УДК 519.21+62

Я.М. Чабанюк, А.В. Никитин, У.Т. Химка

АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА В МАРКОВСКОЙ СРЕДЕ

Ключевые слова: случайная эволюция, стохастическое дифференциальное уравнение, марковское переключение, процедура стохастической оптимизации.

Введение

Установление сходимости процедуры стохастической оптимизации является важной задачей системного анализа в условиях неопределенности, которую можно моделировать с помощью эргодической марковской среды [1, 2]. Об актуальности определения новых свойств и обобщений алгоритмов оптимизации, в которых используется случайность в процессе поиска оптимума, свидетельствуют многочисленные приложения в теории управления, теории передачи информации, а также при решении непараметрических задач математической статистики.

В настоящей статье продолжаем исследования, начатые в работах [3–11], в которых изучены асимптотические свойства эволюционных моделей при использовании различных схем аппроксимации. В частности, в [7] исследованы процедуры стохастической аппроксимации с точки зрения теории марковских процессов и мартингалов, а в [6] указаны алгоритмы построения предельных генераторов для управляемого диффузионного процесса в схеме стохастической аппроксимации в условиях единственной точки равновесия критерия качества. В этой статье изучены асимптотические свойства эволюционной системы в виде возмущенного управляемого процесса переноса с марковскими переключениями в условиях единственной точки экстремума функции оценки качества управления.

Постановка задачи

Рассмотрим диффузионный процесс переноса $y(t) \in \mathrm{R}^d$, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением [2]

$$dy(t) = a(y(t), x(t))\,dt + \sigma(y(t), x(t), u(t))\,dW(t), \tag{1}$$

где $x(t), t \geq 0,$ — равномерно эргодический марковский процесс, который определен на измеримом фазовом пространстве $(X, \mathbf{X})$ с помощью генератора

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_E P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)] \quad (2)$$

на банаховом пространстве $B(X)$ ограниченных функций с вещественными значениями и супремум-нормой

$$\|\varphi(x)\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

Для процесса $x(t), t \geq 0,$ существует стационарное распределение $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X},$ которое определяется соотношениями

$$\pi(dx)\, q(x) = q\rho(dx), \quad q = \int_X \pi(dx)\, q(x),$$

где $\rho(dx)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова $x_n = x(\tau)$, $n \geq 0$ [3], а $\tau_n, n \geq 0$ — моменты марковского восстановления [3]. В (2) $q(x) = (g(x))^{-1}$, $g(x) = \mathrm{E}\theta_x, \theta_x$ — время пребывания марковского процесса $x(t)$ в состоянии $x,$ а $P(x, B), x \in X, B \in \mathbf{X},$ — стохастическое ядро. Для оператора $\mathbf{Q}$ определен потенциал R_0 с помощью соотношения

$$R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}.$$

Здесь $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\, \varphi(y) 1(x)$ — проектор на подпространство $N_{\mathbf{Q}} = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулей оператора $\mathbf{Q}$.

Функции $a(y, x) = (a_k(y, x)), k = \overline{1, d},$ и $\sigma(y, x, u) = (\sigma_k(y, x, u), k = \overline{1, d}),$ $y \in \mathrm{R}^d$, $x \in X$, предполагаются такими, что

$$\mathrm{A1}: a(y, x) \in C(\mathrm{R}^d); \ \ \sigma(y, x, u) \in C(\mathrm{R}^d, X, \mathrm{R}^d),$$

и это условие обеспечивает существование глобального решения эволюционных уравнений

$$dy_x(t) = a(y_x(t), x)\, dt + \sigma(y_x(t), x, u_x(t))\, dW(t) \quad (3)$$

для каждого фиксированного значения $x := x(t),\ \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$.

Управление $u(t) = (u_k(t), k = \overline{1, d})$ в процессе переноса y из (1) оценивается критерием качества $G(y, x, u),$ который имеет единственную точку равновесия u_x^* на каждом интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ из (3). В общем случае такое управление определено условием

$$\frac{\partial G(y(t), x(t), u(t))}{\partial u_k} = 0 \ \ (k = \overline{1, d}). \quad (4)$$

Отметим здесь также тот факт, что решение стохастического дифференциального уравнения (1) на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ является марковским процессом с неслучайным управлением.

Для установления асимптотических свойств задачи управления (1), (4) в схеме серий с малым параметром $\varepsilon > 0$ рассмотрим далее стохастическое уравнение

$$dy^{\varepsilon}(t) = a(y^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon))dt + \sigma(y^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon), u^{\varepsilon}(t))\, dW(t), \quad (5)$$

а также процедуру стохастической оптимизации [9]

$$du^{\varepsilon}(t) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon), u^{\varepsilon}(t))\,dt, \tag{6}$$

где

$$\nabla_{\beta(t)}G(\cdot,\cdot,u) = (G(\cdot,\cdot,u_i^{+}) - G(\cdot,\cdot,u_i^{-}))/2\beta(t), \;\; i=\overline{1,d},$$

$$u_i^{\pm} = u_i \pm \beta(t)e_i, \;\; i=\overline{1,d}, \;\; e_i = (0,\ldots,1,0,\ldots,0).$$

Общие начальные условия имеют вид

$$y(0) = y_0;\, x(0) = x_0;\, u(0) = u_0. \tag{7}$$

Функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t>0$, удовлетворяют условиям

$$\text{A2:}\, \alpha(t)\to 0, \;\; \beta(t)\to 0 \;\text{ при }\; t\to\infty.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия A1 и A2, а критерий качества $G(y,x,u)\in C(\mathrm{R}^d, X, \mathrm{R}^d)$.

Тогда выполняется слабая сходимость

$$(y^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)) \Rightarrow (\hat{y}(t), \hat{u}(t)), \;\; \varepsilon\to 0, \tag{8}$$

где $\varepsilon<\varepsilon_0$, ε_0 — достаточно малое, а предельный процесс $(\hat{y}(t),\hat{u}(t))$ определяется генератором

$$\mathbf{L}\varphi(y,u) = \mathbf{A}(y,u)\,\varphi(y,u) + \frac{1}{2}\mathbf{B}(y,u)\,\varphi(y,u), \tag{9}$$

составляющие которого имеют на тест-функциях $\varphi(y,u)\in C^{3,2}(\mathrm{R}^d, \mathrm{R}^d)$ представления

$$\mathbf{A}(y,u)\,\varphi(y,u) = a(y)\,\varphi'_y(y,u) + \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,u)\,\varphi'_u(y,u),$$

$$\mathbf{B}(y,u)\,\varphi(y,u) = \sigma^2(y,u)\,\varphi''_{yy}(y,u), \tag{10}$$

где

$$a(y) = \int_X \pi(dx)a(y,x), \;\; \nabla_{\beta(t)}G(y,u) = \int_X \nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\,\pi(dx),$$

$$\sigma^2(y,u) = \int_X \sigma^2(y,x,u)\,\pi(dx).$$

Прежде чем доказывать теорему, приведем формулировки нескольких важных следствий.

Следствие 1. Предельный процесс $(\hat{y}(t),\hat{u}(t))$ задачи управления (5)–(7) определен стохастическими дифференциальными уравнениями

$$d\,\hat{y}(t) = a(\hat{y}(t))\,dt + \sigma(\hat{y}(t),\hat{u}(t))\,dW(t),$$

$$d\hat{u}(t) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(\hat{y}(t),\hat{u}(t))dt$$

с начальными условиями (7).

Следствие 2. Предположим, что процесс переноса $y(t)$ определен в схеме серий стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\,y^{\varepsilon}(t)=a(y^{\varepsilon}(t),x(t/\varepsilon),u^{\varepsilon}(t))\,dt+\sigma(y^{\varepsilon}(t),x(t/\varepsilon),u^{\varepsilon}(t))\,dW(t)$$

с управлением, заданным уравнением (6) и составляющими $a(y,x,u)$, $\sigma(y,x,u)$, $G(y,x,u)\in C^{2,0,2}(\mathrm{R}^d,\ X,\mathrm{R}^d)$.

При таких условиях имеет место слабая сходимость (8), а предельный процесс $(\hat{y}(t),\hat{u}(t))$ определяется генератором (9) на тест-функциях $\varphi(y,u)\in$ $\in C^{3,2}(\mathrm{R}^d,\ \mathrm{R}^d)$ в виде

$$\mathbf{A}(y,u)\,\varphi(y,u)=a(y,u)\,\varphi'_y(y,u)+\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,u)\,\varphi'_u(y,u),$$

$$a(y,u)=\int_X \pi(d\,x)\,a\,(y,x,u),$$

а также выражением (10).

Доказательство теоремы 1. На первом этапе установим предельное представление генератора трехкомпонентного марковского процесса

$$(y_t^{\varepsilon}=y^{\varepsilon}(t),\ x_t^{\varepsilon}=x^{\varepsilon}(t)=x(t/\varepsilon),u_t^{\varepsilon}=u^{\varepsilon}(t)) \tag{11}$$

в виде

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}(y,x,u)\,\varphi(y,x,u)=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi\,(x_{t+\Delta}^{\varepsilon},\ y_{t+\Delta}^{\varepsilon},u_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi\,(x,\ y,u)\,\big|\,y_t^{\varepsilon}=y,\ x_t^{\varepsilon}=x,u_t^{\varepsilon}=u]. \tag{12}$$

Для условного математического ожидания

$$\mathrm{E}_{y,x,u}\,\varphi(y_{t+\Delta}^{\varepsilon},\ x_{t+\Delta}^{\varepsilon},u_{t+\Delta}^{\varepsilon})=\mathrm{E}[\varphi(y_{t+\Delta}^{\varepsilon},\ x_{t+\Delta}^{\varepsilon},u_{t+\Delta}^{\varepsilon})\,\big|\,y_t^{\varepsilon}=y,\ x_t^{\varepsilon}=x,u_t^{\varepsilon}=u]$$

выполняется разложение

$$\mathrm{E}_{y,x,u}\,\varphi(y_{t+\Delta}^{\varepsilon},\ x_{t+\Delta}^{\varepsilon},u_{t+\Delta}^{\varepsilon})=\mathrm{E}_{y,x,u}\,\varphi\Bigg(y+\int_t^{t+\Delta}a(y^{\varepsilon}(s),x)\,ds+$$

$$+\int_t^{t+\Delta}\sigma(y^{\varepsilon}(s),x,u^{\varepsilon}(s))\,dW(s),x,u+\Delta u\Bigg)I(\theta>\varepsilon^{-1}\Delta)+$$

$$+\mathrm{E}_{y,x,u}\,\varphi\Bigg(y+\int_t^{t+\Delta}a\,(y^{\varepsilon}(s),x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\,ds+\int_t^{t+\Delta}\sigma(y^{\varepsilon}(s),x_{t+\Delta}^{\varepsilon},u^{\varepsilon}(s))\,dW(s),x_{t+\Delta}^{\varepsilon},u+\Delta u\Bigg)\times$$

$$\times I(\theta<\varepsilon^{-1}\Delta)+\mathrm{o}(\Delta). \tag{13}$$

Для идентификатора $I(\cdot)$ времени пребывания в состоянии x марковского процесса $x(t),t\geq 0$, справедливы представления

$$I(\theta>\varepsilon^{-1}\Delta)=1-e^{-1}q(x)\,\Delta+o(\Delta), \tag{14}$$

$$I(\theta\leq\varepsilon^{-1}\Delta)=e^{-1}q(x)\,\Delta+o(\Delta). \tag{15}$$

ISSN 0572-2691

Для первого слагаемого в (13) рассмотрим подынтегральную функцию

$$\varphi\left(y+\int_t^{t+\Delta} a(y^{\varepsilon}(s), x)\, ds+\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s)\,, x, u+\Delta u \right)=$$

$$=\varphi\left(v+\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s), x, u+\Delta u \right),$$

где $v=y+\int_t^{t+\Delta} a(y^{\varepsilon}(s), x)\, ds.$

Учитывая $\pm\varphi(w, x, u+\Delta u),$ из последнего соотношения получим

$$\varphi\left(v+\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s), x, u+\Delta u \right)=$$

$$=\varphi'_y(v, x, u+\Delta u)\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(v, x, u+\Delta u)\left[\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s)\right]^2+$$

$$+\varphi(v, x, u+\Delta u)+o(\Delta). \tag{16}$$

Так как

$$\varphi'_y(v, x, u+\Delta u)=\varphi'_y(v, x, u)+\varphi''_{uy}(v, x, u)\,\Delta+o(\Delta),$$

$$\varphi''_{yy}(v, x, u+\Delta u)=\varphi''_{yy}(v, x, u)+\varphi'''_{uyy}(v, x, u)\,\alpha(t)\,\nabla_{\beta(t)}G(y, x, u)\,\Delta+o(\Delta),$$

согласно (16) получим

$$\varphi\left(v+\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s), x, u+\Delta u \right)=$$

$$=\varphi(v, x, u)+\varphi'_u(v, x, u)\,\alpha(t)\,\nabla_{\beta(t)}G(y, x, u)\,\Delta+o(\Delta)+$$

$$+\varphi'_y(v, x, u)\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s)+$$

$$+\alpha(t)\,G(y, x, u)\,\varphi''_{yu}(v, x, u)\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s)\,\Delta+o(\Delta)+$$

$$+\frac{1}{2}\varphi''_{yy}(v, x, u)\left[\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s)\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha(t)\,\nabla_{\beta(t)}G(y, x, u)\,\varphi'''_{yyu}(v, x, u)\left[\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^{\varepsilon}(s), x, u^{\varepsilon}(s))\, dW(s)\right]^2\Delta+o(\Delta). \tag{17}$$

Из представления для v и гладкости функции $\varphi(v, x, u)$ имеем

$$\varphi(v, x, u) = \varphi(y, x, u) + \varphi'_y(y, x, u)\, a(y, x)\, \Delta + o(\Delta).$$

Тогда (17) можно записать в виде

$$\varphi\left(v + \int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))\, dW(s), x, u + \Delta u \right) =$$

$$= \varphi(y, x, u) + \varphi'_y(y, x, u)\, a(x, y)\, \Delta + \alpha(t) \nabla_{\beta(t)} G(y, x, u)\, \varphi'_u(y, x, u)\, \Delta +$$

$$+ \varphi'_y(y, x, u)\, a(y, x) \int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))\, dW(s)\, \Delta +$$

$$+ \alpha(t) \nabla_{\beta(t)} G(y, x, u)\, \varphi''_{yu}(y, x, u) \int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))\, dW(s)\, \Delta +$$

$$+ \frac{1}{2} \varphi''_{yy}(v, x, u) \left[\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))\, dW(s) \right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha(t) \nabla_{\beta(t)} G(y, x, u)\, \varphi'''_{yyu}(v, x, u) \left[\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))\, dW(s) \right]^2 \Delta + o(\Delta). \quad (18)$$

Так как справедливы соотношения

$$\mathrm{E}_{y,x,u} \left[\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))\, dW(s) \right] = 0,$$

$$\mathrm{E}_{y,x,u} \left[\int_t^{t+\Delta} \sigma(y^\varepsilon(s), x, u^\varepsilon(s))\, dW(s) \right]^2 = \sigma^2(y, x, u)\, \Delta + o(\Delta),$$

учитывая разложения (14), (15) и (18), для представления (13) получим

$$\mathrm{E}_{y,x,u}(y, x, u)[\varphi(y^\varepsilon_{t+\Delta}, x^\varepsilon_{t+\Delta}, u^\varepsilon_{t+\Delta})] =$$

$$= \varphi(y, x, u) + [\varphi'_y(y, x, u)\, a(y, x) + \alpha(t) \nabla_{\beta(t)} G(y, x, u)\, \varphi'_u(y, x, u)]\Delta +$$

$$+ \frac{1}{2} \varphi''_{yu}(y, x, u)\, \sigma^2(y, x, u)\, \Delta - \varepsilon^{-1} q\, \mathrm{E}_{y,x,u}\, \varphi(y, x, u)\, \Delta +$$

$$+ \varepsilon^{-1} q(x)\, \mathrm{E}_{y,x,u}\, \varphi(y, x^\varepsilon_{t+\Delta}, u)\, \Delta + o(\Delta).$$

Произведем вычисления генератора $\mathbf{L}^\varepsilon_t(y, x, u)\Delta$ согласно (12)

$$\mathbf{L}^\varepsilon_t(y, x, u)\, \varphi(y, x, u) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \varepsilon^{-1} q(x)\, \mathrm{E}_{y,x,u}[\varphi(y, x^\varepsilon_{t+\Delta}, u) - \varphi(y, x, u)] +$$

ISSN 0572-2691

$$+a(y,x)\varphi'_y(y,x,u)+\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\varphi'_u(y,x,u)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,x,u)=$$

$$=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,x,u)+a(y,x)\varphi'_y(y,x,u)+\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\varphi'_u(y,x,u)+$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,x,u).$$

Приведенные выше размышления оформим в виде следующего утверждения.

Лемма 1. Генератор трехкомпонентного марковского процесса (11) на тест-функциях $\varphi(y,x,u)\in C^{3,0,2}(\mathrm{R}^d, X, \mathrm{R}^d)$ представим в виде

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}(y,x,u)\varphi(y,x,u)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,x,u)+\mathbf{L}_t(y,x,u)\varphi(y,x,u),$$

где

$$\mathbf{L}_t(y,x,u)\varphi(y,x,u)=a(y,x)\varphi'_y(y,x,u)+$$

$$+\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\varphi'_u(y,x,u)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,x,u).$$

Лемма 2. Если выполнены условия теоремы 1 и леммы 1, то решение проблемы сингулярного возмущения [3] для оператора $\mathbf{L}_t^{\varepsilon}(y,x,u)$ на тест-функциях

$$\varphi^{\varepsilon}(y,x,u)=\varphi(y,u)+\varepsilon\varphi_1(y,x,u),\ \ \varphi(y,x)\in C^{4,4}(\mathrm{R}^d, \mathrm{R}^d)$$

определено предельным генератором

$$\mathbf{L}_0\varphi(y,u)=\mathbf{L}(y)\varphi(y,u)+\mathbf{L}_t(u)\varphi(y,u), \tag{19}$$

где

$$\mathbf{L}(y)\varphi(y,u)=a(y)\varphi'_y(y,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(y,u)\varphi''_{yy}(y,u), \tag{20}$$

$$\mathbf{L}_t(u)\varphi(y,u)=\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,u)\varphi'_u(y,u). \tag{21}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение представление

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}(y,x,u)\varphi^{\varepsilon}(y,x,u)=\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(y,u)+a\varphi_1(y,x,u)+$$

$$+\mathbf{L}_t(y,x,u)\varphi(y,u)+\varepsilon\mathbf{L}_t(y,x,u)\varphi_1(y,x,u). \tag{22}$$

Сразу же отметим, что последнее слагаемое в (22) даст остаточный член разложения в виде

$$\theta_t(x)=\mathbf{L}_t(y,x,u)\varphi_1(y,x,u). \tag{23}$$

Согласно схеме решения проблемы сингулярного возмущения [3] получим уравнение

$$\mathbf{Q}\varphi_1(y,x,u)+\mathbf{L}_t(y,x,u)\varphi(y,u)=\mathbf{L}_t(y,u)\varphi(y,u),$$

отсюда

$$\varphi_1(y,x,u)=\mathrm{R}_0[\mathbf{L}_t(y,u)-\mathbf{L}_t(y,x,u)]\varphi(y,u)$$

или

$$\varphi_1(y,x,u)=\mathrm{R}_0\tilde{\mathbf{L}}_t(y,x,u)\varphi(y,u), \tag{24}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{L}}_t(y,x,u)\varphi(y,u)=\widetilde{a}(y,x)\varphi'_y(y,u)+\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,u)+$$

$$+\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}\widetilde{G}(y,x,u)\varphi'_u(y,u),$$

$$\widetilde{\sigma}^2(y,x,u)=\sigma^2(y,u)-\sigma^2(y,x,u),$$

$$\widetilde{G}(y,x,u)=G(y,u)-G(y,x,u).$$

Используем (24) для вычисления остаточного члена (23):

$$\theta_t(x)=\mathbf{L}_t(y,x,u)\mathrm{R}_0\,\widetilde{\mathbf{L}}_t(y,x,u)\varphi(y,u)=$$

$$=\theta_y(x)\varphi(y,u)+\theta_u(x)\varphi(y,u),$$

где

$$\theta_y(x)\varphi(y,u)=a(y,x)\mathrm{R}_0[\widetilde{a}(y,x)\varphi'_y(y,u)]'_y+$$

$$+\frac{1}{2}a(y,x)\mathrm{R}_0[\widetilde{\sigma}^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,u)]'_y+$$

$$+\frac{1}{2}\sigma^2(y,x,u)\mathrm{R}_0[\widetilde{a}(y,x,u)\varphi'_y(y,u)]''_{yy}+$$

$$+\frac{1}{4}\sigma^2(y,x,u)\mathrm{R}_0[\widetilde{\sigma}^2(y,u)\varphi''_{yy}(y,u)]''_{yy}+$$

$$+\alpha(t)a(y,x)\mathrm{R}_0[\nabla_{\beta(t)}\widetilde{G}(y,x,u)\varphi'_u(y,u)]'_u+$$

$$+\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\mathrm{R}_0[\widetilde{a}(y,x)\varphi'_y(y,u)]'_u+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\mathrm{R}_0[\widetilde{\sigma}^2(y,x,u)\varphi''_{yy}(y,u)]'_u+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha(t)\sigma^2(y,x,u)\mathrm{R}_0[\nabla_{\beta(t)}\widetilde{G}(y,x,u)\varphi'_u(y,u)]''_{yy};$$

$$\theta_u(x)\varphi(y,u)=\frac{1}{2}\alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y,x,u)\mathrm{R}_0[\nabla_{\beta(t)}\widetilde{G}(y,x,u)\varphi'_u(y,u)]'_u.$$

Согласно условиям теоремы 1 и леммы 2 получим ограниченность остаточного члена $\theta(x)$ для произвольных $x\in X$, удовлетворяющих условиям модельной теоремы Королюка [2]. Таким образом, предельный оператор имеет вид (19) с соответствующим представлением генераторов в виде (20), (21).

Теорема 2. Пусть функция Ляпунова $V(y,u)$ усредненной системы

$$\frac{du}{dt}=G^*(y,u), \tag{25}$$

где

$$G^*(\cdot,u)=\operatorname{grad}G(\cdot,u)=\left\{\frac{\partial G}{\partial u_i},\,i=\overline{1,d}\right\},$$

 ISSN 0572-2691

для произвольного значения процесса y такая, что

$$\text{Y1}: \ G^*(y,u)V'(y,u) \le -c_0 V(y,u).$$

Усредненная функция качества $G(y,u)$ удовлетворяет по y глобальному условию Липшица

$$\text{Y2}: \ \left|\nabla_{\beta(t)} G(y,u) - G^*(y,u)\right| \le c_2 \beta(t); \ c_2 > 0.$$

Пусть далее функции Y2 : $\alpha(t) > 0$ и $\beta(t) > 0$ такие, что

$$\text{Y3}: \ \left|\nabla_{\beta(t)} G(y,x,u) R_0 [\nabla_{\beta(t)} \tilde{G}(y,x,u) V'(y,u)]'_u\right| \le c_1 (1 + V(y,u)),$$

$$\text{F1}: \ \int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\,dt = \infty, \ \int_{t_0}^{\infty} \alpha(t)\beta(t)\,dt < \infty, \ t_0 > 0.$$

В таком случае $\forall \varepsilon, \varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0$ — произвольное малое, для решения задачи управления (5), (6) и произвольного значения процесса y справедливо соотношение

$$\mathrm{P}\{\lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(t) = u(y)\} = 1.$$

Доказательство. Выделим генератор управления $\mathbf{L}_u^{\varepsilon}(x)V(y,u)$ в лемме 2 и соотношение (25) на функциях Ляпунова $V(y,u)$

$$\mathbf{L}_u^{\varepsilon}(x)V(y,u) = \mathbf{L}_t(u)V(y,u) + \varepsilon\theta_u(x)V(y,u).$$

Из условий Y1–Y3 теоремы 2 получим оценку

$$\mathbf{L}_u^{\varepsilon}(x)V(y,u) \le -c_0\alpha(t)V(y,u) + \alpha(t)\beta(t)c^*(1+V(y,u)), \ \forall y.$$

Учитывая последнее неравенство и условие F1, из теоремы Невельсона–Хасьминского [7] получим утверждение теоремы 2.

Заключение

Полученный результат позволяет для диффузионного процесса переноса с марковскими переключениями и управлением, которое определяется условием экстремума функции качества управления с марковскими переключениями, построить предельный процесс переноса и процедуру стохастической оптимизации для начального процесса управления. В схеме усреднения получены достаточные условия сходимости процедуры к оптимальному управлению с равной единице вероятностью.

Применение малого параметра в схеме диффузионной аппроксимации дает возможность рассматривать задачу оптимального управления в условиях баланса на сингулярное возмущение процесса переноса.

Я.М. Чабанюк, А.В. Нікітін, У.Т. Хімка

АСИМПТОТИКА ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ В МАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Для системи стохастичних диференціальних рівнянь з марковськими перемикуваннями та дифузійним збуренням з керуванням, яке визначається умовою екстремума функції якості, побудовано процедуру стохастичної оптимізації та граничний генератор початкової задачі. Складність дослідженої еволюційної моделі полягає насамперед у тому, що система перебуває в умовах зовнішнього випадкового впливу, який моделюється за допомогою перемикаючого процесу. Головним припущенням є умова рівномірної ергодичності марковського процесу переключень, тобто існування стаціонарного розподілу для перемикаючого процесу на великих інтервалах часу. Це дозволяє будувати явні алгоритми аналізу асимптотичної поведінки керованого процесу. Важлива властивість генератора марковського процесу переключення полягає у тому, що простір, на якому він визначений, розпадається на пряму суму його нуль-підпростору та підпростору значень з подальшим введенням в розгляд проектора, що діє на підпростір нулів. Ще однією складністю досліджуваної моделі є наявність схеми апроксимації, що визначається нормуванням. Вивчено питання, як поведінка граничного процесу залежить від дограничного нормування малим параметром стохастичної системи в ергодичному марковському середовищі. Виписано стохастичне диференціальне рівняння для визначення граничних процесів переносу та керування. Вперше запропоновано модель задачі керування для дифузійного процесу переносу з використанням процедури стохастичної оптимізації для керування. Отримано сингулярний розклад за малим параметром генератора трикомпонентного марковського процесу та розв'язано проблему сингулярного збурення з представленням граничного генератора цього процесу.

Ключові слова: випадкова еволюція, стохастичне диференціальне рівняння, марковське переключення, процедура стохастичної оптимізації.

Ya.M. Chabanyuk, A.V. Nikitin, U.T. Khimka

ASYMPTOTICS OF CONTROL PROBLEM FOR THE DIFFUSION PROCESS IN MARKOV ENVIRONMENT

A stochastic optimization procedure and a limit generator of the original problem are constructed for a system of stochastic differential equations with Markov switching and diffusion perturbation with control, which is determined by the condition for the extremum of the quality function. The complexity of the studied evolutionary model lies primarily in the fact that the system is in conditions of external random influence, is modeled using a switching process. The main assumption is the condition for uniform ergodicity of the Markov switching process, that is, the existence of a stationary distribution for the switching process over large time intervals. This allows one to construct explicit algorithms for the analysis of the asymptotic behavior of a controlled process. An important property of the generator of the Markov switching process is that the space in which it is defined splits into the direct sum of its zero-subspace and a subspace of values, followed by the introduction of a projector that acts on the subspace of zeros. Another complexity of the model under study is the presence of an approximation scheme determined by normalization. The question of how the behavior of the limit process depends on the limit normalization by a small parameter of the stochastic system in an ergodic Markovian environment is studied. A stochastic differential equation is written for determining the limiting processes of transfer and control. For the first time, a model of the control problem for the diffusion transfer process using the stochastic optimization procedure for control is proposed. A singular expansion in the small parameter of the generator of the three-component Markov process is obtained, and the problem of a singular perturbation with the representation of the limiting generator of this process is solved.

Keywords: random evolution, stochastic differential equation, Markov switching, stochastic optimization procedure.

1. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. Berlin : Springer-Verlag, 2003. 601 p.
2. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. Dordrecht : Kluwer, 1999. 185 p.
3. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. Singapore : World Scientific, 2005. 348 p.
4. Samoilenko I.V., Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V., Khimka U.T. Differential equations with small stochastic additions under Poisson approximation conditions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. **53**, N 3. P. 410–416. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9941-7
5. Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V., Khimka U.T. Asymptotic properties of the impulse perturbation process with control function under Levy approximation conditions. *Mat. Stud.* 2019. **52**. P. 96–104. doi:10.30970/ms.52.1.96-10
6. Nikitin A.V., Khimka U.T. Asymptotics of normalized control with Markov switchings. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2017. **8**, N 68. P. 1252–1262. https://doi.org/10.1007/s11253-017-1291-0
7. Nevelson M.B., Khas'minskii R.Z. Stochastic approximation and recursive estimation. Amer. Math. Soc., Providence, RI, Translation of Math. Monographs. 1976. **47**. 244 p.
8. Nikitin A.V. Asymptotic dissipativity of stochastic processes with impulsive perturbation in the Levy approximation scheme. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. **50**, N 4. P. 205–211. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0021-4
9. Khimka U.T., Chabanyuk Ya.M. A difference stochastic optimization procedure with impulse perturbation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2013. **49**, N 5. P. 768–773. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9564-6
10. Samoilenko I.V., Chabanyuk Y.M., Nikitin A.V., Khimka U.T. Differential equations with small stochastic additions under Poisson approximation conditions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. **53**, N 3. P. 410–416. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9941-7
11. Nikitin A.V. Asymptotic properties of a stochastic diffusion transfer process with an equilibrium point of a quality criterion. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2015. **51**, N 4. P. 650–656. https://doi.org/10.1007/s10559-015-9756-3

Получено 29.01.2020