УДК 519.14

Н.К. Тимофеева

НЕКОТОРЫЕ ПРИРОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ЗНАКОВЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Ключевые слова: комбинаторные числа, знаковые комбинаторные пространства, симметрия комбинаторных множеств, симметрия комбинаторных конфигураций, фракталы.

Введение

Рассматриваются некоторые природные явления, связанные с комбинаторными числами, фракталами и симметрией. Для их объяснения используются свойства знаковых комбинаторных пространств [1]. Показано, что как живой, так и неживой природе свойственны законы комбинаторики. Точками знаковых комбинаторных пространств являются комбинаторные конфигурации разных типов, которые образуются из элементов заданных базовых множеств (одного или нескольких) с помощью определенных правил. Совокупность этих множеств и правила их формирования образуют информационный знак, который содержит все свойства комбинаторных множеств. Иными словами, знаковые комбинаторные пространства имеют два состояния: свернутое (покой), задается информационным знаком, и развернутое (динамика). При развертывании оговоренных пространств образуются фрактальные структуры и различные виды симметрии. Аналогично комбинаторным разворачиваются пространства как живой, так и неживой природы. Соответственно, информационным знаком задаются и природные пространства (в частности, биологические), имеющие все свойства развернутого. Это позволяет объяснить наличие комбинаторных чисел в природе, образование фрактальных структур и симметрии в биологии.

Постановка проблемы и цель исследования

В живой и неживой природе присутствуют комбинаторные числа. Это говорит о том, что ей присущи законы комбинаторики. Для объяснения этого явления необходимо по определенным правилам построить знаковое комбинаторное пространство и показать, что природные пространства, для которых выполняются аксиомы комбинаторных, имеют комбинаторную природу.

С использованием знаковых комбинаторных пространств проводится попытка объяснить наличие комбинаторных чисел в природе и образование фракталов и симметрии в биологии.

Анализ последних исследований и публикаций

Существует много литературы, посвященной комбинаторным пространствам. Это — метрические, евклидовы, пространства упорядочений, комбинаторные пространства, точками которых являются рекурсивные функции [2–6]. Характерной особенностью комбинаторных пространств является не просто существование заданного множества точек комбинаторного характера, между которыми введено расстояние, а и образование их из элементов одного или нескольких базовых множеств с использованием определенной системы правил. Для задания комбинаторного пространства достаточно ввести одно или несколько базовых множеств, из элементов которых формируются его точки, задать тип комбинаторной конфигурации и систему правил, с помощью которых оно разворачивается [1]. Метрические, евклидовы, рекурсивные пространства — это развернутые знаковые комбинаторные пространства.

Известно такое свойство живой и неживой природы, как наличие в ней комбинаторных чисел. Но в литературе не описана связь этого явления с комбинаторикой и комбинаторными множествами, а также динамика их образования. С помощью знаковых комбинаторных пространств можно исследовать это явление в природе, а также образование фракталов и симметрии в биологии. Исследованию фракталов посвящено много литературы [7–10]. Как правило, исследуются геометрические формы, фрактальные числовые ряды и их использование на практике, в частности, при прогнозировании различных явлений. Но в литературе исследованию фрактальных свойств комбинаторных множеств особого внимания не уделяется.

Также в литературе описано много способов исследования симметрии в биологии. Для этого используют геометрический (в частности, в биологии) и алгебраический подходы (теория групп, статистический анализ, модели Маркова) [11–13]. В [11] исследуется симметрия развернутого биологического пространства с использованием геометрии, а в [12, 13] — биологического свернутого (ДНК) с использованием алгебраических подходов. Но на вопрос, каким образом возникает симметрия в развернутых биологических пространствах, ответа еще не найдено.

Комбинаторные конфигурации, комбинаторные множества и комбинаторные числа

Точкой комбинаторных пространств является комбинаторная конфигурация. Как описано в [14], под комбинаторной конфигурацией понимаем любую совокупность элементов, которая образуется из всех или некоторых элементов заданного базового множества $A=\{a_1,\dots,a_n\}$. Обозначим ее упорядоченным множеством $w^k=(w_1^k,\dots,w_\eta^k)$, где $\eta\in\{1,\dots,n\}$ — количество элементов в w^k (в дальнейшем η будем обозначать и как η^k), $W=\{w^k\}_1^q$ — множество комбинаторных конфигураций. Верхний индекс k ($k\in\{1,\dots,q\}$) в w^k — порядковый номер w^k в W, q — количество w^k в W. Комбинаторную конфигурацию будем обозначать как с верхним индексом (w^k), так и без индекса (w).

Рекуррентным комбинаторным оператором назовем совокупность правил, по которым из элементов базового множества A образуется комбинаторная конфигурация w^k. Различные типы комбинаторных конфигураций образуются с помощью трех рекуррентных комбинаторных операторов: выбирание, транспозиция и арифметический [14].

Простейшие комбинаторные конфигурации — перестановки, выборки различных типов, разбиение натурального числа, разбиение n-элементного множества на подмножества и т.д.

Определение 1. Две нетождественные комбинаторные конфигурации $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$ и $w^i = (w_1^i, ..., w_{\eta^i}^i)$ назовем изоморфными, если $\eta^k = \eta^i$.

Определение 2. Подмножество $W_{\eta^k} \subset W$ назовем подмножеством изоморфных комбинаторных конфигураций, если его элементы $w^k \in W_{\eta^k}$ изоморфные.

Множество W, кроме перестановок, состоит из подмножеств изоморфных комбинаторных конфигураций. Множество перестановок — множество изоморфных комбинаторных конфигураций.

Множества комбинаторных конфигураций имеют большое количество разнообразных упорядочений и могут быть упорядочены или по строгим правилам, или хаотично. Выделим эти правила:

а) образование комбинаторных конфигураций, т.е. определяются рекуррентные комбинаторные операторы;

б) упорядочение комбинаторных конфигураций как строго, так и хаотически.

Эти правила определяются в результате анализа структуры определенного комбинаторного множества. Одни и те же правила используются для генерирования значительной части этих множеств, которые являются структурированными. Последние упорядочиваются рекуррентно-периодическим методом, основанным на свойстве периодичности, которое следует из рекуррентного способа образования $w \in W$ и заключается в упорядочении этих множеств интервалами, в каждом из которых $w \in W$ образуются по одним и тем же правилам [14]. Наименьший интервал, из которого состоят другие, назовем интервалом нулевого ранга. Можно заметить, что первая комбинаторная конфигурация в нем определяет правила упорядочения всего множества. Назовем ее ограничительной. Тогда для определения заданного упорядочения необходимо сформулировать три правила, по которым образуются

- интервал нулевого ранга;
- ограничительная комбинаторная конфигурация (первая в интервале нулевого ранга);
- интервал σ-го ранга, который состоит из интервалов меньших рангов.

В табл. 1 приведено описанное в литературе упорядочение перестановок для $n = 4$ интервалами нулевого ранга, которые образуют интервал первого ранга. Перестановки 1, 7, 13, 19 — ограничительные.

Комбинаторными числами называют выражение, по которому определяется количество комбинаторных конфигураций в комбинаторном множестве. Для некоторых типов $w \in W$ эти формулы известны, а для некоторых они еще не найдены. Приведем некоторые из них. Число различных перестановок из n символов равно произведению $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, которое обозначается $n!$. Количество сочетаний без повторений в подмножествах $W_{\eta^k} \subset W$ определяется по формуле $C_n^\eta = \dfrac{n!}{(n-\eta)!\,\eta!}$, а для всего W — соответственно $2^n - 1$. Бинарные последовательности определяются по выражению 2^n.

Для разбиения натурального числа количество разбиений $P(n, \eta)$ в подмножестве $W_{\eta^k} \subset W$ для $\eta > 3$ вычисляется по одному и тому же выражению для тех n, для которых $n \equiv j \,(\mathrm{mod}\ s \cdot p)$, где $s = \eta$ — количество различных последовательностей, сумма членов которых определяет $P(n, \eta)$, $p = \frac{(\eta - 1)\,!}{2}$ — количество возможных вариантов t-й последовательности. Оговоренные последовательности строятся по определенным правилам. Это утверждение доказано в [14]. Для всего множества разбиений натурального числа W $P(n) = \sum_{\eta=1}^{n} P(n, \eta)$.

Таблица 1

№	Перестановки
1	1, 2, 3, 4
2	2, 1, 3, 4
3	2, 3, 1, 4
4	3, 2, 1, 4
5	3, 1, 2, 4
6	1, 3, 2, 4
7	1, 3, 4, 2
8	3, 1, 4, 2
9	3, 4, 1, 2
10	4, 3, 1, 2
11	4, 1, 3, 2
12	1, 4, 3, 2
13	1, 4, 2, 3
14	4, 1, 2, 3
15	4, 2, 1, 3
16	2, 4, 1, 3
17	2, 1, 4, 3
18	1, 2, 4, 3
19	3, 2, 4, 1
20	2, 3, 4, 1
21	2, 4, 3, 1
22	4, 2, 3, 1
23	4, 3, 2, 1
24	3, 4, 2, 1

Интервал нулевого ранга

Интервал нулевого ранга

Интервал нулевого ранга

Интервал нулевого ранга

Интервал первого ранга

Количество разбиений n-элементного множества на подмножества в W_η равно $S(n; \xi_1^k, \ldots, \xi_\eta^k) = \frac{n!}{\xi_1^k!\ \xi_2^k! .. \xi_\eta^k! \prod_{t=1}^{z} m_u!}$, где m_u — количество подмножеств $w_j^k, w_t^k \subset w^k$, в которых $\xi_j^k = \xi_t^k$, $u = 1, \ldots, z$, z — число блоков (подмножеств), каждый из которых объединяет w_j^k с одинаковым количеством ξ_j^k, ξ_j^k — количество элементов в блоке (подмножестве) $w_j^k \subset w^k$.

В подмножестве, в котором разбиения содержат одинаковое количество блоков (подмножеств), количество разбиений вычисляется по рекуррентно-

ISSN 0572-2691

му выражению, которое названо числом Стирлинга второго рода $S(n, \eta) = S(n-1, \eta-1) + \eta\, S(n-1, \eta)$. Количество разбиений n-элементного множества на подмножества равно $B_n = \sum_{\eta=1}^{n} S(n, \eta)$. Это выражение называют числом Белла.

В живой и неживой природе имеют место такие комбинаторные числа, как числа Фибоначчи, последовательность которых имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Эта последовательность чисел появляется в числовых последовательностях, которые задают количество комбинаторных конфигураций в упорядоченных по определенным правилам комбинаторных множествах. При генерировании множества разбиений натурального числа с использованием свойства периодичности [14], полученные числовые последовательности, задающие в них количество комбинаторных конфигураций, содержат числа Фибоначчи. Например, для разбиения натурального числа конечная последовательность, которая задает количество разбиений в их множестве для $n = 12$, имеет вид 1, 6, 12, 15, 13, 11, 7, 5, 3, 2, 1, 1, где последние пять цифр — числа Фибоначчи.

Значения последовательности, задающие количество сочетаний без повторений (или разбиений n-элементного множества на подмножества) в множестве W, упорядоченные с использованием рекуррентно-периодического метода генерирования $w^k \in W$ [14], образуют арифметический треугольник (табл. 2).

Таблица 2

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Строки арифметического треугольника запишем одну под другой, как показано в табл. 3.

Таблица 3

Числа Фибоначчи		1	1	2	3	5	8
	1						
	1	1					
	1	2	1				
	1	3	3	1			
	1	4	6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	

Если сложить числа этой таблицы по диагонали (слева направо, снизу вверх), то получим последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 1 + 3 + + 1 = 5, 1 + 4 + 3 = 8; 1 + 5 + 6 + 1 = 13 и т.д. [15].

Фрактальные свойства комбинаторных множеств

Как известно, фракталы — это фигуры, которые являются результатом математических процессов, повторяются, обладают самоподобием в любом измерении, одновременно конечны и бесконечны, имеют фрактальную размерность [9, 10]. Под фракталами, как правило, понимают геометрические фигуры.

Если проанализировать упорядоченное по строгим правилам комбинаторное множество с использованием свойства периодичности, то можно увидеть, что его структура соответствует фрактальной [16]. Полагаем, что комбинаторные множества самоподобные, если их элементы образуются одним и тем же рекуррентным комбинаторным оператором, а их упорядочение проводится по одним и тем же правилам. Иными словами, они образуются рекуррентными процедурами, характеризуются самоподобием, одновременно конечные и бесконечные, содержащие другие фракталы внутри себя. Подобное комбинаторному множеству — множество Мандельброта [10].

Согласно свойству самоподобия, интервал σ-го ранга упорядоченного множества W состоит из интервалов $(\sigma-1)$-го ранга. Поскольку число n может принимать произвольные значения, то W для фиксированного n конечное, а для произвольного — бесконечное. Подмножество W_η размещений с повторениями (или сочетаний с повторениями, разбиение n-элементного множества на подмножества с повторениями) конечное, а множество W этих же комбинаторных конфигураций для того же самого n — бесконечно. Другими словами, комбинаторные множества одновременно могут быть конечными и бесконечными и обладают самоподобием, что характерно для фракталов. Поскольку интервал σ-го ранга состоит из интервалов $(\sigma-1)$-го ранга, а интервал первого ранга — из интервалов нулевого ранга, несложно, зная правила их упорядочения, определить количество комбинаторных конфигураций в их множестве. По определенным правилам, которые различны для разных типов комбинаторных конфигураций, образуем конечную последовательность, каждое значение которой задает количество w в интервалах σ-го ранга. Для множества W, упорядоченного подмножествами $W_{\eta^k} \subset W$, запишем количество комбинаторных конфигураций в их множествах в таком виде:

$$\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^1}\left(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^1}\left(\ldots\left(\sum_{j_2=1}^{H_2^1}\left(\sum_{j_1=1}^{H_1^1}\left(h^1\right)\right)\right)\ldots\right)\right)+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^{\tilde{q}}}\left(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^{\tilde{q}}}\left(\ldots\left(\sum_{j_2=1}^{H_2^{\tilde{q}}}\left(\sum_{j_1=1}^{H_1^{\tilde{q}}}\left(h^{\tilde{q}}\right)\right)\right)\ldots\right)\right), \qquad (1)$$

где H_t^s — количество интервалов σ-го ранга, $t \in \{1, \ldots, \sigma\}$, $\sigma \in \{2, \ldots, n\}$, h^s — количество комбинаторных конфигураций в интервале нулевого ранга для s-го подмножества $W_{\eta^k} \subset W$, $s \in \{1, \ldots, \tilde{q}\}$, $\tilde{q}$ — количество подмножеств $W_{\eta^k} \subset W$, $\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^s}\left(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^s}\left(\ldots\left(\sum_{j_2=1}^{H_2^s}\left(\sum_{j_1=1}^{H_1^s}\left(h^s\right)\right)\right)\ldots\right)\right)$ — количество комбинаторных конфи-

 ISSN 0572-2691

гураций в s-м подмножестве $W_{\eta^k} \subset W$ (или во множестве перестановок). Из выражения (1) видно, что при генерировании комбинаторного множества из элементов базового образуется фрактальная структура. К тому же она объемная и ее можно представить геометрическим объектом.

Симметрии комбинаторных конфигураций и комбинаторных множеств

Комбинаторную конфигурацию представим упорядоченной последовательностью, для которой существует симметричная ей. Будем считать, что w^k — симметричная, если совпадает сама с собой при движении без деформаций. Существует единственный способ переместить симметричную последовательность так, чтобы она совпала с начальной, — ее поворот на $180°$.

Введем следующее определение.

Определение 3. Инверсией комбинаторной конфигурации $w = (w_1, \ldots, w_\eta)$ назовем $\tilde{w} = (\tilde{w}_\eta, \ldots, \tilde{w}_1)$, т.е. $w \in W$ и $\tilde{w} \in W$ симметричны.

Для перестановки $w = (1, 2, \ldots, n-1, n)$ симметрична $\tilde{w} = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$.

Лемма 1. Симметричные перестановки $w \in W$ и $\tilde{w} \in W$ принадлежат одному множеству W.

Доказательство очевидно.

Лемма 2. Если множество W упорядочено подмножествами изоморфных комбинаторных конфигураций W_η, то попарно симметричные $w \in W$, как правило, принадлежат разным множествам, которые имеют разное упорядочение. Иными словами, для $w \in W$ симметрична $\tilde{w} \in \tilde{W}$, где W и $\tilde{W}$ имеют разное упорядочение.

Доказательство очевидно.

Пример 1. Рассмотрим сочетания без повторений. Пусть задано базовое множество, которое содержит три элемента — a, b, c. Из них создадим семь сочетаний без повторений по одному, два и три: $W = (a, b, c;\ a\ b, a\ c, b\ c;\ \ a\ b\ c)$. Симметричное ему множество будет $\tilde{W} = (c\ b\ a;\ \ c\, b, c\, a, ba;\ \ c, b, a)$ или $\tilde{W} = {}$ $= (c, b, a;\ \ b\, a, c\, a, c\, b;\ \ c\ b\ a)$.

Симметрия комбинаторного множества одного упорядочения, которое состоит из подмножеств изоморфных комбинаторных конфигураций. Для одного и того же упорядочения множества W смоделируем симметрию конечной последовательностью чисел, каждое из которых определяет количество $w^k \in W_{\eta^k}$, значения которых увеличиваются до наибольшего из них, а затем уменьшаются (или уменьшаются до наименьшего, а потом увеличиваются). Плоскость симметрии, проходящей через наибольшее (или наименьшее) число последовательности, делит ее на две части, значения которых от центра равномерно уменьшаются (или увеличиваются), но эти части необязательно зеркально симметричны. Исследование комбинаторных множеств показывает, что они характеризуются как приближенной, так и точной симметрией. При точной симметрии мнимая плоскость делит последовательность цифр по наибольшему (или наименьшему) числу или проходит между двумя наибольшими (или наименьшими). Две разделенные части зеркально симметричные. При анализе комбинаторных множеств, упорядоченных по другим правилам, можно обнаружить иные виды симметрии.

Определение 4. Под симметрией комбинаторного множества одного и того же упорядочения понимаем такую ее структуру, при которой числовые значения количества комбинаторных конфигураций подмножеств, которыми упорядочено это множество, образуют конечную последовательность чисел, которая характеризуется точной или приближенной симметрией.

Упорядочим множество W подмножествами W_η, начиная с $\eta = 1$ и заканчивая $\eta = n$, рекуррентно-периодическим методом по определенным правилам. Зная правила упорядочения комбинаторных конфигураций в $W_\eta \subset W$, определим количество w в $W_\eta \subset W$ и построим из этих чисел упорядоченную конечную последовательность. Для различных типов комбинаторных конфигураций эти последовательности характеризуются как приближенной, так и точной симметрией. Для сочетания без повторений для различных значений n эти последовательности образуют арифметический треугольник и характеризуются точной симметрией. Для разбиения натурального числа или n-элементного множества на подмножества образованные конечные последовательности характеризуются приближенной симметрией.

Пример 2. Положим $n = 7$. В подмножествах $W_\eta \subset W$ вычислим количество комбинаторных конфигураций, из числовых значений которых построим конечную последовательность. Для сочетания без повторений она принимает вид 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Мнимая плоскость в ней проходит между числами 35, 35. Получаем точную симметрию. Для разбиения натурального числа имеем 1, 3, 4, 3, 2, 1, 1. Для разбиения n-элементного множества на подмножества — соответственно 1, 63, 301, 350, 140, 21, 1. Мнимая плоскость в первой последовательности проходит по числу 4, а во второй — по числу 350. В последних двух случаях имеем приближенную симметрию.

Симметрию комбинаторного множества одного упорядочения рассмотрим на примере перестановок. Две перестановки w и w^* назовем нетождественными, если они отличаются порядком следования в них элементов. Поскольку попарно симметричных перестановок в их множестве содержится $n!/2$, упорядочим W попарно симметричными w и w^* так, что первая w и $n!$ будут симметричны, вторая и $n!-1$ — также симметричны и т.д. Если подмножество перестановок количеством $r+1, \ldots, n!$, где $r = n!/2$, переместить поворотом на 180°, то оно совпадет с первой половиной $1, \ldots, r$. Другими словами, описанное одно и то же упорядочение множества перестановок характеризуется зеркальной симметрией.

Сгенерируем множество перестановок рекуррентно-периодическим методом с учетом свойства периодичности так, что следующая перестановка образуется из предыдущей одной транспозицией по правилам, описанным в [14].

Проанализировав образовавшееся по описанным в [14] правилам множество перестановок W, можно увидеть, что ограничительные перестановки для l-го интервала $(n+1)$-го ранга, $l \in \{\tilde{r}+1, \ldots, n\}$, образуются точно так же, как и для t-го интервала $(n+1)$-го ранга, $t \in \{1, \ldots, \tilde{r}\}$, $\tilde{r} = n/2$, если n — четное, и $\tilde{r} = (n+1)/2$, если n — нечетное, т.е. по отношению к среднему интервалу $\tilde{r}+1$ в упорядоченном подмножестве ограничительных перестановок $W^* \subset W$ имеет место зеркальная симметрия.

 ISSN 0572-2691

Итак, симметрия во множестве перестановок проявляется в зависимости от способа упорядочения в нем симметричных $w \in W$ и $\tilde{w} \in W$.

Симметрия комбинаторных множеств одного типа, но разных упорядочений.

Определение 5. Из всех упорядочений комбинаторных множеств одного типа можно найти такие два упорядочения W и $\tilde{W}$, для одного из которых последовательность комбинаторных конфигураций $w^k \in W$ симметрична последовательности $\tilde{w}^k \in \tilde{W}$, $k = \overline{1, q}$.

Исходя из симметрии комбинаторных множеств любого типа для упорядочения W существует такая $\tilde{W}$, в которой $\tilde{w}^k \in W$ симметрична $w^k \in W$ для одного и того же номера k. Такие два комбинаторных множества характеризуются зеркальной симметрией. Если для W существует такая $\tilde{W}$, в которой $\tilde{w}^q \in W$ симметрично $w^1 \in W$, $\tilde{w}^{q\text{-}1} \in W$ — $w^2 \in W$ и т.д., то два комбинаторных множества W и $\tilde{W}$ характеризуются симметрией поворота на 180°.

Аксиомы знаковых комбинаторных пространств

Исходя из образования и упорядочения комбинаторных конфигураций, сформулируем аксиомы, которым удовлетворяют знаковые комбинаторные пространства [1].

1. Знаковые комбинаторные пространства существуют в двух состояниях: покое (свернутое) и динамике (развернутое).

2. Свернутое пространство задается информационным знаком $\Re = \langle A, T, R, \Xi \rangle$; оно имеет свойства развернутого пространства определенного типа, где A — одно или несколько базовых множеств, из элементов $a_{l_j} \in \mathrm{A}_l \subset A$ которых образуются развернутые комбинаторные пространства, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $l \in \{1, \ldots, m\}$, m — количество базовых множеств; T — тип знакового комбинаторного пространства; R — правила развертывания знакового комбинаторного пространства; Ξ — правила свертывания знакового комбинаторного пространства.

3. Образование из свернутого развернутых знаковых комбинаторных пространств проводится по рекуррентным правилам. Точкой развернутого пространства является комбинаторная конфигурация определенного типа. Для развертывания комбинаторного пространства характерна периодичность, которая следует из рекуррентного способа образования и упорядочения комбинаторных конфигураций.

4. Свертывание знакового комбинаторного пространства определенного типа проводится из точек как одного, так и нескольких пространств. Свернутое пространство имеет свойства пространств, из которых оно было свернуто.

При развертывании знаковых комбинаторных пространств, как видно из выражения (1), образуются фрактальные структуры. Они самоподобны, одновременно конечны и бесконечны, содержат уменьшенные копии развернутого пространства, которые назовем частично развернутыми. Следовательно, эти пространства позволяют объяснить образование фрактальных структур как в комбинаторике, так и в живой природе. Поскольку развернутое комбинаторное пространство образуется из свернутого по рекуррентным правилам, можно исследовать, как образуются геометрические фигуры (фракталы) в биологии.

Знаковые биологические пространства

В литературе описано много природных явлений, связанных с комбинаторными числами, в частности с числами Фибоначчи и «золотым» числом. При формировании соцветия некоторых цветов, чешуи шишек, размещении листьев на деревьях и других растениях образуются правильные спирали, число рядов которых совпадает с числами Фибоначчи. При росте раковин некоторых видов моллюсков, галактических рукавов, спирали лепестков распустившейся розы образуется логарифмическая спираль, которую геометрически можно представить как «золотой прямоугольник», одна сторона которого длиннее в 1,618 раз («золотое» число или число Фидия $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180339887$) [15]. Наличие этого числа в живой природе проявляется через числа Фибоначчи, последовательность которых имеет следующий вид: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Если следующее число этой последовательности разделить на предыдущее, то получим число Фидия. Если разделить предыдущее на следующее, получим обратное число $\varphi = 0{,}618$. До 40-го числа результат совпадает с «золотым» числом. Это говорит о том, что живая и неживая природа подчиняется законам комбинаторики. Сформулируем следующее утверждение.

Теорема. Если для природных пространств справедливы аксиомы 1–4, то они имеют комбинаторную природу.

Доказательство теоремы представлено в [1] и проведено эмпирическим способом.

Таким образом, исходя из аксиом 1–4, семена или живую клетку рассмотрим как свернутое биологическое пространство, которое зададим информационным знаком $\Re = \langle A, T, R, \Xi \rangle$, где A — одно или несколько базовых множеств, элементами которых могут быть аминокислоты или другие базовые биологические объекты, из которых образуются развернутые биологические пространства; T — тип знакового биологического пространства; R — правила развертывания биологического пространства; Ξ — правила свертывания пространства заданного типа из точек как одного, так и нескольких пространств. Иными словами, свернутым биологическим пространством назовем информационный знак, который содержит базовые множества и систему правил, с помощью которых комбинацией элементов этих множеств разворачивается живой организм. Под действием определенных факторов (для растений — это тепло, влага и земля) образуется живой объект — развернутое биологическое пространство, обладающее способностью к свертыванию. Точкой знакового биологического пространства может быть разбиение как натурального числа, так и n-элементного множества на подмножества или сочетание без повторений. Совокупность клеток назовем частично развернутым биологическим пространством. Ритмические (пульсирующие) процессы в живой природе связаны с рекуррентным способом образования развернутых пространств. Знаковые биологические пространства, как и комбинаторные, имеют свойство с точки развернутого (одного или нескольких однотипных) сворачиваться. Новое свернутое пространство имеет свойства тех пространств, из которых оно образовано.

Таким образом, для биологических форм характерны свойства знаковых комбинаторных пространств и их динамика формирования как фракталов, так и симметрии в биологии.

Моделирование динамики развертывания знаковых биологических пространств с использованием знаковых комбинаторных. Под действием определенных факторов свернутое биологическое пространство начинает разворачиваться. Как известно, клетки в живом организме тождественны и имеют все свойства развернутого биологического пространства. Приведем некоторые простейшие известные комбинаторные конфигурации, которые могут быть точками развернутых биологических пространств. Это — сочетание без повторений и разбиение натурального числа. При генерировании этих комбинаторных конфигураций последовательность их количества в подмножествах образуют числа Фибоначчи.

Выборки. С понятием выборки связывают как операцию выбирания элементов заданного базового множества, так и ее результат: выбранное подмножество. В дальнейшем имеем в виду выбранное подмножество. Пусть задано базовое множество $A=\{a_1, ..., a_n\}$. Из него получим η-выборку. Число η называют объемом выборки. В η-выборках, в зависимости от условий задачи, либо учитывается порядок расположения в них элементов (тогда их называют η-перестановками или η-размещениями), либо не учитывается. В этом случае они именуются η-сочетаниями. Поскольку мощность множества неупорядоченных выборок без повторений равна 2^n-1, его сравнивают с бинарными последовательностями.

Итак, существуют такие типы выборок: упорядоченные и неупорядоченные. Неупорядоченные — это сочетания без повторений и с повторениями. Упорядоченные — это размещения с повторениями и без повторений.

Разбиение n-элементного множества на подмножества. Разбиение n-элементного множества A на η подмножеств (блоков) назовем множество подмножеств $w=(w_1, ..., w_\eta)$, такое, что $w_1 \cup ... \cup w_\eta = A$, $w_j \cap w_l = \varnothing$, $j \neq l$, $w_j \neq \varnothing$, $j, l \in \{1, ..., \eta\}$. Непустое подмножество $w_j = \{a_1, ..., a_{\xi_j}\}$, $a_g \in A$, $g \in \{1, ..., n\}$, может иметь от одного до n элементов ($\xi_j \in \{1, ..., n\}$). Количество подмножеств w_j в разбиении w также может быть от одного до n ($\eta \in \{1, ..., n\}$). В зависимости от постановки задачи оно может быть как с повторениями, так и без повторений, а их множество — как конечным, так и бесконечным.

При упорядочении сочетаний без повторений и разбиений n-элементного множества на подмножества образуется конечная последовательность чисел (количество комбинаторных конфигураций в этих множествах), которые образуют арифметический треугольник. Как видно из табл. 3, этим треугольником задаются числа Фибоначчи.

Разбиение натурального числа. Разбиением целого положительного числа называется представление n в виде суммы целых положительных чисел

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\eta,\ \lambda_j > 0,\ j = \overline{1, \eta},\ \eta \in \{1, ..., n\}.$$

Разделяют упорядоченные (композиции) и неупорядоченные разбиения числа. В упорядоченных учитываются разбиения с одинаковым количеством и одинаковым значением их компонент, которые отличаются друг от друга только порядком.

Любое неупорядоченное разбиение w числа n образуется из предыдущего w^* вычитанием из w_j^* значения x и добавлением этого значения x к w_l^*, $j \neq l$, $w^* = (w_1^*, ..., w_j^*, ..., w_l^*, ..., w_\eta^*)$. Операцию, посредством которой образуется разбиение числа, назовем добавление–вычитание или арифметической.

Развертывание знакового биологического пространства может выполняться по следующим схемам.

• Новые клетки образуются делением предыдущей, но для них путем выбирания элементов из базового множества дублируется информация, содержащаяся в базовой клетке. В этом случае образованное знаковое биологическое пространство подобно знаковому комбинаторному пространству сочетания без повторений. При его развертывании образуется арифметический треугольник согласно табл. 3 и формируется последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 1 + 3 + 1 = 5, 1 + 4 + 3 = 8; 1 + 5 + 6 + 1 = 13. Развернутое биологическое пространство характеризуется как точной, так и приближенной симметрией.

• Одна клетка делится на две равные части с частичным или полным перебором элементов базового множества (аминокислот или других базовых биологических объектов). Каждая новая клетка содержит всю информацию, которая находится в базовой. Образованное пространство аналогично множеству разбиения натурального числа. В процессе его развертывания также образуются числа Фибоначчи. Для знакового биологического пространства, образованного по правилам развертывания пространства разбиения натурального числа, характерна приближенная симметрия.

Поскольку комбинаторные множества различных типов имеют разные упорядочения, среди них найдутся как с точной, так и приближенной симметрией.

Заключение

Итак, знаковые комбинаторные пространства, в зависимости от заданных правил, разворачиваются многими способами и могут быть структурированными и неструктурированными, среди которых есть такие, которые характеризуются симметрией как точной, так и приближенной. К тому же они имеют фрактальную структуру. Для некоторых природных пространств, в частности биологических, выполняются аксиомы знаковых комбинаторных, поэтому для них характерны свойства комбинаторики. Таким образом, развертывание знаковых биологических пространств (образование геометрических форм в биологии) происходит аналогично комбинаторным. Используя свойства последних, можно объяснить, откуда в природе появляются комбинаторные числа, и проследить динамику образования симметрии и фрактальных структур в биологии.

Н.К. Тимофієва

ДЕЯКІ ПРИРОДНІ ЯВИЩА
ТА ЗНАКОВІ КОМБІНАТОРНІ ПРОСТОРИ

В літературі описано багато природних явищ, пов'язаних з комбінаторними числами, зокрема із «золотим» числом, яке передається числами Фібо-

наччі. Це говорить про те, що у природі діють закони комбінаторики. Для пояснення таких природних явищ, як наявність комбінаторних чисел у природі, утворення фрактальних структур та симетрії в біології, розглядаються властивості знакових комбінаторних просторів. В упорядкованих за певними правилами комбінаторних множинах числові послідовності, які задають у них кількість комбінаторних конфігурацій, також містять комбінаторні числа, зокрема і числа Фібоначчі. До того ж цим множинам притаманна симетрія. В них остання змодельована скінченною послідовністю чисел, які задають кількість комбінаторних конфігурацій у підмножинах. Їхні значення збільшуються до найбільшого з них, а потім зменшуються (або зменшуються до найменшого, а потім збільшуються). Площина симетрії, яка проходить через найбільше (або найменше) число послідовності, ділить її на дві частини, значення яких від центра рівномірно зменшуються (або збільшуються), але ці частини необов'язково дзеркально симетричні. Вони характеризуються як наближеною, так і точною симетрією. Знакові комбінаторні простори, точкою яких є комбінаторні конфігурації різних типів, існують в двох станах: спокою (згорнутому) та динаміці (розгорнутому). Для них уведено аксіоми. Як і в комбінаторних множинах, у процесі розгортання цих просторів утворюються фрактали та симетрії різних видів. Аксіоми знакових комбінаторних просторів справедливі і для деяких природних, зокрема біологічних. Тому, досліджуючи симетрію та фрактали в комбінаториці, можна пояснити, як вони утворюються в біології. На запитання, яким чином виникає симетрія в розгорнутих біологічних просторах, відповіді ще не знайдено. Знаючи утворення симетрії в комбінаторних множинах, можна пояснити утворення симетрії в біології.

Ключові слова: комбінаторні числа, знакові комбінаторні простори, симетрія комбінаторних множин, симетрія комбінаторних конфігурацій, фрактали.

N.K. Tymofijeva

SOME NATURAL PHENOMENA AND SIGN COMBINATORIAL SPACES

The literature describes many natural phenomena associated with combinatorial numbers, including the «gold» number that is represented by Fibonacci numbers. This suggests that the laws of combinatorics are inherent in nature. To explain such natural phenomenons as the presence of combinatorial numbers in nature, the formation of fractal structures and symmetry in biology, the properties of sign combinatorial spaces are used. In the combinatorial sets ordered by certain rules the numerical sequences that specify in them the number of combinatorial configurations also contain combinatorial numbers, including Fibonacci numbers. In addition, they are characterized by symmetry. In these sets, symmetry is modeled by a finite sequence of numbers that define the number of combinatorial configurations in subsets. Their values increase to the largest and then decrease (or decrease to the smallest and then increase). The symmetry plane passing through the largest (or smallest) number of the sequence divides it into two parts whose values from the center decrease (or increase) evenly, but these parts are not necessarily mirror symmetrical. They are characterized by both approximate and exact symmetry. Sign combinatorial spaces, the point of which are combinatorial configurations of different types, exist in two states: convolute (tranquility) and deployed (dynamics). Axioms are introduced for them. As in combinatorial sets, fractals and symmetries of different kinds are formed in the process of unfolding these spaces. The axioms of sign combinatorial spaces hold for some natural ones, including biological. Therefore, exploring symmetry and fractals in the combinatorics, we can explain how they are formed in biology. The question of how it arises symmetry in deployed biological spaces is not yet found. Knowing the formation of symmetry in combinatorial sets, one can explain the formation of symmetry in biology.

Keywords: combinatorial numbers, sign combinatorial spaces, symmetry of combinatorial sets, symmetry of combinatorial configurations, fractals.

1. Тимофієва Н.К. Знакові комбінаторні простори та штучний інтелект. *Штучний інтелект.* 2015. **67–68**, № 1–2. С. 180–189.
2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. К. : Наук. думка, 1981. 281 с.
3. Бурдюк В.Я. Дискретное метрическое пространство. Днепропетровск : ДГУ, 1982. 99 с.
4. Bichara Alessandro. Ruled sets imbedden in a combinatorial space. *Atti Semin. Mat. e fis. Univ. Modena.* 1982. **31**, N 2. P. 213–218
5. Golenko-Ginzburg Dvitri. Metrics in the permutation space. *Appl. Math. Lett*. 1991. 4, N 2. P. 5–7.
6. Skordev D. Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astronom. Phys*. 1976. 24, N 1. P. 23–31.
7. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. К. : Наук. думка, 1992. 207 с.
8. Савченко І.О. Фрактальний аналіз множин неповних сум числових рядів. Дис. … на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. математичний аналіз. К. : Націон. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова МОН України, 2016. 20 с.
9. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М. : Постмаркет, 2000. 352 с.
10. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск : Институт компьютерных исследований (ИКИ), 2010. 656 с
11. Петухов С.В. Геометрии живой природы и алгоритмы самоорганизации. М. : Знание. Сер. *«Математика. кибернетика»*. 1988. № 6. 48 с.
12. Prabhu V.V. Symmetry observations in long nucleotide sequences. Nucleic Acids Res. 1993. 21, N 12. P. 2797–2800.
13. Волохонский А.Г. Генетический код и симметрия. Симметрия в природе. Ленинград : Наука, 1971. С. 371–375.
14. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Дис. … на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02. Математичне моделювання та обчислювальні методи. К. : Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007. 374 с.
15. Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты. Мир математики : в 40 т. Пер. с англ. М. : Де Агостини, 2014. Т 1. 160 с.
16. Тимофієва Н.К. Про фрактальну структуру знакових комбінаторних просторів. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Сер. Фізико-математичні науки. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2017. С. 236–242.

Получено 24.12.2019