіфоренко Б.М., Ткаченко Я.В. Метод оптимальних траєкторій перельотів у сильному центральному гравітаційному полі. *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2015. **12**, № 1. С. 60–72.
2. Ткаченко Я.В. Метод оптимізації маневров межорбітального транспортного апарата в сильному центральному гравітаційному полі. *Прикладна механіка*. 2019. **55**, № 5. С. 101–109.
3. Кифоренко Б.Н., Ткаченко Я.В. Некоторые оптимальные околоэллиптические маневры космических аппаратов с двигателем постоянной мощности и аккумулятором энергии. *Проблемы управления и информатики*. 2003. № 1. С. 84–100.
4. Tkachenko Ya.V. Using energy storage in low thrust constant power thruster for optimal interorbital transfers. *Stability and control. Theory and application. International Journal*. 2003. **5**, N 1. P. 22–40.
5. Ткаченко Я.В. Оптимальные переходы космических аппаратов с накопителем энергии и двигателем ограниченной мощности. *Прикладная механика*. 2003. **39**, № 1. С. 134–140.
6. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. М. : Наука, 1966. 679 с.
7. Кифоренко Б.Н., Васильев И.Ю. Численные решения точных уравнений движения космического аппарата в ньютоновском центральном гравитационном поле по многовитковым траекториям, близким к оптимальным. *Космические исследования*. 2011. **49**, № 5. С. 436–452.
8. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М. : Наука, 1965. 540 с.
9. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М. : Наука, 1981. 336 с.

Получено 08.11.2019