

УДК 517.9:519.6

В.А. Богаенко, В.М. Булавацкий

О НОВОМ АНАЛОГЕ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДРОБНО-ПОДОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ключевые слова: бипараболическое эволюционное уравнение, дробно-дифференциальный аналог, дробно-подобная производная, бипараболическое уравнение в дробно-подобных производных, краевая задача, задача с нелокальными граничными условиями, обратная ретроспективная задача, регуляризованное решение, оценка сходимости.

Введение

Известно [1], что классическая математическая модель динамики процессов переноса, базирующаяся на линейном уравнении теплопроводности параболического типа, предполагает весьма жесткие ограничения на процессы (бесконечная скорость распространения возмущений и линейная зависимость потока от градиента поля и энергии от температуры), что не позволяет в рамках данной модели получить достаточно корректное описание динамики процессов переноса и приводит к ряду известных парадоксов [2]. В связи с этим в работах [3, 4] предложено обобщение классического уравнения Фурье, записанного в виде

$$Lu \equiv \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u, \quad L_2 = L_1 L_1, \quad (1)$$

где α_1, α_2 — действительные параметры, $L_1 u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u$, Δ — оператор Лапласа по геометрическим переменным, $a > 0$ — физическая константа.

Как отмечается в [4], данное уравнение инвариантно относительно группы Галилея, поэтому может быть использовано для описания процессов диффузионного типа, не зависящих от того, в каких инерциальных системах они наблюдаются. Согласно [4] уравнение (1) называется бипараболическим; при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ оно совпадает с классическим уравнением Фурье.

Бипараболическое уравнение неоднократно использовалось при моделировании различных эволюционных процессов в естествознании, в частности, для описания особенностей динамики деформируемых водонасыщенных геопористых сред [5, 6].

В настоящее время все больший интерес вызывает теория аномальных процессов переноса, в частности теория процессов переноса во фрактальных средах. Соответствующий математический аппарат для моделирования особенностей динамики процессов переноса в таких средах основан на теории ин-

тегро-дифференцирования дробного порядка и в настоящее время интенсивно развивается [7–11]. В работе [12] предложен дробно-дифференциальный аналог бипараболического эволюционного уравнения (1) на основе дробных производных Капуто–Герасимова, предназначенный для моделирования динамики нелокальных во времени процессов переноса. В рамках данного подхода построена неклассическая математическая модель для описания дробно-дифференциальной динамики фильтрационных процессов в трещиновато-пористых пластах.

Решения некоторых нелокальных краевых задач для дробно-дифференциального аналога бипараболического эволюционного уравнения приведены в [13].

В данной работе предложен новый аналог бипараболического эволюционного уравнения (1) на основе дробно-подобных производных [14, 15], для которого получено решение краевой задачи на конечном промежутке, рассмотрена задача с нелокальными граничными условиями, приведена постановка и получено регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи.

Об аналоге бипараболического эволюционного уравнения в терминах дробно-подобных производных

Пусть $\alpha \in (0, 1]$ и задана непрерывная функция $u(t) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Дробно-подобная производная (ДПП [14], или conformable fractional derivative [15]) порядка α от функции $u(t)$ определяется следующим образом [15]:

$$D_t^\alpha u(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{u(t + \theta t^{1-\alpha}) - u(t)}{\theta}, \quad D_t^\alpha u(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} D_t^\alpha u(t). \quad (2)$$

Если ДПП функции $u(t)$ порядка α существует и конечна на $(0, +\infty)$, то говорят, что $u(t)$ является α -дифференцируемой на $(0, \infty)$ [14]. Если $u(t)$ дифференцируема на $(0, \infty)$, то $D_t^\alpha u(t) = t^{1-\alpha} u'(t)$, где $u'(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0} [(u(t + \theta) - u(t))/\theta]$ [15].

При этом, как показано в [14], физическим смыслом ДПП является α -мгновенная скорость изменения вектора состояния системы.

Пусть

$$L_1^\alpha = D_t^\alpha - \alpha^2 \Delta \quad (3)$$

— аналог классического оператора теплопроводности, содержащий ДПП D_t^α по переменной t порядка α , Δ — оператор Лапласа. Запишем определяющие соотношения для энергии и потока в виде

$$e = e_0 + c_v(u - u_0) + \tau_r c_v L_1^\alpha u, \quad (4)$$

$$\bar{q} = -\lambda \nabla u - \tau_r c_v \alpha^2 \nabla (L_1^\alpha u), \quad (5)$$

где $u = u(x, t)$ — температура, c_v — теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности, $\alpha^2 = \lambda / c_v$, τ_r — вещественный параметр (параметр релаксации), ∇ — оператор Гамильтона.

С учетом соотношений (4), (5) из обобщенного уравнения сохранения энергии $D_t^\alpha e + \operatorname{div} \bar{q} = 0$ получаем уравнение

$$L^\alpha u \equiv L_1^\alpha u + \tau_r L_2^\alpha u = 0, \quad L_2^\alpha = L_1^\alpha L_1^\alpha. \quad (6)$$

Отсюда, как частный случай, при $\alpha \rightarrow 1$ получаем стандартное бипараболическое эволюционное уравнение вида (1). Уравнение (6) — это обобщение бипараболического эволюционного уравнения (1) на основе понятия ДПП. Предполагается, что данное уравнение может быть эффективно использовано в целях математического моделирования тепловых и диффузионных процессов в условиях существенного влияния на их динамику аномальных эффектов.

Краевая задача на конечном промежутке

Принимая во внимание соотношения (3), (5), рассмотрим в области $(0, 1) \times (0, \infty)$ задачу

$$L^\alpha u \equiv D_t^\alpha u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_r \left(D_t^\alpha - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(D_t^\alpha u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (7)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = u_{xxx}(1, t) = 0, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad D_t^\alpha u(x, 0) = \varphi(x). \quad (9)$$

Вводя в рассмотрение конечное синус-преобразование Фурье по переменной x вида

$$\hat{u}_n(t) = \int_0^1 u(x, t) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx \quad \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(2n-1)}{2}, n=1, 2, \dots \right), \quad (10)$$

поставим в соответствие рассматриваемой краевой задаче последовательность задач Коши

$$\tau_r D_t^\alpha D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + (1 + 2\tau_r a^2 \lambda_n) D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + a^2 \lambda_n (1 + \tau_r a^2 \lambda_n) \hat{u}_n(t) = 0, \quad (11)$$

$$\hat{u}_n(0) = \hat{\psi}_n, \quad D_t^\alpha \hat{u}_n(0) = \hat{\phi}_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (12)$$

где $\hat{u}_n(t)$ определяется соотношениями (10) и обозначено

$$\hat{\psi}_n = \int_0^1 \psi(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx, \quad \hat{\phi}_n = \int_0^1 \varphi(x) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Непосредственной подстановкой в (11), (12) легко убедиться, что решения данных задач записываются в виде

$$\hat{u}_n(t) = [(1 + \mu_n) \hat{\psi}_n + \tau_r \hat{\phi}_n] e^{-\frac{\mu_n t^\alpha}{\tau_r \alpha}} - (\mu_n \hat{\psi}_n + \tau_r \hat{\phi}_n) e^{-\frac{(1 + \mu_n) t^\alpha}{\tau_r \alpha}} \quad (n=1, 2, \dots), \quad (14)$$

где $\mu_n = \tau_r a^2 \lambda_n$ ($n=1, 2, \dots$), а $\hat{\psi}_n, \hat{\phi}_n$ ($n=1, 2, \dots$) даются соотношениями (13).

Возвращаясь в область оригиналов преобразования Фурье, получаем из (14) решение задачи (7)–(9) в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(1 + \mu_n) \hat{\psi}_n + \tau_r \hat{\phi}_n] e^{-\frac{\mu_n t^\alpha}{\tau_r \alpha}} - (\mu_n \hat{\psi}_n + \tau_r \hat{\phi}_n) e^{-\frac{(1 + \mu_n) t^\alpha}{\tau_r \alpha}} \right\} \sin(\sqrt{\lambda_n} x). \quad (15)$$

В частности, из соотношения (15) при $\alpha \rightarrow 1$ получаем решение соответствующей краевой задачи на конечном промежутке для стандартной бипараболической модели тепломассопереноса, приведенное в [5]

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(1 + \mu_n) \hat{\psi}_n + \tau_r \hat{\phi}_n] e^{-\frac{\mu_n}{\tau_r} t} - (\mu_n \hat{\psi}_n + \tau_r \hat{\phi}_n) e^{-\frac{(1 + \mu_n)}{\tau_r} t} \right\} \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Результаты численной реализации полученного решения (15) для начальных условий $\psi(x) = 4x(1-x)e^{-x}$, $\varphi(x) = 0$, $(0 \leq x \leq 1)$ приведены на рис. 1, 2. На рис. 1 изображены графики решения $u(x, t)$ рассматриваемой задачи при фиксированном значении параметра $\alpha = 0,8$ в зависимости от времени t (1 — $t = 0$; 2 — $t = 0,1$; 3 — $t = 0,5$; 4 — $t = 1,0$). Как видно, здесь имеет место монотонное убывание функции поля $u(x, t)$ с течением времени для всех точек рассматриваемого отрезка $(0, 1]$. На рис. 2 приведены графики $u(x, t)$ для фиксированного значения $t = 1$ и различных значений порядка α (1 — $\alpha = 0,9$; 2 — $\alpha = 0,8$; 3 — $\alpha = 0,7$). В данном случае наблюдается монотонное убывание функции $u(x, 1)$, $\forall x \in (0, 1]$ также в связи с уменьшением показателя порядка производной α .

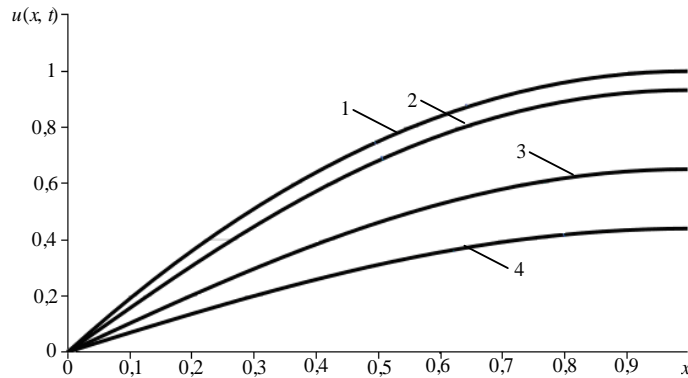


Рис. 1

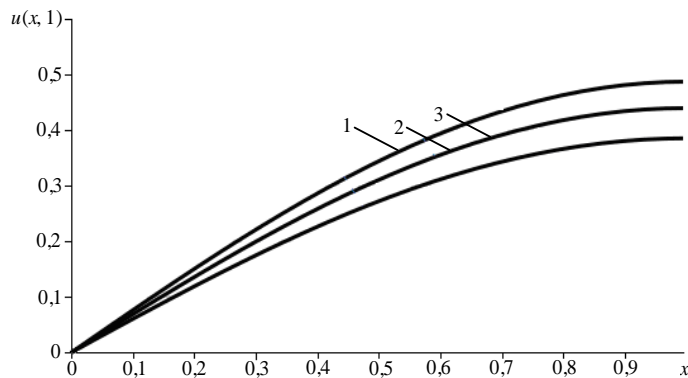


Рис. 2

Задача с нелокальными граничными условиями

Рассмотрим в прямоугольнике $(0, 1) \times (0, T)$ краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую дробно-подобному аналогу бипараболического эволюционного уравнения вида (7), несамосопряженным граничным условиям

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t), \quad u_{xxx}(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad D_t^\alpha u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (17)$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

Под решением задачи (7), (16), (17) понимаем функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{(4,2)}(\Omega_T)$, удовлетворяющую уравнению (7) и условиям (16), (17), где

$$C_{x,t}^{(4,2)}(\Omega_T) = \{u(x, t) : u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}, D_t^\alpha u, D_t^\alpha u_x, D_t^\alpha u_{xx}, D_t^\alpha D_t^\alpha u \in C(\Omega_T)\},$$

$$\Omega_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}.$$

Решение рассматриваемой задачи ищем в виде разложения по специально выбранному базису из системы функций [16]

$$X_0(x) = 1, \quad X_{2k-1}(x) = \cos(\lambda_k x), \quad X_{2k}(x) = x \sin(\lambda_k x), \quad \lambda_k = 2\pi k \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Вместе с последовательностью

$$Y_0(x) = 2(1-x), \quad Y_{2k-1}(x) = 4(1-x)\cos(\lambda_k x), \quad Y_{2k}(x) = 4\sin(\lambda_k x) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

эти системы функций образуют биортогональную на интервале $(0, 1)$ систему функций, и любую функцию из $L_2(0, 1)$ можно разложить в биортогональный ряд [16, 17].

В частности, функция $u(x, t)$ с учетом (18), (19) разлагается в ряд вида

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(x)X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(x)X_{2k}(x), \quad (20)$$

где $u_0(t) = (u(x, t), Y_0(x))$, $u_{2k-1}(t) = (u(x, t), Y_{2k-1}(x))$, $u_{2k}(t) = (u(x, t), Y_{2k}(x))$ ($k = 1, 2, \dots$), (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(0, 1)$.

Разлагая функцию начальных условий задачи $\varphi(x)$ в биортогональный ряд

$$\varphi(x) = \varphi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k} X_{2k}(x),$$

где $\varphi_k = (\varphi(x), Y_k(x))$ ($k = 0, 1, \dots$), и применяя формальную схему метода разделения переменных, получаем из (7), (16), (17) для определения искомым коэффициентов $u_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) такие последовательности задач Коши:

$$\tau_r D_t^\alpha D_t^\alpha u_0(t) + D_t^\alpha u_0(t) = 0, \quad u_0(0) = \varphi_0, \quad D_t^\alpha u_0(0) = 0, \quad (21)$$

$$\tau_r D_t^\alpha D_t^\alpha u_{2k}(t) + (1 + 2a_k) D_t^\alpha u_{2k}(t) + \frac{a_k}{\tau_r} (1 + a_k) u_{2k}(t) = 0,$$

$$u_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \quad D_t^\alpha u_{2k}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (22)$$

$$\tau_r D_t^\alpha D_t^\alpha u_{2k-1}(t) + (1 + 2a_k) D_t^\alpha u_{2k-1}(t) + \frac{a_k}{\tau_r} (1 + a_k) u_{2k-1}(t) = f_k(u_{2k}(t)),$$

$$u_{2k-1}(0) = \varphi_{2k-1}, \quad D_t^\alpha u_{2k-1}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (23)$$

где $f_k(u_{2k}(t)) = 2a\epsilon^2 \lambda_k [(1 + 2a_k) u_{2k}(t) + 2\tau_r D_t^\alpha u_{2k}(t)]$, $a_k = \tau_r a \epsilon^2 \lambda_k^2$ ($k = 1, 2, \dots$).

Легко видеть, что решения задач (21), (22) записываются в виде

$$u_0(t) = \varphi_0, \quad u_{2k}(t) = \varphi_{2k} g_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (24)$$

где $g_k(t) = \left[1 + a_k \left(1 - e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha \tau_r}} \right) \right] e^{-\frac{a_k t^\alpha}{\tau_r \alpha}} \quad (k = 1, 2, \dots)$.

Решения задач (23) выражаются через специальные функции и могут быть представлены в виде

$$u_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} g_k(t) + 2\tau_r a^2 \lambda_k \varphi_{2k} e^{-\frac{a_k t^\alpha}{\tau_r \alpha}} \times \left\{ (1 + a_k)t + \tau_r^{1/\alpha} \alpha^{1/\alpha-1} a_k \gamma \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{t^\alpha}{\alpha \tau_r} \right) + t e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha \tau_r}} \left[a_k + (1 + a_k) {}_1F_1 \left(\frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\alpha}, \frac{t^\alpha}{\alpha \tau_r} \right) \right] \right\} \quad (25)$$

$(k = 1, 2, \dots)$,

где $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0)$ — неполная гамма-функция [18, 19], ${}_1F_1(a, b, z)$ —

вырожденная гипергеометрическая функция [19].

Таким образом, решение рассматриваемой краевой задачи дается соотношениями (20), (24), (25). Следует отметить, что, в частности, при $\alpha \rightarrow 1$ (случай стандартного бипараболического уравнения [4]) полученные соотношения принимают весьма простой и удобный для анализа вид [13].

Обратная ретроспективная задача для аналога бипараболического эволюционного уравнения в терминах ДПП

Рассмотрим задачу восстановления начальной функции поля $u(x, 0)$ по заданному ее конечному значению $u(x, T)$ при условиях

$$(L_1^\alpha + \tau_r L_2^\alpha) u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (26)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad (27)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad D_t^\alpha u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (28)$$

где $L_2^\alpha = L_1^\alpha L_1^\alpha$, $L_1^\alpha = D_t^\alpha - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\Omega = (0, 1)$, $0 < \alpha \leq 1$, $g(x)$ — заданная функция, $g(x) \in L^2(\Omega)$.

Применяя к (26)–(28) конечное интегральное преобразование Фурье по геометрической переменной x вида

$$u_n(t) = \int_0^1 u(x, t) \varphi_n(x) dx, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \quad (\sqrt{\lambda_n} = n\pi, n \in N), \quad (29)$$

получаем задачу Коши

$$\tau_r D_t^\alpha D_t^\alpha u_n(t) + (1 + 2\tau_r a^2 \lambda_n) D_t^\alpha u_n(t) + a^2 \lambda_n (1 + \tau_r a^2 \lambda_n) u_n(t) = 0, \quad (30)$$

$$u_n(T) = g_n, \quad D_t^\alpha u_n(0) = 0 \quad (n \in N). \quad (31)$$

Решение задачи (30), (31) записывается в виде

$$u_n(t) = g_n \mu_n(t) e^{\frac{a^2 \lambda_n (T^\alpha - t^\alpha)}{\alpha}} \quad (n \in N), \quad (32)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mu_n(t) = \frac{v_n(t)}{v_n(T)}, \quad v_n(t) = 1 + \tau_r a^2 \lambda_n \left(1 - e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha \tau_r}} \right), \quad g_n = \int_0^1 g(x) \varphi_n(x) dx \quad (n \in N). \quad (33)$$

Возвращаясь в соотношениях (32) к оригиналам преобразования Фурье по геометрической переменной, получаем решение задачи (26)–(28) в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \mu_n(t) e^{\frac{a^2 \lambda_n (T^\alpha - t^\alpha)}{\alpha}} \varphi_n(x), \quad (34)$$

где g_n , $\mu_n(t)$ определяются соотношениями (33), а λ_n , $\varphi_n(x)$ — соотношениями (29).

Из соотношений (32) непосредственно следует, что при условии $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = A \neq 0$ имеет место соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = \infty$, т.е. задача отыскания $u(x, 0)$ некорректна в смысле Адамара [20]. Ниже построим регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи, базируясь на методах регуляризации А.Н. Тихонова [20, 21].

Применяя модифицированную версию метода квазиграничных значений [22], рассмотрим регуляризованную задачу вида

$$(L_1^\alpha + \tau_r L_2^\alpha) u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (35)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad (36)$$

$$u(x, T) - \beta u_{xx}(x, 0) = g(x), \quad D_t^\alpha u(x, 0) = 0 \quad (x \in \Omega), \quad (37)$$

где $\beta > 0$ — параметр регуляризации.

Аналогично изложенному выше для решения $u_\beta(x, t)$ задачи (35)–(37) получаем соотношение

$$u_\beta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n v_n(t) e^{-\frac{a^2 \lambda_n t^\alpha}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-\frac{a^2 \lambda_n T^\alpha}{\alpha}}} \cdot \varphi_n(x), \quad (38)$$

где $v_n(t)$ определяется согласно (33).

Пусть $u_\beta(x, t)$ и $v_\beta(x, t)$ — два решения регуляризованной задачи, соответствующие конечным значениям $g(x)$ и $h(x)$. Тогда имеем

$$\|u_\beta(\cdot, t) - v_\beta(\cdot, t)\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g_n - h_n) v_n(t) e^{-\frac{a^2 \lambda_n t^\alpha}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-\frac{a^2 \lambda_n T^\alpha}{\alpha}}} \cdot \varphi_n(x) \right\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}} \right]^2 (g_n - h_n)^2 \leq (\sup_{n \in N} G(n))^2 \|g - h\|^2, \quad (39)$$

$$\text{где } G(n) = \frac{v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}}, \quad \|g\| := \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Поскольку $v_n(T) \geq 1$ ($\forall n \in N$), при $\beta \in \left(0, \frac{a^2 T^\alpha}{\alpha}\right)$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |G(n)| &\leq \\ &\leq \left| v_n(t) e^{-a^2 \lambda_n \frac{t^\alpha}{\alpha}} \right| \frac{1}{\left| \beta \lambda_n + e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}} \right|} \leq \frac{\alpha}{a^2 t^\alpha e} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \frac{a^2 T^\alpha}{\alpha \beta} \cdot \frac{1}{1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\alpha \beta} \right)} = \\ &= \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \frac{1}{e \beta} \cdot \frac{1}{1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\alpha \beta} \right)}. \end{aligned}$$

С учетом последнего неравенства соотношение (39) перепишем в виде

$$\|u_\beta(\cdot, t) - v_\beta(\cdot, t)\| \leq \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \frac{1}{e \beta} \cdot \frac{1}{1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\alpha \beta} \right)} \|g - h\|. \quad (40)$$

Регуляризованная задача (35)–(37) корректно поставлена в смысле Адамара. Далее найдем оценку отклонения решения регуляризованной задачи от соответствующего решения исходной задачи. Введем в рассмотрение пространство $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и пространство Соболева $H^1(\Omega)$ [18, 21]. С учетом соотношений (34) и (38) имеем

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_\beta(\cdot, t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n \mu_n(t) \frac{\beta \lambda_n e^{a^2 \lambda_n \frac{(T^\alpha - t^\alpha)}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}} \right]^2 \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n(0) \frac{\beta \lambda_n v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{t^\alpha}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}} \right]^2 \leq (\sup_{n \in N} Q(n))^2 \|u(x, 0)\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad (41) \end{aligned}$$

$$\text{где } Q(n) = \frac{\beta v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{t^\alpha}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}}.$$

Так как

$$|Q(n)| \leq \left| \frac{\beta v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}} \right| \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \times$$

$$\times \left| \frac{\beta \lambda_n e^{-a^2 \lambda_n \frac{t^\alpha}{\alpha}}}{\beta \lambda_n + e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}} \right| \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \frac{e^{-1}}{1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\beta \alpha} \right)},$$

из соотношения (41) находим

$$\|u(\cdot, t) - u_\beta(\cdot, t)\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \frac{e^{-1}}{1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\beta \alpha} \right)} \|u(x, 0)\|_{H^2(\Omega)}. \quad (42)$$

В предположении $\|u(x, 0)\|_{H^2(\Omega)} \leq E$ ($E = \text{const} > 0$) получаем из (42) искомую оценку в виде

$$\|u(\cdot, t) - u_\beta(\cdot, t)\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \left[1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\beta \alpha} \right) \right]^{-1} \frac{E}{e}. \quad (43)$$

На основании найденных оценок нетрудно получить соответствующие оценки в случае неточных исходных данных задачи. Действительно, пусть $U_\beta(x, t)$ — решение регуляризованной задачи, соответствующее зашумленным данным $g^\delta(x)$, и $u_\beta(x, t)$ — соответствующее решение в случае точных данных $g(x)$. Предположим, что $\|g - g^\delta\| \leq \delta$, где δ — уровень шума. Тогда, исходя из неравенства треугольника

$$\|U_\beta(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq \|U_\beta(\cdot, t) - u_\beta(\cdot, t)\| + \|u_\beta(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|,$$

с учетом соотношений (40), (43) получаем

$$\|U_\beta(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \frac{\delta}{e\beta} \left[1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\beta \alpha} \right) \right]^{-1} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \left[1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\beta \alpha} \right) \right]^{-1} \frac{E}{e} =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \frac{1}{e} \left[1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\beta \alpha} \right) \right]^{-1} \left(\frac{\delta}{\beta} + E \right). \quad (44)$$

Если, например, положить значение параметра регуляризации равным $\beta = \sqrt{\frac{\delta}{E}}$, то оценка (44) примет вид

$$\|U_\beta(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \tau_r a^2 \right) \left(\frac{T}{t} \right)^\alpha \frac{1}{e} \left[1 + \ln \left(\frac{a^2 T^\alpha}{\alpha} \sqrt{\frac{E}{\delta}} \right) \right]^{-1} \cdot \sqrt{E} (\sqrt{E} + \sqrt{\delta}).$$

Результаты численных экспериментов

Остановимся на некоторых результатах численной реализации регуляризованного решения обратной задачи в рамках аналога бипараболического эволюционного уравнения на основе дробно-подобных производных.

Вычисления производились для начальной функции распределения поля вида

$$u(x, 0) := f(x) = 5x(1-x)e^{-x} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Конечное распределение поля $u(x, T) = g(x)$, определенное суммой ряда

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}} (f, \varphi_n) \varphi_n(x),$$

где $(f, \varphi_n) = 5\sqrt{2} \int_0^1 x(1-x)e^{-x} \sin(n\pi x) dx$, находилось (при значениях входных параметров $T = 1, 0$; $\alpha = 0, 8$; $\tau_r = 0, 1$; $a^2 = 0, 3$) из решения прямой задачи.

Полагая, что искажение входных данных вызывается аддитивными возмущениями

$$g^\delta = g + \varepsilon g (2\text{rand}(\text{size}(g)) - 1),$$

имеем для вычисления уровня шума соотношение $\delta = \varepsilon \|g\|$ [22, 23]. Априори ограничение:

$E = 9$. Параметр регуляризации, определяемый соотношением $\beta = \varepsilon \frac{\|g\|}{E}$, имеет для $\varepsilon = 0, 2$; $0, 1$; $0, 05$; $0, 01$ соответственно значения $\beta = 7, 27 \cdot 10^{-3}$; $3, 63 \cdot 10^{-3}$; $1, 82 \cdot 10^{-3}$; $3, 64 \cdot 10^{-4}$. Соответствующее этим значениям параметра β регуляризованное решение вычисляется согласно соотношению

$$u_\beta(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\beta \lambda_n + v_n(T) e^{-a^2 \lambda_n \frac{T^\alpha}{\alpha}}} \cdot \varphi_n(x).$$

На рис. 3 изображены расчетные кривые: $u(x, 0)$ (кривая 1), $u(x, T)$ (кривая 6) и кривые регуляризованного решения $u_\beta(x, 0)$ для различных значений параметра регуляризации β (2 — $\beta = 3, 64 \cdot 10^{-4}$; 3 — $\beta = 1, 82 \cdot 10^{-3}$; 4 — $\beta = 3, 63 \cdot 10^{-3}$; 5 — $\beta = 7, 27 \cdot 10^{-3}$).

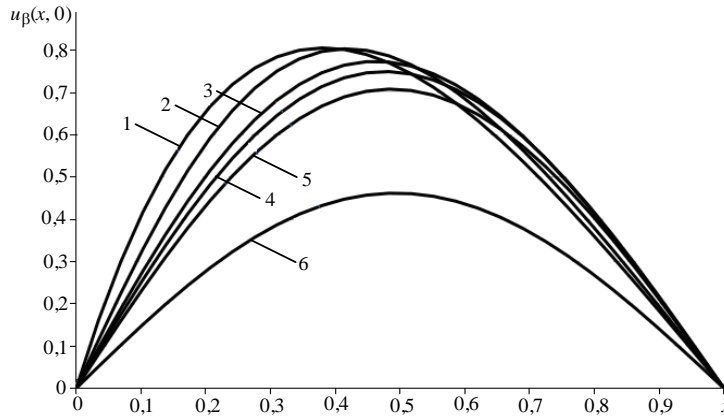


Рис. 3

Как видно из приведенного графического материала, регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи для нового аналога бипараболического эволюционного уравнения в терминах дробно-подобных производных достаточно эффективно восстанавливает начальную функцию поля $u(x, 0)$ и обладает свойством устойчивости.

Заключение

На основе введенного в [15] понятия дробно-подобной производной в настоящей работе предложено новое обобщение известного [4] бипараболического эволюционного уравнения и получено решение ряда краевых задач. В частности, найдено решение краевой задачи на конечном промежутке для аналога бипараболического эволюционного уравнения в терминах дробно-подобных производных, поставлена и решена задача с нелокальными граничными условиями, рассмотрена обратная ретроспективная задача восстановления начальной функции поля по заданному ее конечному значению. Получены некоторые оценки сходимости регуляризованного решения и приведены результаты численных экспериментов.

В.О. Богаєнко, В.М. Булавацький

ПРО НОВИЙ АНАЛОГ БІПАРАБОЛІЧНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ НА ОСНОВІ ДРОБОВО-ПОДІБНИХ ПОХІДНИХ

У зв'язку з тим, що класична математична модель тепломасоперенесення Фур'є не дозволяє у ряді випадків отримати достатньо коректний опис динаміки процесу і призводить до відомих парадоксів, у роботах В.І. Фуцича та його учнів запропоновано модель на основі біпараболічного еволюційного рівняння, яке неодноразово використовувалося при моделюванні різних теплових і дифузійних процесів у природознавстві, зокрема, при моделюванні динаміки деформівних водонасичених геопористих середовищ. В даний час все більший інтерес викликає створена із залученням ідей інтегро-диференціювання дробового порядку теорія аномальних процесів перенесення, що інтенсивно розвивається. Так, наприклад, у роботі Bulavatsky V.M. Fractional differential analog of bipolarabolic evolution equation and some its applications (Cybernetics and Systems Analysis. 2016. 52, N 5. P. 737–747) запропонований дробово-диференціальний аналог біпараболічного еволюційного рівняння (на основі дробових похідних Капуто–Герасимова) призначено для моделювання динаміки нелокальних у часі процесів перенесення і у рамках даного підходу побудовано некласичну математичну модель для опису аномальної динаміки фільтраційних процесів у тріщинуватопористих пластах. Запропоновано новий аналог біпараболічного еволюцій-

ного рівняння на основі дробово-подібних похідних і отримано розв'язок ряду крайових задач. Зокрема, знайдено розв'язок крайової задачі на скінченному проміжку для аналога біпараболічного еволюційного рівняння в термінах дробово-подібних похідних, поставлено і розв'язано задачу з нелокальними граничними умовами, розглянуто обернену ретроспективну задачу відновлення початкової функції поля за заданим її кінцевим значенням. Отримано деякі оцінки збіжності регуляризованого розв'язання оберненої ретроспективної задачі та наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: біпараболічне еволюційне рівняння, дробово-диференціальний аналог, дробово-подібна похідна, біпараболічне рівняння в дробово-подібних похідних, крайова задача, задача з нелокальними граничними умовами, обернена ретроспективна задача, регуляризований розв'язок, оцінка збіжності.

V.A. Bohaienko, V.M. Bulavatsky

ON A NEW ANALOG OF THE BIPARABOLIC EVOLUTION EQUATION WITH CONFORMABLE FRACTIONAL DERIVATIVES

Due to the fact that the classical Fourier mathematical model of heat and mass transfer does not allow, in some cases, obtaining a correct enough description of the dynamics of the process and leads to a number of known paradoxes, V.I. Fushchych and his students proposed in their works a model based on the biparabolic evolution equation, which was further repeatedly used to model various thermal and diffusion processes in natural science, in particular, when modeling the dynamics of deformable water-saturated geoporous media. Nowadays, an intensively developing theory of anomalous transfer processes, created with the use of ideas of fractional order integro-differentiation, is of increasing interest. So, for example, the work Bulavatsky V.M. Fractional differential analog of biparabolic evolution equation and some its applications (Cybernetics and Systems Analysis. 2016. 52, N 5. P. 737–747) proposes a fractional differential analogue of the biparabolic evolution equation (based on the Caputo-Gerasimov fractional derivatives) designed to simulate the dynamics of nonlocal in time transfer processes, and within this approach, constructs a nonclassical mathematical model to describe anomalous dynamics of filtration processes in fractured porous formations. In this paper, a new analog of the biparabolic evolution equation based on conformable fractional derivatives is proposed and a number of boundary value problems are solved. In particular, a solution is found to a boundary value problem on a finite interval for the analog of the biparabolic evolution equation with conformable fractional derivatives; a problem with nonlocal boundary conditions is posed and solved; an inverse retrospective problem of the restoration of the initial field function from its given final value is considered. Some estimates of the convergence rate of the regularized solution of the inverse retrospective problem are obtained and the results of numerical experiments are presented.

Keywords: biparabolic evolution equation, fractional differential analog, conformable fractional derivative, biparabolic equation with conformable fractional derivatives, boundary value problem, problem with nonlocal boundary conditions, inverse retrospective problem, regularized solution, convergence rate estimate.

1. Лыков А.В. Теплообмен. М. : Энергия, 1978. 479с.
2. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. М. : Высшая школа, 1982. 1. 328 с.
3. Фушич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики. *Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики*. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 4–22.
4. Фушич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С. О новой математической модели процессов теплопроводности. *Укр. матем. журнал*. 1990. 42, № 2. С. 237–245.

5. Булавацький В.М. Біпараболічна математична модель процесу фільтраційної консолідації. *Доп. НАН України*. 1997. № 8. С. 13–17.
6. Скопецкий В.В., Булавацький В.М. Математическое моделирование фильтрационной консолидации грунтов в условиях движения солевых растворов на основе бипараболической модели. *Проблемы управления и информатики*. 2003. № 4. С. 134–139.
7. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск : Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
8. Podlubny I. Fractional differential equations. New York : Academic Press, 1999. 341 p.
9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam : Elsevier, 2006. 523 p.
10. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Philadelphia : Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 976 p.
11. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва : Физматлит, 2003. 272 с.
12. Bulavatsky V.M. Fractional differential analog of biparabolic evolution equation and some its applications. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**, N 5. P. 737–747.
13. Bulavatsky V.M. Some nonlocal boundary-value problems for the biparabolic evolution equation and its fractional-differential analog. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55**, N 5. P. 796–804.
14. Мартынюк А.А. Об устойчивости решений дробно-подобных уравнений возмущенного движения. *Доп. НАН України*. 2018. № 6. с. 9–16.
15. Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new definition of fractional derivative. *Journal Comput. Appl. Math.* 2014. **264**. P. 65–70.
16. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1977. **13**, № 2. С. 294–304.
17. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. *Дифференциальные уравнения*. 1999. **35**, № 8. С. 1094–1100.
18. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. М. : Наука, 1966. 386 с.
19. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. New York : Dover, 1965. 831 p.
20. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1979. 288 с.
21. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problem. New York : Springer-Verlag, 1996. 307 p.
22. Ting Wei, Jun-Gang Wang. A modified quasi-boundary value method for the backward time-fractional diffusion problem. *ESAIM: Mathematical modelling and numerical analysis*. 2014. **48**, N 2. P. 603–621.
23. Kokila J., Nair M.T. Fourier truncation method for the non-homogeneous time fractional backward heat conduction problem. *Inverse Problems in Sciences and Engineering*. 2020. **28**, N 3. P. 402–426. DOI: 10.1080/17415977.2019.1580707.

Получено 28.01.2020