

СВОЙСТВА МНК-ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ БИПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ключевые слова: бипериодически коррелированные случайные процессы, оценка корреляционной функции, метод наименьших квадратов (МНК), асимптотическая несмещенность и состоятельность, просачивание.

Введение

Адекватной моделью колебаний, для которых характерны черты как повторяемости, так и стохастичности, являются периодически коррелированные случайные процессы (ПКСП) [1–4]. К колебаниям такого типа относятся сигналы-носители информации в радиосвязи, телеметрии, локации, шумы в атмосфере и океане, шумы в электрических цепях и др. [1, 3, 4]. Сигналы приобретают свойства стохастической повторяемости в результате модуляции, дискретизации, сканирования, кодирования [1, 5, 6]. Решение задач преобразования сигналов, обработки, фильтрации, диагностики на основе ПКСП-модели дает возможность существенно повысить эффективность полученных результатов [1, 6]. Однако при анализе колебаний как естественного, так и искусственного происхождения часто возникают ситуации, когда стохастическая повторяемость одного периода взаимодействует со стохастической повторяемостью другого. В сигналах связи, например, проявляются повторяемости, обусловленные как периодичностью несущей, так и ритмичной изменчивостью модулирующего сигнала [5, 7]. В системах электроснабжения — это суточная, недельная и годовая ритмика [4]. В сигналах вибрации электрических машин полиритмическая изменчивость обусловлена разной скоростью вращения отдельных элементов механических узлов [8, 9]. Для анализа свойств двойной ритмики используют ее модели в виде бипериодически коррелированных случайных процессов (БПКСП) [4, 10]. Математическое ожидание БПКСП $m(t) = E\xi(t)$, E — оператор усреднения по распределению, и его корреляционная функция $b(t, u) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$, представляются рядами Фурье:

$$m(t) = \sum_{k,l \in Z} m_{kl} e^{i\lambda_{kl}t},$$

$$b(t, u) = \sum_{k,l \in Z} B_{kl}(u) e^{i\lambda_{kl}t},$$

где $\lambda_{kl} = k \frac{2\pi}{T_1} + l \frac{2\pi}{T_2}$, T_1 и T_2 — основные периоды. Величины m_{kl} и $B_{kl}(u)$ теоретически определяются предельными соотношениями:

$$m_{kl} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(t) e^{-i\lambda_{kl}t} dt, \quad B_{kl}(u) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) e^{-i\lambda_{kl}t} dt.$$

При вычислении математического ожидания и корреляционной функции БПКСП по экспериментальным данным, когда длина отрезка реализации θ ограничена, могут использоваться представления этих характеристик в виде тригонометрических полиномов. Оценки математического ожидания и корреляционной функции тогда имеют вид

$$\hat{m}(t) = \sum_{k,l=-N_1}^{N_1} e^{i\lambda_{kl}t} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(s) e^{-i\lambda_{kl}s} ds \right], \quad (1)$$

$$\hat{b}(t, u) = \sum_{k,l=-N_2}^{N_2} e^{i\lambda_{kl}t} \left[\frac{1}{\theta} \int_0^\theta [\xi(s) - \hat{m}(s)][\xi(s+u) - \hat{m}(s+u)] e^{-i\lambda_{kl}s} ds \right]. \quad (2)$$

Здесь целые числа N_1 и N_2 — номера высших гармоник. Оценки (1) и (2) называют компонентными [4, 11, 12]. Компонентная оценка математического ожидания асимптотически несмещенная и состоятельная, если корреляционные связи БПКСП убывают с ростом смещения, т.е.

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} b(t, u) = 0. \quad (3)$$

Выполнение соотношения (3) также является достаточным условием асимптотической несмещенности компонентной оценки корреляционной функции (2), а для гауссовых БПКСП — также условием ее состоятельности. Однако при близких значениях периодов T_1 и T_2 результаты компонентного оценивания могут иметь значительную как систематическую, так и среднеквадратичную погрешности, обусловленные эффектами просачивания [4, 11, 12]. В работе [10] показано, что избежать этих ошибок при оценке математического ожидания можно, используя метод наименьших квадратов (МНК). МНК-оценки математического ожидания несмещенные, а их дисперсии даже при небольших длинах реализации θ мало отличаются от компонентных оценок. Данная работа посвящена анализу свойств МНК-оценок корреляционной функции БПКСП.

1. Систематическая ошибка МНК-оценивания корреляционной функции

Перепишем выражение для корреляционной функции в действительной форме, приняв, что $B_{kl}(u) = \frac{1}{2}[B_{kl}^c(u) - iB_{kl}^s(u)]$ и $\overline{B_{-k,-l}(u)} = B_{k,l}$, где $-$ — знак сопряжения:

$$b(t, u) = B_{00}(u) + \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{l=1}^{N_2} [B_{kl}^c(u) \cos \lambda_{kl}t + B_{kl}^s(u) \sin \lambda_{kl}t] + \\ + \sum_{l=0}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} [B_{k,-l}^c(u) \cos \lambda_{k,-l}t + B_{k,-l}^s(u) \sin \lambda_{k,-l}t].$$

Корреляционная функция содержит аддитивные составляющие с частотами $k \frac{2\pi}{T_1}$ и $l \frac{2\pi}{T_2}$, $k, l = \overline{1, N_2}$, и комбинационные гармоники с частотами $k \frac{2\pi}{T_1} \pm l \frac{2\pi}{T_2}$. Для упрощения дальнейшего анализа переобозначим частоты гармоник согласно табл. 1 и 2.

Таблица 1

$\Lambda_{N_2, -N_2}$	$\Lambda_{N_2, -N_2+1}$...	$\Lambda_{N_2, -1}$	$\Lambda_{N_2, 0}$	$\Lambda_{N_2, 1}$	$\Lambda_{N_2, 2}$...	Λ_{N_2, N_2}
$\Lambda_{N_2-1, -N_2}$	$\Lambda_{N_2-1, -N_2+1}$...	$\Lambda_{N_2-1, -1}$	$\Lambda_{N_2-1, 0}$	$\Lambda_{N_2-1, 1}$	$\Lambda_{N_2-1, 2}$...	Λ_{N_2-1, N_2}
...
$\Lambda_{2, -N_2}$	$\Lambda_{2, -N_2+1}$...	$\Lambda_{2, -1}$	$\Lambda_{2, 0}$	$\Lambda_{2, 1}$	$\Lambda_{2, 2}$...	Λ_{2, N_2}
$\Lambda_{1, -N_2}$	$\Lambda_{1, -N_2+1}$...	$\Lambda_{1, -1}$	$\Lambda_{1, 0}$	$\Lambda_{1, 1}$	$\Lambda_{1, 2}$...	Λ_{1, N_2}
					$\Lambda_{0, 1}$	$\Lambda_{0, 2}$...	Λ_{0, N_2}

Таблица 2

$\omega_{2N_2(N_2+1)}$...	$\omega_{N_2(2N_2+1)}$	$\omega_{N_2(2N_2+1)}$	$\omega_{N_2^2+1}$	$\omega_{N_2^2+2}$...	$\omega_{N_2^2+N_2-1}$	$\omega_{N_2(N_2+1)}$
$\omega_{N_2(2N_2+1)-1}$...	$\omega_{2N_2^2}$	$\omega_{2N_2^2-1}$	$\omega_{(N_2-1)N_2+1}$	$\omega_{(N_2-1)N_2+2}$...	$\omega_{N_2^2-1}$	$\omega_{N_2^2}$
...
$\omega_{N_2(N_2+3)+2}$...	$\omega_{N_2(N_2+2)+2}$	$\omega_{N_2(N_2+2)+2}$	ω_{2N_2+1}	ω_{2N_2+2}	...	ω_{3N_2-1}	ω_{3N_2}
$\omega_{N_2(N_2+2)+1}$...	$\omega_{N_2(N_2+1)+2}$	$\omega_{N_2(N_2+1)+1}$	ω_{N_2+1}	ω_{N_2+2}	...	ω_{2N_2-1}	ω_{2N_2}
				ω_1	ω_2	...	ω_{N_2-1}	ω_{N_2}

Оценку корреляционной функции будем искать путем минимизации функционала

$$F[\hat{B}_0, \hat{B}_1^c(u), \dots, \hat{B}_L^c(u), \hat{B}_1^s(u), \dots, \hat{B}_L^s(u)] =$$

$$= \int_0^{\theta} \left[\zeta(t, u) - \left[\hat{B}_0(u) + \sum_{r=1}^L [\hat{B}_r^c(u) \cos \omega_r t + \hat{B}_r^s(u) \sin \omega_r t] \right] \right]^2 dt,$$

где $L = 2N_2(N_2 + 1)$, $\zeta(t, u) = [\xi(t) - \hat{m}(t)][\xi(t+u) - \hat{m}(t+u)]$, а оценки корреляционных компонентов $\hat{B}_r^c(u)$ и $\hat{B}_r^s(u)$ являются оценками коэффициентов Фурье гармоник с переобозначенными частотами. Необходимые условия существования его минимума

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{B}_0(u)} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{B}_r^c(u)} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{B}_r^s(u)} = 0, \quad r = \overline{1, L},$$

в матричной форме имеют вид

$$D\hat{B}(u) = \tilde{B}(u), \quad (4)$$

где матрицы

$$\hat{B}(u) = [\hat{B}(u)_0, \hat{B}(u)_1^c, \dots, \hat{B}(u)_L^c, \hat{B}(u)_1^s, \dots, \hat{B}(u)_L^s]^T,$$

$$\tilde{B}(u) = [\tilde{B}(u)_0, \tilde{B}(u)_1^c, \dots, \tilde{B}(u)_L^c, \tilde{B}(u)_1^s, \dots, \tilde{B}(u)_L^s]^T,$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0L} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0L} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1L} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{L0} & c_{L1} & c_{L2} & \dots & c_{LL} & a_{L1} & a_{L2} & \dots & a_{LL} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{L1} & s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{0L} & a_{1L} & a_{2L} & \dots & a_{LL} & s_{L1} & s_{L2} & \dots & s_{LL} \end{bmatrix} = [d_{rk}], \quad \begin{matrix} r = \overline{1, 2L+1}, \\ k = \overline{1, 2L+1}, \end{matrix} \quad (5)$$

$$c_{rk} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \cos \omega_r t \cos \omega_k t dt, \quad s_{rk} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \sin \omega_r t \sin \omega_k t dt, \quad a_{rk} = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \cos \omega_r t \sin \omega_k t dt,$$

а также

$$\tilde{B}_0(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \zeta(t) dt, \quad \tilde{B}_r^c(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \zeta(t, u) \cos \omega_r t dt, \quad \tilde{B}_r^s(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \zeta(t, u) \sin \omega_r t dt.$$

Решение системы уравнений (4) имеет вид

$$\hat{B}(u) = D^{-1} \tilde{B}(u) = \frac{[A_{rk}]^T}{|D|} \tilde{B}(u),$$

где $|D|$ — определитель матрицы (5), а $[A_{rk}]^T$ — транспонированная матрица алгебраических дополнений. Отсюда

$$E\hat{B}(u) = \frac{[A_{rk}]^T}{|D|} E\tilde{B}(u).$$

Элементы матрицы $E\tilde{B}(u)$ определяются формулами

$$E\tilde{B}_0(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} m_{\zeta}(t, u) dt,$$

$$E\tilde{B}_r^c(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} m_{\zeta}(t, u) \cos \omega_r t dt, \quad E\tilde{B}_r^s(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} m_{\zeta}(t, u) \sin \omega_r t dt,$$

где

$$m_{\zeta}(t, u) = E[\xi(t) - \hat{m}(t)][\xi(t+u) - \hat{m}(t+u)] = b(t, u) - \varepsilon_{\zeta}(t, u).$$

При этом

$$\varepsilon_{\zeta}(t, u) = E[\overset{\circ}{\hat{m}}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) + \overset{\circ}{\hat{m}}(t) \overset{\circ}{\hat{m}}(t+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}(t) \overset{\circ}{\xi}(t)],$$

а оценки $\overset{\circ}{\hat{m}}(t)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\hat{m}}(t) = \hat{m}(t) - m(t) = \frac{1}{|M|} & \left[\left[\frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(s) ds \right] f_0(t) + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\tilde{L}} \left[\left[\frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(s) \cos \omega_p s ds \right] \tilde{f}_p(t) + \left[\frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \overset{\circ}{\xi}(s) \sin \omega_p s ds \right] \tilde{f}_{p+\tilde{L}}(t) \right] \right], \end{aligned}$$

где

$$f_p(t) = M_{p+1,1} + \sum_{q=1}^{\tilde{L}} [M_{p+1,q+1} \cos \omega_q t + M_{p+1,q+\tilde{L}+1} \sin \omega_q t],$$

а M_{pq} — алгебраические дополнения матрицы системы уравнений $M = [m_{ik}]$ $(2\tilde{L}+1) \times (2\tilde{L}+1)$, решениями которой являются оценки коэффициентов Фурье математического ожидания [10].

Приняв во внимание ряд

$$b(t, u) = B_0(u) + \sum_{k=1}^L [B_k^c(u) \cos \omega_k t + B_k^s(u) \sin \omega_k t], \quad (6)$$

а также соотношение

$$\sum_{r=1}^{2L+1} d_{rk} A_{rj} = \begin{cases} |\mathbf{D}|, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

для смещения $\varepsilon[\hat{b}(t, u)] = \mathbf{E}\hat{b}(t, u) - b(t, u)$ находим

$$\varepsilon[\hat{b}(t, u)] = \varepsilon[\hat{B}_0(u)] + \sum_{l=0}^L [\varepsilon[\hat{B}_l^c(u)] \cos \omega_l t + \varepsilon[\hat{B}_l^s(u)] \sin \omega_l t],$$

где

$$\varepsilon[\hat{B}_0(u)] = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \sum_{k=0}^{2L} \varepsilon[\tilde{B}_k(u)] A_{k+1,1},$$

$$\varepsilon[\hat{B}_l^c(u)] = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \sum_{k=0}^{2L} \varepsilon[\tilde{B}_k(u)] A_{k+1,l+1}, \quad \varepsilon[\hat{B}_l^s(u)] = -\frac{1}{|\mathbf{D}|} \sum_{k=0}^{2L} \varepsilon[\tilde{B}_k(u)] A_{k+1,l+L+1}.$$

При этом

$$\varepsilon[\tilde{B}_0(u)] = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \varepsilon_\zeta(t, u) dt,$$

$$\varepsilon[\tilde{B}_k(u)] = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \varepsilon_\zeta(t, u) \cos \omega_k t dt, \quad (7)$$

$$\varepsilon[\tilde{B}_{k+L}(u)] = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \varepsilon_\zeta(t, u) \sin \omega_k t dt. \quad (8)$$

Как следует из полученных соотношений, каждая из величин (7) и (8) зависит от интегралов типа

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(s, t-s+u) \begin{Bmatrix} \cos \omega_k t & \cos \omega_l s \\ \sin \omega_k t & \sin \omega_l s \end{Bmatrix} dt ds = \\ & = \frac{1}{\theta^2} \sum_{r=-L}^L \int_0^\theta e^{i\omega_r s} \left[\int_{-s}^{\theta-s} B_r(u_1+u) \begin{Bmatrix} \cos \omega_k t & \cos \omega_l s \\ \sin \omega_k t & \sin \omega_l s \end{Bmatrix} du_1 \right] ds. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что величины (7) и (8) стремятся к нулю, если выполняются условия

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} B_k(u) = 0 \quad \forall k \in \overline{1, L}. \quad (9)$$

Поэтому МНК-оценка корреляционной функции асимптотически несмещенная, смещения при конечных θ обусловлены не эффектом просачивания, а предварительным оцениванием математического ожидания процесса.

2. Дисперсия МНК-оценки корреляционной функции

Для вычисления дисперсии оценки корреляционной функции представим ее в виде

$$\hat{b}(t, u) = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \sum_{l=0}^{2L} \tilde{B}_l(u) f_l(t),$$

где

$$f_l(t) = A_{l+1,1} + \sum_{r=1}^L [A_{l+1,r+1} \cos \omega_r t + A_{l+1,L+r+1} \sin \omega_r t].$$

Тогда дисперсия определяется формулой

$$D[\hat{b}(t,u)] = E[\hat{b}(t,u) - E\hat{b}(t,u)]^2 = \frac{1}{|D|^2} \sum_{k,l=0}^{2L} R_{\tilde{B}_k \tilde{B}_l}(u) f_k(t) f_l(t),$$

где $R_{\tilde{B}_k \tilde{B}_l}(u)$ — корреляции величин $\tilde{B}_k(u)$ и $\tilde{B}_l(u)$:

$$R_{\tilde{B}_k \tilde{B}_l}(u) = E\tilde{B}_k(u)\tilde{B}_l(u) - E\tilde{B}_k(u)E\tilde{B}_l(u).$$

Для гауссовых процессов в первом приближении

$$R_{\tilde{B}_k \tilde{B}_l}(u) = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta E[\xi_k(t)\xi_k(t+u)\xi_l(s)\xi_l(s+u) - b(t,u)b(s,u)] \times \\ \times \begin{Bmatrix} \cos \omega_k t & \cos \omega_l s \\ \sin \omega_k t & \sin \omega_l s \end{Bmatrix} dt ds = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b_\eta(s, s-t, u) \begin{Bmatrix} \cos \omega_k t & \cos \omega_l s \\ \sin \omega_k t & \sin \omega_l s \end{Bmatrix} dt ds,$$

где

$$b_\eta(s, s-t, u) = b(t, s-t)b(t+u, s-t) + b(t, s-t+u)b(t+u, s-t-u).$$

Поскольку корреляционная функция $b_\eta(t, u_1, u)$ определяется произведением би-периодических функций $b(t, u)$, она также является бипериодической и для конечного ряда (6) может быть представлена в виде

$$b_\eta(t, u_1, u) = \sum_{k=-2L}^{2L} \tilde{B}_k(u_1, u) e^{i\omega_k t},$$

где

$$\tilde{B}_k(u_1, u) = \begin{cases} \sum_l e^{-i\omega_l u} [B_{k+l}(u_1) \overline{B}_l(u_1) + B_{k+l}(u_1+u) \overline{B}_l(u_1-u)], & k \geq 0, \\ \sum_l e^{-i\omega_l u} [B_{k+l}(u_1) \overline{B}_l(u_1) + B_{k+l}(u_1+u) \overline{B}_l(u_1-u)], & k < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Из соотношений (10) следует, что при выполнении условий (9) справедливо предельное равенство

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \tilde{B}_k(u_1, u) = 0 \quad \forall k = \overline{-2L, 2L},$$

это значит, что $D[\hat{b}(t, u)] \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$, т.е. МНК-оценка корреляционной функции является состоятельной.

Таким образом, МНК-оценка корреляционной функции асимптотически несмещенная и состоятельная, т.е. обладает всеми необходимыми свойствами, которые делают возможным построение на ее основе соответствующих алгоритмов для статистической обработки реальных данных. Основным ее преимуществом перед компонентной оценкой является отсутствие эффектов просачивания, которые могут приводить к значительным погрешностям оценки корреляционных характеристик при близких комбинационных частотах. Полученные выше формулы для статистических характеристик МНК-оценки дают возможность вычислить по-

грешности обработки для конкретных типов сигналов, а также провести их сравнение с погрешностями, которые возникают при компонентном оценивании.

3. МНК-оценка корреляционной функции квадратурной модели

Рассмотрим одну из самых простых моделей БПКСП — квадратурную:

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos \lambda_{11}t + \xi_s(t) \sin \lambda_{11}t. \quad (11)$$

Математические ожидания модулирующих процессов $E\xi_c(t) = m_c$, $E\xi_s(t) = m_s$, а корреляционная функция процесса (11)

$$b(t, u) = B_{00}(u) + \sum_{l=\pm 2} B_l(u) e^{i\lambda_l t} = B_{00}(u) + B_{22}^c(u) \cos \lambda_{22}t + B_{22}^s(u) \sin \lambda_{22}t.$$

При этом

$$B_{00}(u) = \frac{1}{2} [R_c(u) + R_s(u)] \cos \lambda_{11}u + R_{cs}^-(u) \sin \lambda_{11}u,$$

$$B_{22}^c(u) = \frac{1}{2} [R_c(u) - R_s(u)] \cos \lambda_{11}u + R_{cs}^+(u) \sin \lambda_{11}u,$$

$$B_{22}^s(u) = R_{cs}^+(u) \cos \lambda_{11}u + \frac{1}{2} [R_s(u) - R_c(u)] \sin \lambda_{11}u,$$

$$B_{22}(u) = \frac{1}{2} [R_2^c(u) - iR_2^s(u)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} [R_c(u) - R_s(u)] - iR_{cs}^+(u) \right] e^{i\lambda_{11}u},$$

$$iR_c(u) = E \overset{\circ}{\xi}_c(t) \overset{\circ}{\xi}_c(t+u), \quad R_s(u) = E \overset{\circ}{\xi}_s(t) \overset{\circ}{\xi}_s(t+u),$$

$$\overset{\circ}{\xi}_c(t) = \xi_c(t) - m_c, \quad \overset{\circ}{\xi}_s(t) = \xi_s(t) - m_s,$$

$R_{cs}^+(u)$ и $R_{cs}^-(u)$ — четная и нечетная части взаимно корреляционной функции

$$R_{cs}^+(u) = E \overset{\circ}{\xi}_c(t) \overset{\circ}{\xi}_s(t+u).$$

Для упрощения составляющих, обусловленных предварительными вычислениями математического ожидания (при исчислении дисперсии они имеют более высокий порядок малости [4, 11]).

МНК-оценки корреляционных компонентов имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{B}_k(u) = \frac{1}{\theta |D|} & \left[A_{1k} \int_0^\theta \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) dt + \frac{1}{2} (A_{2k} + iA_{3k}) \int_0^\theta \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) e^{i\lambda_{22}t} dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (A_{2k} - iA_{3k}) \int_0^\theta \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) e^{-i\lambda_{22}t} dt \right], \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (12)$$

при этом $\hat{B}_1(u) = \hat{B}_{00}(u)$, $\hat{B}_2(u) = \hat{B}_{22}^c(u)$, $\hat{B}_3(u) = \hat{B}_{22}^s(u)$. На основе этого выражения, учитывая, что в данном случае

$$b_\eta(t, u_1, u) = \tilde{B}_0(u_1, u) + \sum_{r=\pm 2, \pm 4} \tilde{B}_r(u_1, u) e^{i\lambda_{rr}t} =$$

$$= \tilde{B}_0(u_1, u) + \sum_{r=\pm 2, \pm 4} [\tilde{B}_r^c(u_1, u) \cos \lambda_{22} t + \tilde{B}_r^s(u_1, u) \sin \lambda_{22} t],$$

для дисперсий оценок (12) в первом приближении получаем:

$$\begin{aligned} D[\hat{B}_k(u)] = & \frac{1}{\theta |D|^2} \left[\int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) \left[2(A_{1k})^2 + (A_{2k}^2 + A_{3k}^2) \cos \lambda_{22} u_1 \right] \tilde{B}_0(u_1, u) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (A_{2k}^2 - A_{3k}^2) [\tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos \lambda_{22} u_1 - \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin \lambda_{22} u_1] + \\ & \left. + A_{2k} A_{3k} [\tilde{B}_4^c(u_1, u) \sin \lambda_{22} u_1 + \tilde{B}_4^s(u_1, u) \cos \lambda_{22} u_1] \right] du_1 + \\ & + A_{1k} \left[\int_{-\theta}^\theta \left(1 - \frac{|u_1|}{\theta} \right) [A_{2k} \tilde{B}_2^c(u_1, u) du_1 + A_{3k} \tilde{B}_2^s(u_1, u) du_1] \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

В асимптотике, когда $\lim_{\theta \rightarrow \infty} |D| = 1/4$, $\lim_{\theta \rightarrow \infty} A_{11} = 1/4$, $\lim_{\theta \rightarrow \infty} A_{22} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} A_{33} = 1/2$ и $\lim_{\theta \rightarrow \infty} A_{2k} = 0$ для $r \neq k$, получаем выражения

$$D[\hat{B}_1(u)] = D[\hat{B}_{00}(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) \tilde{B}_0(u_1, u) du_1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} D[\hat{B}_2(u)] &= D[\hat{B}_{22}^c(u)] = \\ &= \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) [2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos \lambda_{22} u_1 + \tilde{B}_2^c(u_1, u) \cos \lambda_{22} u_1 - \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin \lambda_{22} u_1] du_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D[\hat{B}_3(u)] &= D[\hat{B}_{22}^s(u)] = \\ &= \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta} \right) [2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos \lambda_{22} u_1 - \tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos \lambda_{22} u_1 + \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin \lambda_{22} u_1] du_1, \end{aligned} \quad (16)$$

которые определяют дисперсии компонентных оценок

$$\begin{aligned} \hat{B}_{00}(u) &= \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) dt, \quad \hat{B}_{22}^c(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) \cos \lambda_{22} t dt, \\ \hat{B}_{22}^s(u) &= \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \overset{\circ}{\xi}(t) \overset{\circ}{\xi}(t+u) \sin \lambda_{22} t dt. \end{aligned} \quad (17)$$

В отличие от дисперсий оценок (17) дисперсии МНК-оценок корреляционных компонентов зависят от всех коэффициентов Фурье корреляционной функции процесса $\eta(t, u)$. Вклад в величины дисперсий каждого из коэффициентов определяется алгебраическими дополнениями A_{jk} определителя матрицы системы уравнений для определения оценок. Элементы матрицы, не принадлежащие главной диагонали, с ростом длины реализации уменьшаются к нулю, и в асимптотике остаются зависимости дисперсии оценки нулевого корреляционного ком-

понента $D[\hat{B}_{00}(u)]$ только от коэффициента $\tilde{B}_0(u_1, u)$, а дисперсий оценок вторых корреляционных компонентов $D[\hat{B}_{22}^c(u)]$ и $D[\hat{B}_{22}^s(u)]$ — только от коэффициентов $\tilde{B}_0(u_1, u)$ и $\tilde{B}_4(u_1, u)$.

Для вычисления числовых значений дисперсий (13) и (14)–(16) и сравнения их зависимости от длины реализации перейдем к конкретным аппроксимациям корреляционных функций модулирующих процессов квадратурной модели (11). Для произвольных значений смещения u формулы для дисперсий будут достаточно громоздкими, поэтому рассмотрим только случай, когда $u = 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0(u_1, 0) &= 2B_0(u_1) + 4|B_2(u_1)|^2, \\ \tilde{B}_2^c(u_1, 0) &= 4B_0(u_1)B_2^c(u_1), \quad \tilde{B}_2^s(u_1, 0) = 4B_0(u_1)B_2^s(u_1), \\ \tilde{B}_4^s(u_1, 0) &= [B_2^c(u_1)]^2 - [B_2^s(u_1)]^2, \quad \tilde{B}_4^c(u_1, 0) = 2B_2^c(u_1)B_2^s(u_1).\end{aligned}$$

Примем аппроксимации

$$R_c(u) = D_1 e^{-\alpha_1|u|}, \quad R_s(u) = D_2 e^{-\alpha_2|u|}, \quad R_{cs}^+(u) = D_{12} e^{-\alpha_{12}|u|}$$

и введем обозначения

$$r_0(\alpha_i, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) e^{-\alpha_i u} du, \quad r_k(\alpha_i, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) e^{-\alpha_i u} \cos \lambda_{kk} u du.$$

Тогда для дисперсий МНК-оценок корреляционных компонентов получаем:

$$\begin{aligned}D[\hat{B}_k(0)] &= \frac{1}{2|D|^2} \left[A_{1k}^2 [D_1^2 [2r_0(2\alpha_1, \theta) + r_2(2\alpha_1, \theta)] + D_2^2 [2r_0(2\alpha_2, \theta) + \right. \\ &+ r_2(2\alpha_2, \theta)] + 2D_1 D_2 r_2(\alpha_1 + \alpha_2, \theta) + 4D_{12}^2 r_0(2\alpha_{12}, \theta)] + (A_{2k}^2 + A_{3k}^2) \left[\frac{1}{4} [D_1^2 \times \right. \\ &\times [r_0(2\alpha_1, \theta) + 4r_2(2\alpha_1, \theta) + r_4(2\alpha_1, \theta)] + D_2^2 [r_0(2\alpha_2, \theta) + 4r_2(2\alpha_2, \theta) + \\ &+ r_4(2\alpha_2, \theta)] + 2D_1 D_2 [r_0(\alpha_1 + \alpha_2, \theta) + r_4(\alpha_1 + \alpha_2, \theta)] + 2D_{12}^2 r_2(2\alpha_{12}, \theta) \left. \right] + \\ &+ 2A_{1k} [A_{2k} [D_1^2 [r_0(2\alpha_1, \theta) + r_2(2\alpha_1, \theta)] - D_2^2 [r_0(2\alpha_2, \theta) + r_2(2\alpha_2, \theta)]] + \\ &+ 2A_{3k} D_{12} [D_1 [r_0(\alpha_{12} + \alpha_1, \theta) + r_2(\alpha_1 + \alpha_{12}, \theta)] + D_2 [r_0(\alpha_{12} + \alpha_2, \theta) + r_2(\alpha_{12} + \\ &+ \alpha_2, \theta)]] + (A_{2k}^2 - A_{3k}^2) \left[\frac{1}{4} [D_1^2 r_0(2\alpha_1, \theta) + D_2^2 r_0(2\alpha_2, \theta) - 2D_1 D_2 r_0(\alpha_1 + \alpha_2, \theta)] - \right. \\ &\left. - D_{12}^2 r_0(2\alpha_{12}, \theta) - D_{12} A_{2k} A_{3k} [D_1 r_0(\alpha_1 + \alpha_{12}, \theta) - D_2 r_0(\alpha_{12} + \alpha_2, \theta)] \right]. \quad (18)\end{aligned}$$

Если $\theta \rightarrow \infty$, то при $k = 1$ величина (18) стремится к дисперсии компонентной оценки нулевого корреляционного компонента, а при $k = 2$ и $k = 3$ — к дис-

персиям компонентных оценок косинусного и синусного корреляционных компонентов соответственно. Проведя вычисления для конкретных значений параметров сигналов и длины реализации, можно оценить разницу между дисперсиями компонентных и МНК-оценок. Результаты вычислений показаны ниже в виде таблиц и графических зависимостей (рис. 1 и 2 (штриховая — компонентная оценка, сплошная — МНК-оценка), табл. 3 и 4) для выбранных параметров, которые описывают корреляционную структуру случайного процесса (11).

Из приведенных иллюстраций видно, что значение дисперсий компонентных и МНК-оценок корреляционных компонентов мало отличаются даже для малых длин реализации. Так, дисперсия МНК-оценки нулевого корреляционного компонента (табл. 3) при $\theta = 20T_1$ только в 1,21 раза превышает дисперсию компонентной оценки, а дисперсия МНК-оценки второго косинусного корреляционного компонента уже при $\theta = 5T_1$ составляет 1,01 дисперсии компонентной оценки.

Таблица 3

θ	$D[\hat{B}_{00}(0)]$	$D[\hat{B}_{22}^c(0)]$	$D[\hat{B}_{22}^s(0)]$	$D[\hat{B}_{00}(0)]$ компонентная	$D[\hat{B}_{22}^c(0)]$ компонентная	$D[\hat{B}_{22}^s(0)]$ компонентная
5	0,471334	0,487274	0,355181	0,407174	0,440535	0,556320
10	0,234751	0,212913	0,184284	0,206223	0,220992	0,232242
15	0,175696	0,139942	0,156238	0,138810	0,139942	0,156238
25	0,102161	0,083206	0,084402	0,086026	0,084765	0,093104
50	0,053220	0,041802	0,045052	0,043765	0,041367	0,047385
75	0,036211	0,027696	0,031370	0,029342	0,027696	0,031370
100	0,026868	0,020719	0,022881	0,022087	0,020826	0,023463
150	0,018173	0,013830	0,015693	0,014770	0,013830	0,015693
200	0,013582	0,010380	0,011643	0,011097	0,010353	0,011791
250	0,010864	0,008286	0,009311	0,008886	0,008304	0,009406

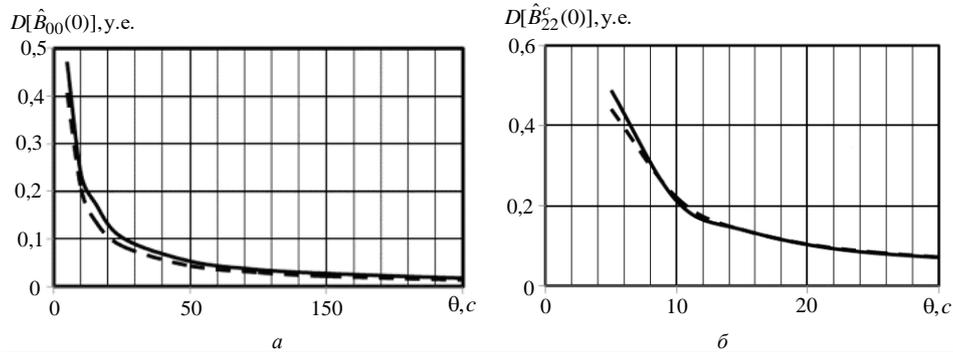


Рис. 1

Таблица 4

θ	$D[\hat{B}_{00}(0)]$	$D[\hat{B}_{22}^c(0)]$	$D[\hat{B}_{22}^s(0)]$	$D[\hat{B}_{00}(0)]$ компонентная	$D[\hat{B}_{22}^c(0)]$ компонентная	$D[\hat{B}_{22}^s(0)]$ компонентная
5	0,426293	3,093282	0,382873	0,298403	2,584578	0,535338
10	0,203072	0,476206	0,189502	0,143953	0,440942	0,224116
15	0,146896	0,212809	0,149424	0,095315	0,218720	0,149424
25	0,085178	0,139024	0,082836	0,058328	0,139024	0,088947
50	0,043801	0,083078	0,043409	0,029404	0,084198	0,045033
75	0,029640	0,041546	0,029818	0,019655	0,041235	0,029818
100	0,022006	0,027588	0,021901	0,014773	0,027588	0,022305
150	0,014836	0,020663	0,014905	0,009865	0,020739	0,014905
200	0,011089	0,013781	0,011091	0,007406	0,013781	0,011194
250	0,008867	0,010339	0,008867	0,005928	0,010320	0,008932

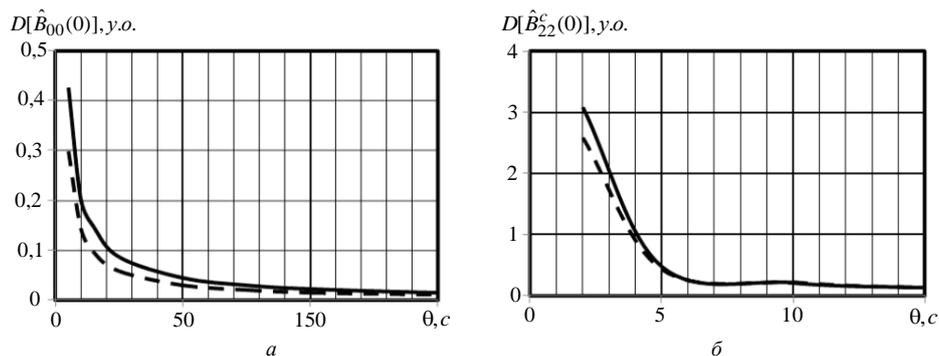


Рис. 2

Разница между дисперсиями растет, когда увеличивается скорость убывания корреляционных связей сигнала, т.е. декрементов затухания α_1, α_2 и α_{12} (табл. 4, рис. 2). Так, при $\theta = 10T_1$, дисперсия МНК-оценки нулевого корреляционного компонента превышает дисперсию его компонентной оценки в 1,57 раза. Разница между дисперсиями медленно уменьшается при росте длины реализации и при $\theta > 30T_1$ ею можно пренебречь.

Заключение

Достаточным условием асимптотической несмещенности МНК-оценки корреляционной функции БПКСП, т.е. ее сходимости в среднем, как и компонентной оценки, является затухание корреляционных связей с ростом сдвига, а для гауссовых БПКСП такое условие обеспечивает и среднеквадратичную сходимость обеих оценок. Преимущество МНК-оценки по сравнению с компонентной заключается в отсутствии ошибок просачивания, смещение оценки (систематическая погрешность) при конечной длине реализации обусловлено только предварительным центрированием реализации на оценку математического ожидания. Структура МНК-оценки отличается от структуры компонентной наличием определенных поправочных величин, зависящих от интегралов произведений тригонометрических функций, периоды которых могут быть достаточно близкими. Такие поправочные величины изменяют величины дисперсий оценок, но, как показывают вычисления, проведенные для некоторых конкретных параметров квадратурной модели БПКСП, среднеквадратичная погрешность МНК-оценки при увеличении длины реализации быстро приближается к среднеквадратичной погрешности компонентной оценки.

І.М. Яворський, Р.М. Юзефович, О.Ю. Дзерин, П.О. Семенов

ВЛАСТИВОСТІ МНК-ОЦІНКИ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ БІПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Риси повторюваності і стохастичності характерні для багатьох коливальних процесів, які зустрічаються в різних областях науки і техніки. Для їх аналізу успішно використовуються моделі у вигляді періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП). ПКВП-підхід забезпечив більш ефективне вирішення задач перетворення сигналів у теорії зв'язку, технічної та медичної діагностики, в енергетиці, прогнозуванні геофізичних процесів. Для

оцінювання кореляційних і спектральних характеристик ПКВП на підставі експериментальних даних розроблено когерентний і компонентний методи, метод найменших квадратів, методи лінійної фільтрації. Разом з тим при аналізі коливань як природного, так і штучного походження часто зустрічаються ситуації, коли стохастична повторюваність одного періоду взаємодіє зі стохастичною повторюваністю іншого. Для аналізу властивостей подвійної ритміки використовують її моделі у вигляді біперіодично корельованих випадкових процесів (БПКВП). Імовірнісні характеристики БПКВП можуть бути визначені за експериментальними даними за допомогою компонентного методу, однак при близьких комбінаційних частотах використання цього методу може призводити до значних похибок просочування. Як показано в роботі, цих помилок вдається уникнути, використовуючи метод найменших квадратів (МНК). Аналіз властивостей оцінок кореляційної функції проведено на підставі рішення матричного рівняння, що забезпечує необхідні умови мінімуму квадратичного функціоналу. Отримано вираз для зсуву оцінок, що виникає через попереднє визначення математичного очікування. Показано, що умовою асимптотичної незміщеності оцінок є втрата кореляційних зв'язків зі збільшенням зсуву. Для гаусових БПКВП ця умова забезпечує також середньоквадратичну збіжність оцінок. Вираз для дисперсії МНК-оцінки кореляційної функції порівняно з дисперсією компонентної містить додаткові складові, які залежать від комбінаційних частот і зменшуються до нуля при збільшенні довжини реалізації. Розглянуто приклад МНК-оцінювання кореляційної функції квадратурної БПКВП моделі і проведено порівняння ефективності компонентних і МНК-оцінок.

Ключові слова: біперіодично корельовані випадкові процеси, оцінка кореляційної функції, метод найменших квадратів, асимптотична незміщеність і слухність, просочування.

I.N. Javorskyj, R.M. Yuzefovych, O.Yu. Dzeryn, P.A. Semenov

THE PROPERTIES OF LSM-ESTIMATOR OF CORRELATION FUNCTION OF BIPERIODICALLY CORRELATED RANDOM PROCESSES

Recurrence and stochasticity are the features of a lot of oscillation processes which occur in the different fields of science and techniques. Nowadays the models in the form of periodically correlated random processes are successfully used for the analysis of this processes. PCRП-approach provides more efficient solution of problems of signal transformation in signal and connection theory, technical and medical diagnosis, energetic, forecasting of geophysical processes. Coherent and component methods, least square method, linear filtration method have been developed for estimating covariance and spectral characteristics of PCRП on the basis of the experimental data. Meanwhile it often occur situations when stochastic recurrence of the one period interacts with stochastic recurrence of the other period when analyzing oscillations of the natural and artificial origin. The models of bi periodically correlated random processes (BPCRП) are used to analyze the features of double rhythmic. Probabilistic characteristics of BPCRП can be defined on the basis of the experimental data through the component method, but using of this method leads to significant leakage errors when combination frequencies are close. As it was shown in the paper that using of the least square method helps to avoid these errors. Analysis of the features of covariance function was made on the basis of the solution of matrix equation providing necessary conditions for the quadratic functional minimum. It was obtained the expression for estimation bias arising from the preliminary definition of the mathematical expectation. It was shown that the damping of correlations

with the rising of bias is the condition of asymptotic unbiasedness of estimators. This condition also provides root mean square convergence of estimator for gauss BPCRP. Expression for the variance of LSM-estimator of the covariance function in comparison with the variance of component estimator contain additional components depending on combinative frequencies and tending to zero when the length of realization is rising. It was considered the example of LSM-estimator of the covariance function of quadrature BPCRP model and it was made the comparison of efficiency of component and LSM-estimators.

Keywords: biperiodically correlated random processes, covariance function estimator, least squares method, asymptotical unbiasedness and consistency, leakage.

1. Cyclostationarity in communications and signal processing. Ed. by W.A. Gardner. New York : IEEE Press, 1994. 504 p.
2. Hurd H.L., Miamee A. Periodically correlated random sequences. spectral theory and practice. New Jersey : Wiley-Interscience, 2007. 354 p.
3. Gardner W.A., Napolitano A., Paural L. Cyclostationarity : Half century of research. *Signal Processing*. 2006. **86**. P. 639–697. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2005.06.016>.
4. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. Львів : ФМІ НАН України, 2013. 802 с.
5. Napolitano A. Cyclostationarity : new trends and application. *Signal Processing*. 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.09.011>.
6. Gardner W.A. Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals. *IEEE SP magazine*. 1991. **3**. P. 14–36. DOI: <http://doi.org/10.1109/79.81007>.
7. Napolitano A. Generalizations of cyclostationarity signal processing: spectral analysis and applications. Wiley-IEEE Press, 2012. 492 p.
8. Antoni J. Cyclostationarity by examples. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2009. **23**. P. 987–1036. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.10.010>.
9. Javorskyj I., Yuzefovych R., Kravets I., Matsko I. Properties of characteristics estimators of periodically correlated random processes in preliminary determination of the period of correlation. *Radioelectronics and Communications Systems*. 2012. **55**. P. 335–348. DOI: doi.org/10.3103/S0735272712080018.
10. Javorskyj I.M., Dzeryn O.Yu., Yuzefovych R.M. Analysis of mean function discrete LSM-estimator for biperiodically nonstationary random signal. *Mathematical Modeling and Computing*. 2019. **6**. P. 44–57. DOI: doi.org/10.23939/mmc2019.01.044.
11. Javorskyj I., Yuzefovych R., Kravets I., Matsko I. Methods of periodically correlated random processes and their generalizations. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2014. P. 73–93. DOI: [doi: 10.1007/978-3-319-04187-2_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-04187-2_6).
12. Javorskyj I., Matsko I., Yuzefovych R., Zakrzewski Z. Discrete estimators of characteristics for periodically correlated time series. *Digital Signal Processing: A Review Journal*. 2016. **53**. P. 25–40. DOI: [10.1016/j.dsp.2016.03.003](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2016.03.003).

Получено 04.12.2019